ПАРАЛЛЕЛОГРАММ И РАВЕНСТВО ПЛОЩАДЕЙ

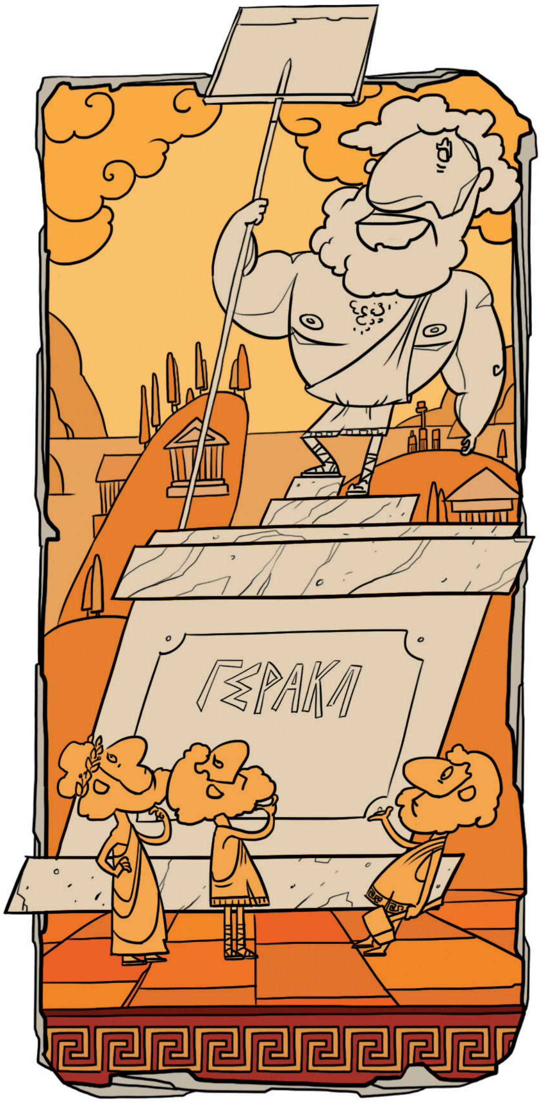
А. Щетников

«Геометрия за то и прославляется, что, заимствовав извне столь мало основных положений, она столь многого достигает», – говорил великий Ньютон. Даже если вы ещё не начали изучать геометрию в школе, вы сможете почувствовать правоту этих слов, если попробуете сами вывести из малого числа очевидных положений многие красивые и совсем не очевидные факты.

Все положения, которые мы будем рассматривать ниже, так или иначе связаны с такой геометрической фигурой, как параллелограмм. Параллелограммом называется четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны. Мы будем считать существование параллелограмма, а также попарное равенство его противоположных сторон и углов очевидным фактом (рис. 1).

Рис. 1

Примем без доказательства ещё два очевидных факта, относящихся к параллелограмму. Древнегреческие математики называли такие очевидные утверждения леммами и доказывали их потом, сначала разбираясь с главным (само слово «лемма» первоначально означало «деньги, взятые взаймы»).



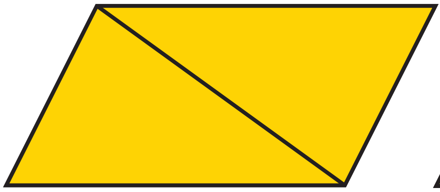


Рис. 2

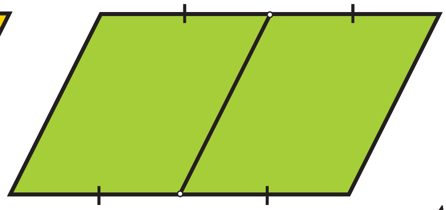


Рис. 3

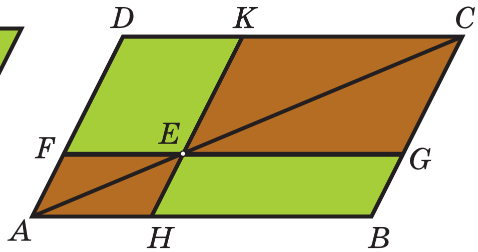
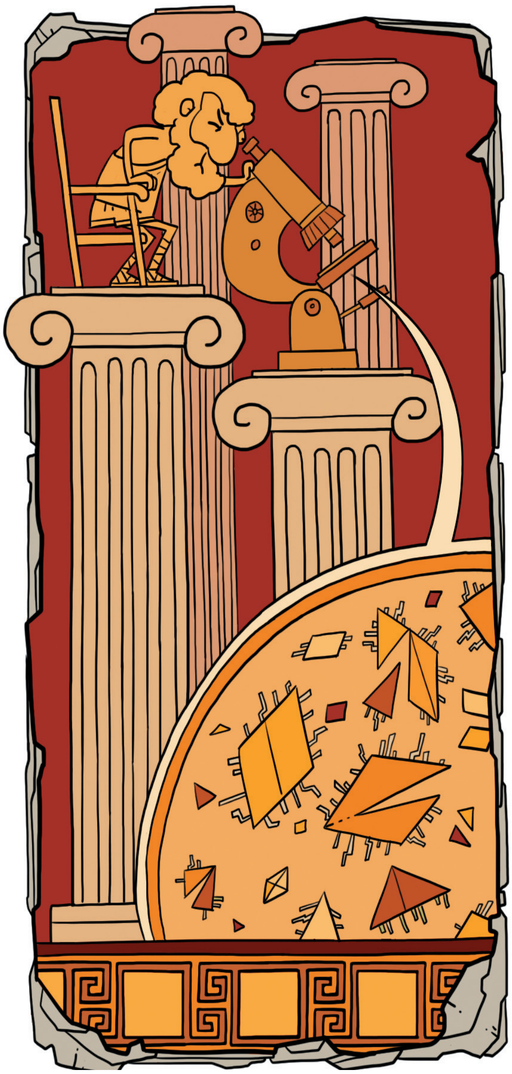


Рис. 4



Лемма 1. *Отрезок, соединяющий две противоположные вершины параллелограмма, делит этот параллелограмм на два равных треугольника* (рис. 2; проведённый отрезок называется диагональю параллелограмма).

Лемма 2. *Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон параллелограмма, делит этот параллелограмм на два равных параллелограмма* (рис. 3; проведённый отрезок называется средней линией параллелограмма).

Основываясь на принятых леммах, мы можем доказать ряд теорем. (Само слово «теорема» тоже происходит из древнегреческого языка и означает некое «священное зрелище, достойное того, чтобы его рассматривать».)

Теорема 1. *Построим произвольный параллелограмм $ABCD$ и проведём в нём диагональ AC. На этой диагонали отметим произвольную точку E. Проведём через точку E два отрезка FG и HK, каждый из которых соединяет две противоположные стороны параллелограмма и идёт параллельно двум другим сторонам* (рис. 4). *Утверждается, что параллелограммы $HBGE$ и $FEKD$, лежащие по разные стороны от проведённой диагонали, будут равны по площади.*

Доказательство. Диагональ AC делит параллелограмм $ABCD$ на равные треугольники ABC и ADC (лемма 1). Параллелограммы $AHEF$ и $EGCK$ также делятся своими диагоналями на равные треугольники: AHE и AFE, EGC и EKC (лемма 1). Но равные фигуры имеют равную площадь. Если от треугольника ABC отнять треугольники AHE и EGC, остатком будет параллело-

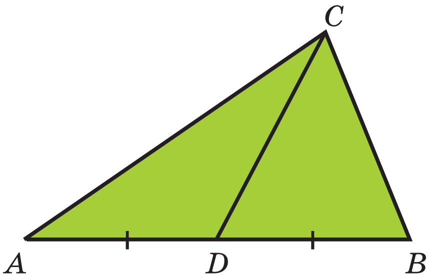


Рис. 5

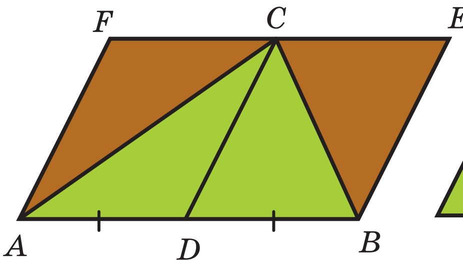


Рис. 6

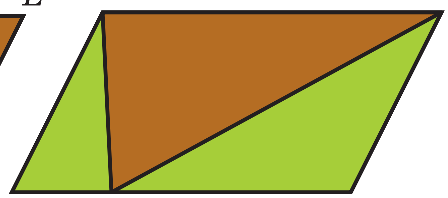


Рис. 7

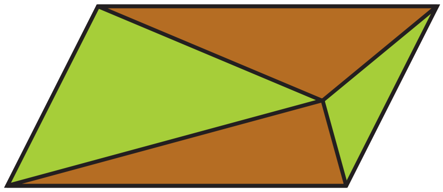
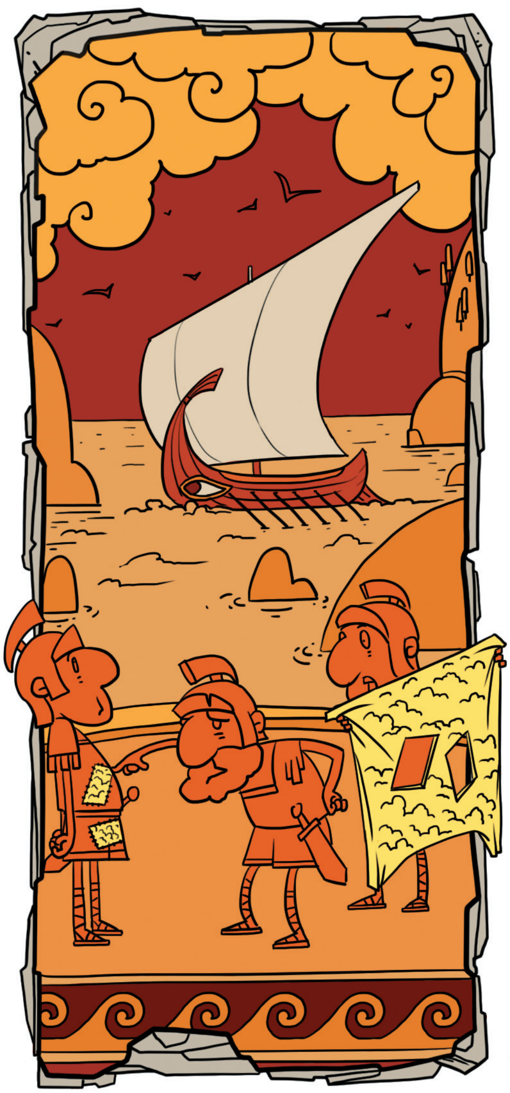


Рис. 8

грамм *HBGE*. Если от треугольника *ADC* отнять треугольники *AFE* и *EKC*, остатком будет параллелограмм *FEKD*. Но если от равных величин отнимаются равные величины, остатки тоже будут равны. Поэтому параллелограммы *HBGE* и *FEKD* равны по площади, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий его вершину с серединой противоположной стороны. Докажите, что медиана треугольника делит этот треугольник на два треугольника равной площади* (рис. 5).

Доказательство. Сделаем дополнительное построение: проведём через концы основания *AB* две прямые, параллельные медиане *CD*; проведём через вершину *C* прямую, параллельную основанию *A*, чтобы проведённые прямые вместе с основанием *AB* составили параллелограмм *ABEF* (рис. 6). Параллелограмм *ABEF* разделён отрезком *CD* на два равных параллелограмма *ADCF* и *DBEC*. По лемме 1, площадь треугольника *ADC* составляет половину от площади параллелограмма *ADCF*, и площадь треугольника *DBC* составляет половину от площади параллелограмма *DBEC*. Так что треугольники *ADC* и *DBC* равны по площади, что и требовалось доказать.



ДОКАЖИТЕ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Докажите, что в чертежах, изображённых на рис. 7, 8, общая площадь фигур, окрашенных зелёным, равна общей площади фигур, окрашенных коричневым. (Придумайте такое дополнительное построение, которое сделает неочевидное равенство площадей очевидным.)

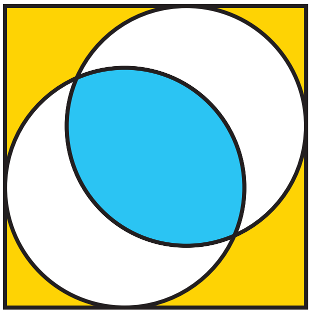


Рис. 9

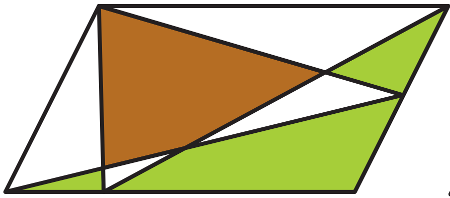


Рис. 10

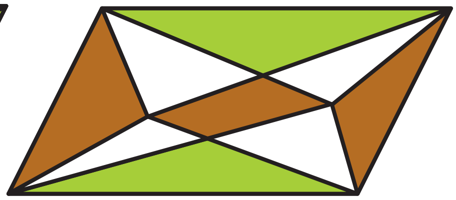


Рис. 11

2 (вспомогательная задача). Внутри квадрата расположены два круга, площадь каждого из которых составляет половину от площади квадрата (рис. 9). Докажите, что суммарная площадь частей квадрата, лежащих снаружи обоих кругов, равна площади фигуры, образованной пересечением обоих кругов.

3. Докажите, что в чертежах, изображённых на рис. 10, 11, общая площадь фигур, окрашенных зелёным, равна общей площади фигур, окрашенных коричневым. (Здесь не надо ничего строить: примените результаты предыдущих задач.)

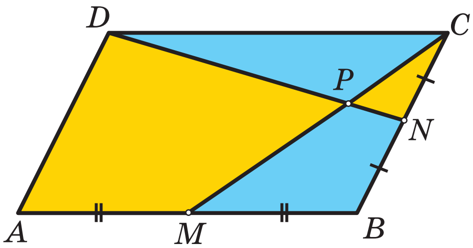


Рис. 12

4. В параллелограмме $ABCD$ стороны AB и BC делятся пополам точками M и N; отрезки CM и DN пересекаются в точке P (рис. 12). Докажите, что треугольник DPC и четырёхугольник $MPNB$ равны по площади. (Какое дополнительное построение здесь нужно сделать?)

5. В произвольном выпуклом четырёхугольнике стороны делятся пополам, после чего проводятся дополнительные отрезки — так, как показано на рис. 13, 14, 15. Докажите, что общая площадь фигур, окрашенных зелёным, равна общей площади фигур, окрашенных коричневым. (Как здесь можно использовать теорему о медиане треугольника?)

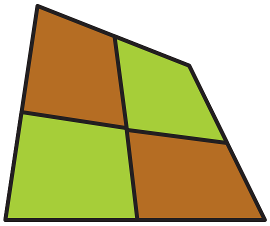


Рис. 13

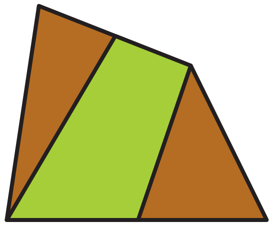


Рис. 14

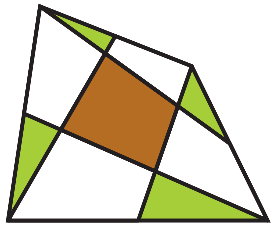


Рис. 15

6. Докажите, что любые два параллелограмма на одном основании и под одной высотой равны по площади (рис. 16). Докажите также, что любые два треугольника на одном основании и под одной высотой равны по площади (рис. 17).

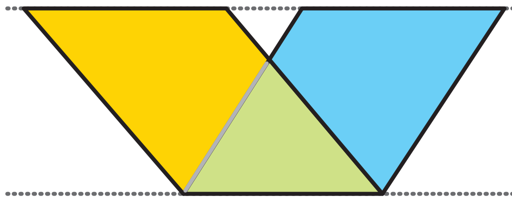


Рис. 16

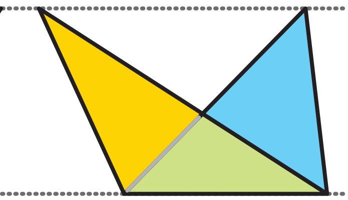


Рис. 17

7. Трапецией называется четырёхугольник, две противоположные стороны которого параллельны между собой, а две другие стороны — не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются её основаниями, непараллельные — боковыми сторонами. В трапеции проведены две диагонали. Докажите, что получившиеся при этом треугольники, примыкающие к боковым сторонам, равны по площади (рис. 18).

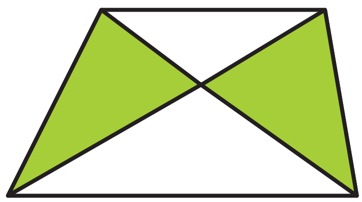
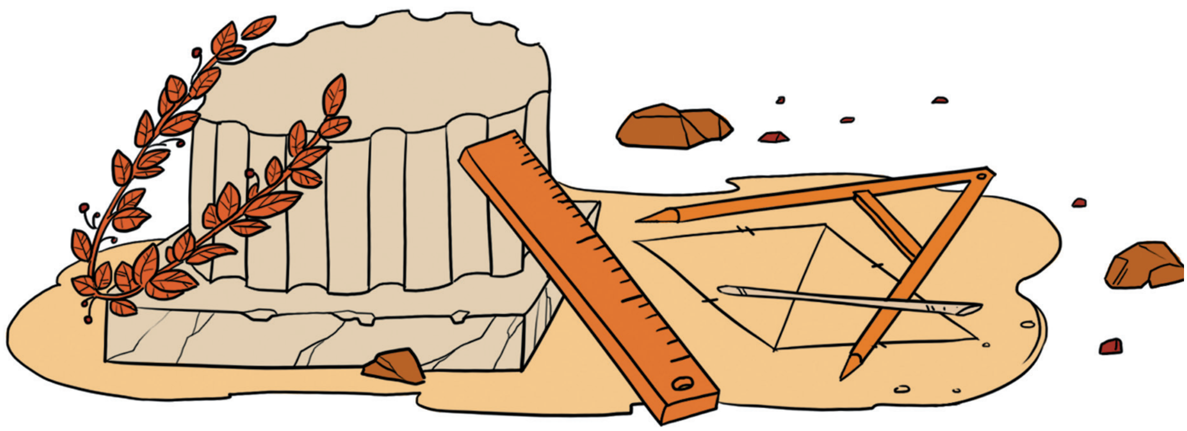


Рис. 18



Художник В. Пяткин