

ДЮЖИНА ЗАДАЧ
о среднем арифметическом

Если девяти школьникам дать сто конфет, то хотя бы один из них получит 12 конфет или больше.

Почему? Рассуждаем «от противного». Если это не так, то каждый из 9 школьников получил 11 конфет или меньше. Тогда всего они получили не более $9 \cdot 11 = 99$ конфет, а не 100. Противоречие – значит, так быть не может.

По существу то же самое рассуждение можно изложить иначе. Если 9 школьников получили 100 конфет, то в среднем на каждого школьника пришлось по $\frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$ конфет, и потому хотя бы один должен был получить больше 11 конфет.

Что означают здесь слова «в среднем»? Речь идёт о *среднем арифметическом*. Среднее арифметическое двух чисел a и b равно их полусумме $(a + b) / 2$, среднее трех чисел a, b, c равно $(a + b + c) / 3$, и так далее: среднее арифметическое n чисел a_1, a_2, \dots, a_n равно сумме всех чисел, деленной на их количество, т.е.

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

В нашем примере $n = 9$ (девять школьников), a_1, a_2, \dots, a_9 – количества конфет, полученных каждым из них, общее число конфет $a_1 + a_2 + \dots + a_9$ равно 100, и среднее равно $\frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$.

Среднее арифметическое можно объяснить так: если мы хотим уравнять все числа, не меняя их суммы, то каждое из них надо заменить средним арифметическим.

Задачи

1. Найдите среднее арифметическое чисел 1, 2, 3, 4, ..., 19, 20.
2. Найдите среднее арифметическое чисел $-19, -18, -17, -16, \dots, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, 19, 20$.
3. Найдите среднее арифметическое всех целых чисел от 1 до 1000.



4. Когда в комнату вошёл четвёртый человек, средний возраст находящихся в ней людей увеличился с 11 лет до 14. Сколько лет вошедшему?

5. Среднее арифметическое чисел a и b делит пополам отрезок с концами a и b на числовой оси. Найдите координату точки, которая делит этот отрезок в отношении 3 : 5.

6. Одного из школьников 7 «А» класса перевели в 7 «Б», отчего средний рост школьников в обоих классах (7 «А» и 7 «Б») увеличился. Могло ли так быть?

7. Желая найти среднюю годовую оценку по математике у всех семиклассников, завуч попросил учителей математики седьмых классов вычислить средние оценки в каждом из классов и потом взял среднее арифметическое этих оценок. Прав ли он?

8. Говорят, что средний доход 10% самых богатых жителей города в 15 раз превосходит средний доход всех жителей города. Докажите, что это выдумки.

9. В прямоугольной таблице из трёх строк и двух столбцов средние арифметические в трёх строках равны a , b , c , а среднее арифметическое в первом столбце равно d . Найдите среднее арифметическое всех чисел таблицы и среднее арифметическое во втором столбце.

10. Может ли среднее арифметическое каждого столбца прямоугольной таблицы быть положительным, а среднее арифметическое каждой строки – отрицательным?

11. Таблица умножения на обороте школьной тетради содержит все произведения однозначных чисел от 1 до 9 (всего 81: сначала 1 умножается на все числа от 1 до 9, потом 2 и т.д.). Найдите среднее арифметическое всех произведений в таблице.

12. В строчку написаны сто чисел a_1, a_2, \dots, a_{100} , при этом $a_1 = 1$, $a_{100} = 100$ и каждое число в строчке (кроме двух крайних) не больше среднего арифметического двух соседей: $a_2 \leq (a_1 + a_3) / 2$, $a_3 \leq (a_2 + a_4) / 2$ и так далее. Докажите, что $a_{43} \leq 43$.



Художник Леонид Гамарц