

Лазерный резонатор

А. Панов

3 апреля 2018 г.

Геометрическая оптика кажется простой наукой. В ее основе лежат три очевидных предложения

- между последовательными отражениями/преломлениями световой луч движется по прямой
- при отражении выполняется закон отражения
- при преломлении выполняется закон преломления

Закон отражения заключается в том, что *угол падения равен углу отражения*. Законом преломления мы не будем пользоваться, так что оставим его за скобками.

На первый взгляд, основная задача геометрической оптики — это построение траектории светового луча. Но на самом деле правильная точка зрения состоит в том, что нужно следить не за *отдельным световым лучом*, а за *целым пучком лучей*. Как только мы ее примем, мы попадаем в новый мир, где правят бал каустические кривые и каустические поверхности, и по краю которого мы прошли в нашей статье “Каустики на плоскости и в пространстве”, [Квант 2010, № 3](#).

В оптике есть и другой полезный принцип: нужно следить за лучом не на протяжении одного или нескольких отражений, а за лучом, который претерпевает *многократные отражения*.



Теодор Мейман — создатель первого в мире лазера,
автор увлекательной книги “Лазерная одиссея”

Это задача о поведении светового луча в оптическом резонаторе, математики предпочитают называть ее *бильярдной*.

Лазерный резонатор

Как раз одна из самых важных и самых красивых задач в геометрической оптике — это задача о поведении светового луча в лазерном резонаторе. Лазерный резонатор представляет собой простейшую оптическую схему — это два расположенных друг против друга сферических зеркала.

Луч, запущенный вдоль оси резонатора, при многократных отражениях так и будет двигаться вдоль оси. Вопрос в том, что будет происходить с лучом, слегка отклоненным от оси. То ли при многократных отражениях он так и будет оставаться в пространстве между зеркалами, то ли его отклонение от оси будет увеличиваться, и луч будет выброшен из резонатора? В первом случае резонатор называется устойчивым, и он может быть использован для генерации лазерного излучения, во втором случае резонатор называется неустойчивым.

Наша основная цель — вывод критерия устойчивости лазерного резонатора. По трем числам — радиусам зеркал R_1 и R_2 и расстоянию L между их вершинами (рис. 1), мы должны сказать, будет ли такой резонатор устойчивым или нет. Мы будем рассматривать только плоскую задачу, когда начальный отрезок светового луча, а значит и вся его траектория, лежат в одной плоскости с осью резонатора.

Из всей оптики и всей математики для решения этой задачи нам понадобится только формула сферического зеркала из школьного курса физики и квадратное уравнение с теоремой Виета.

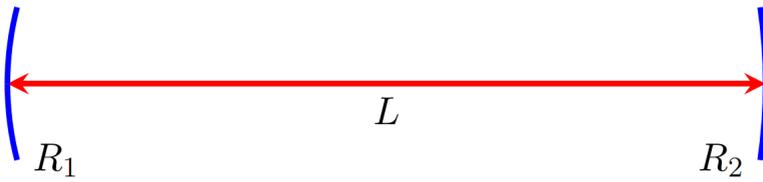


Рис. 1. Лазерный резонатор, заданы радиусы зеркал и расстояние между ними

Эллиптический резонатор

Решение задачи об устойчивости лазерного резонатора начнем с изучения поведения световых лучей в эллиптическом резонаторе. Внутри эллипса есть две интересные для нас траектории светового луча. Это траектории, идущие вдоль осей эллипса, одна — вдоль большой и другая — вдоль малой. И если мы вырежем из эллипса две малые дуги на концах одной из осей, то получим фактически тот самый лазерный резонатор, который изображен на рисунке 1.

У эллипса есть много разных определений. Мы занимаемся оптикой и для нас полезнее всего будет следующее, оптическое

эллипсом с фокусами F_1 и F_2 называется такая кривая, что все лучи, выходящие из одного фокуса, после отражения от нее, собираются в другом фокусе.

Обычно длину большой оси эллипса обозначают a , длину малой оси b . Фокусы эллипса находятся на его большой оси, они удалены от центра эллипса на расстояние $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Траектория, проходящая через фокусы

Кроме траекторий, идущих вдоль большой и вдоль малой оси эллипса, есть еще один тип траекторий, для построения которых не требуется никаких вычислений. Это траектории, проходящие через фокусы эллипса. Если эллипс аккуратно нарисован и отмечены его фокусы, то для построения таких траекторий, кроме линейки и карандаша, ничего больше не надо.

Запустим световой луч из нижней вершины эллипса через правый фокус. Из оптического определения эллипса следует, что после отражения луч пройдет через левый фокус, после следующего — через правый и т. д. (рис. 4). При этом очевидно, что траектория будет приближаться к большой оси эллипса.

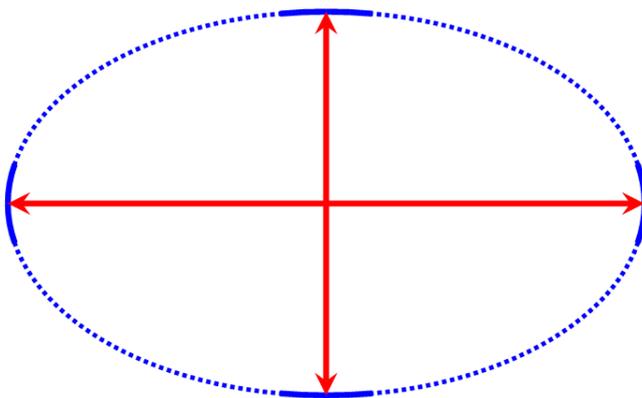


Рис. 2. Из эллипса можно вырезать два лазерных резонатора

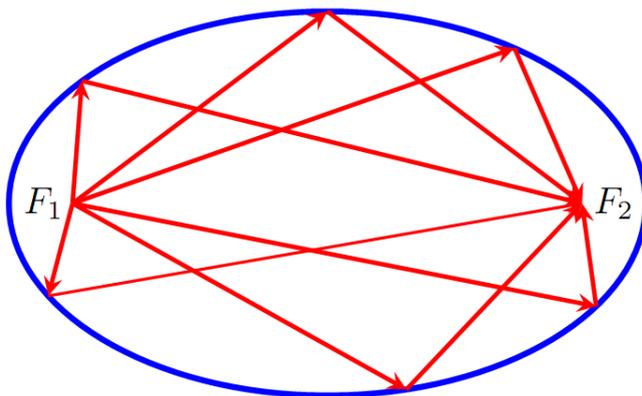


Рис. 3. Все лучи, выходящие из одного фокуса, после отражения собираются в другом

Несложно даже оценить эту скорость приближения. Обозначим две последовательные точки отражения A и B . На большой оси введем систему координат с началом в центре эллипса. Тогда концы большой оси будут иметь координаты $\pm a$, а фокусы $\pm c$. Рассмотрим два треугольника на рисунке 4, это треугольник с вершинами, обозначенными $-c, a, A$ и треугольник с вершинами $-c, -a, B$. Они почти что подобны, и в качестве коэффициента подобия можно взять отношение их горизонтальных сторон

$$k = \frac{a + c}{a - c}.$$

Эту величину и можно считать скоростью приближения траектории светового луча к большой оси — конец каждого отрезка траектории находится примерно в k раз ближе к оси, чем его начало. Для эллипса на рисунке 4 отношение $a : c = 5 : 3$, поэтому $k = 4$. Можно сказать, что для этого эллипса после каждого отражения траектория становится в 4 раза ближе к оси.

Притяжение или отталкивание?

Мы описали траекторию светового луча, проходящую через фокусы, как притягивающуюся к большой оси, но можно взглянуть на нее и с другого конца. Давайте повторим наш мысленный эксперимент и снова запустим луч из нижней вершины эллипса через правый фокус. Проследим за траекторией на протяжении большого числа отражений — луч все время будет притягиваться к большой оси. А затем в некоторый момент изменим направление светового луча на обратное. Луч пойдет по той же самой траектории, но в обратном направлении. При этом он, конечно, будет удаляться от большой оси — отталкиваться от нее. Итак, на самом деле

вблизи большой оси эллипса существуют два типа траекторий светового луча, одни лучи притягиваются к большой оси, другие отталкиваются от нее.

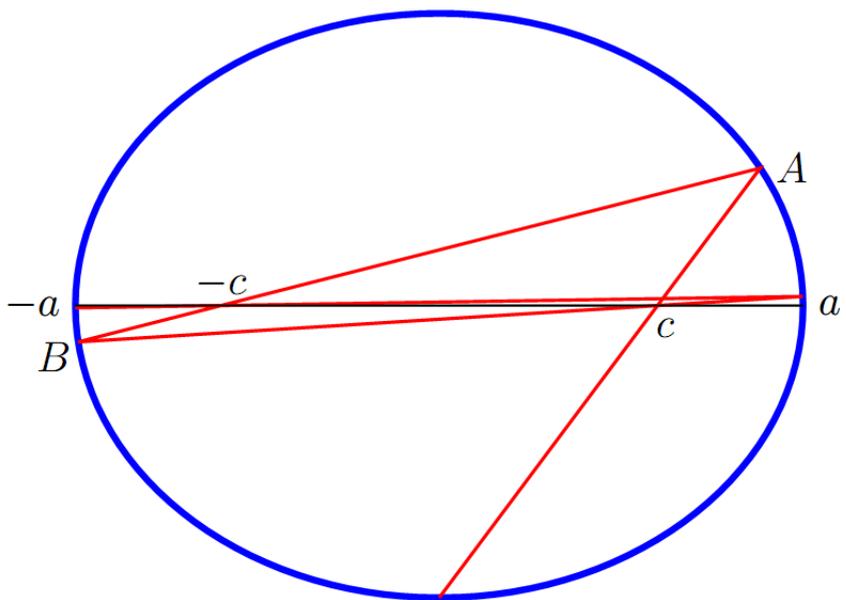


Рис. 4. С каждым отражением траектория, проходящая через фокусы, все сильнее прижимается к большой оси

Компьютерный парадокс

Конечно, мы пока не запускали реальный световой луч, и траектория, что на рис. 4, была построена на компьютере. Давайте повторим наш компьютерный эксперимент, но увеличим число отражений.

На этот раз мы взяли эллипс с осями $a = 5$ и $b = 3$. Его фокус находится на расстоянии $c = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ от центра эллипса, а скорость прижатия к оси равна $k = (5 + 4)/(5 - 4) = 9$, — каждая следующая точка отражения в 9 раз ближе к большой оси, чем предыдущая. Это подтверждается рисунком 5. Мы еще можем различить первую и вторую точки отражения, остальные практически сливаются с концами большой оси.

Продолжим следить за траекторией. Казалось бы, картина не должна меняться — траектория все сильнее и сильнее должна приближаться к оси и, поскольку на рисунке 5 она уже практически слилась с осью, ничего нового мы уже наблюдать не можем. Но тут нас ожидает сюрприз, после 17 отражений траектория оказывается отброшенной от большой оси (рис. 6).

Геометрия и построение траектории с помощью линейки говорят нам об одном, компьютерный эксперимент убеждает в обратном!

Прежде, чем попытаться разобраться с этим парадоксальным явлением, обратим внимание, что и после отклонения от оси траектория продолжает проходить через фокусы. Поэтому следует ожидать, что она снова прижмется к большой оси, а затем ее снова отбросит оттуда, и биения будут продолжаться. Рисунок 7 показывает, что так оно и есть.

Разрешение парадокса

Конечно, геометрия гарантирует нам абсолютную точность умозаключений и, конечно, компьютерные вычисления имеют ограниченную точность.

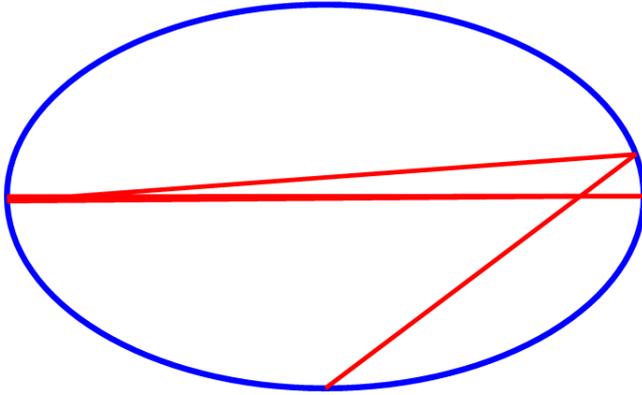


Рис. 5. После восьми отражений, луч прижат к большой оси

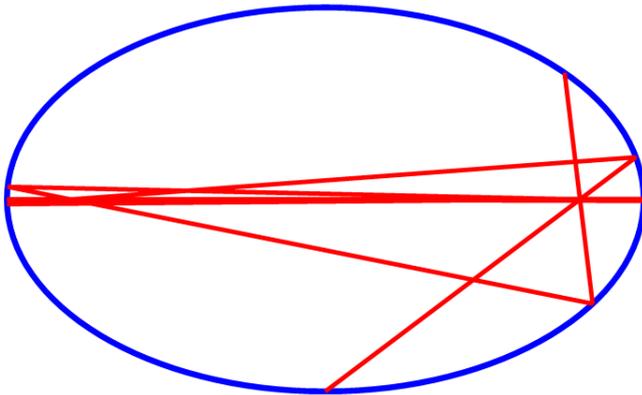


Рис. 6. После 17 отражений, траектория отброшена от большой оси

Ошибки округления имеют прямое отношение к нашей задаче. На компьютере мы можем регулировать точность вычислений, и с увеличением точности первый отход траектории от большой оси наступает позже. Но свою роль играет и геометрия эллиптического бильярда, она усиливает эти ошибки округления в геометрической прогрессии.

И все дело тут в фокусах эллипса. Именно они гарантируют наличие притягивающихся и отталкивающихся траекторий светового луча, проходящих вблизи большой оси. Мы видели, что луч, запущенный из нижней вершины эллипса и проходящий через фокусы, находится на притягивающейся траектории. При достаточном приближении к оси за счет ошибок округления, происходит “пересадка” светового луча на отталкивающуюся траекторию, его отклонении от оси возрастает в геометрической прогрессии, и он отбрасывается оттуда.

Неустойчивость траектории, идущей вдоль большой оси

Такое поведение так же характерно для любой траектории, идущей вблизи большой оси. Можно сказать, что каждая такая траектория является “смесью” отталкивающейся и притягивающейся траекторий. Отталкивающая компонента будет возрастать и, значит, в какой-то момент траекторию обязательно должно отбросить от оси.

На рис. 8 изображена траектория светового луча, выходящего из левой вершины эллипса под углом 0,001 радиана к горизонтали. Видно, что это траектория того же типа, что на рисунке 7.

Итак, периодическая траектория, идущая вдоль большой оси, неустойчива. При малейшем начальном отклонении по высоте и по углу, траектория после некоторого числа отражений обязательно сильно отклонится от оси.

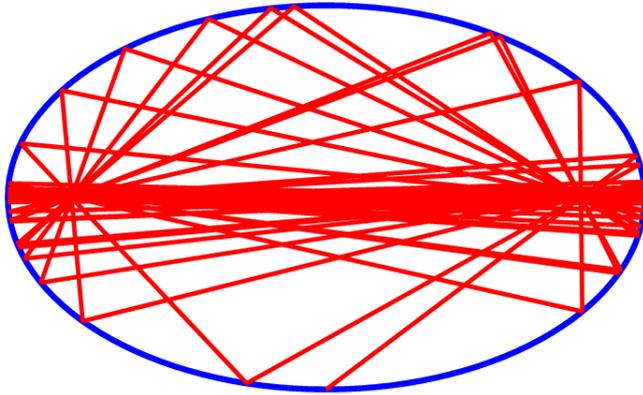


Рис. 7. После 165 отражений, биения продолжаются

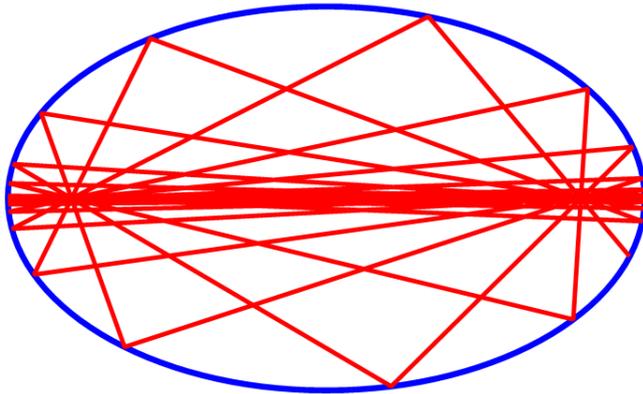


Рис. 8. Световой луч запущен из левой вершины под углом $0,001$ радиана, после 40 отражений

Устойчивость траектории, идущей вдоль малой оси

Напротив, траектория, идущая вблизи малой оси, все время остается близкой к этой оси. На рисунке 9 приведен такой пример. Световой луч был запущен из нижней вершины эллипса с отклонением от вертикали в $0,035$ радиан, траектория наблюдалась на протяжении 1000 отражений.

От эллиптического резонатора к лазерному

Подведем предварительные итоги. Световые лучи, проходящие вблизи большой оси и вблизи малой оси эллиптического резонатора, демонстрируют различное поведение. И, если из эллипса вырезать лазерный резонатор, состоящий из дуг на концах большой оси (рис. 2), то такой резонатор будет неустойчивым. Наоборот, резонатор, состоящий из дуг на концах малой оси, — устойчивый.

Неустойчивость траектории, идущей вдоль большой оси эллипса, вызвана наличием двух фокусов, лежащих на этой оси, и вытекающим отсюда наличием притягивающихся и отталкивающихся траекторий, проходящих вблизи оси.

Мы убедимся, что описанный нами механизм неустойчивости будет работать и в случае лазерного резонатора. Но сначала несколько слов о параксиальных лучах и о том, как они отражаются от сферического зеркала.

Формула сферического зеркала

В геометрической оптике есть еще один полезный принцип, который звучит следующим образом:

все значительно упрощается, если иметь дело с параксиальными лучами.

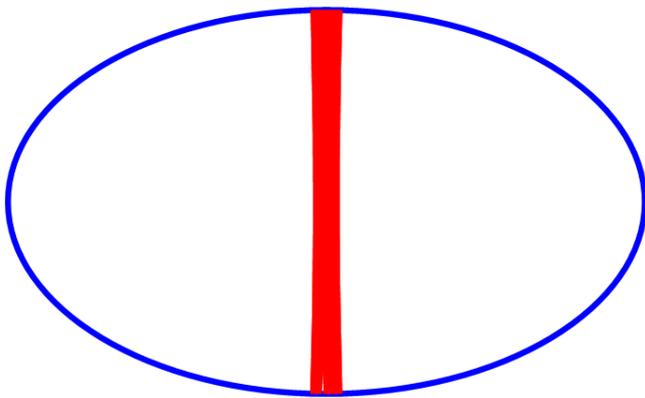


Рис. 9. Траектория, идущая вблизи малой оси, после 1000 отражений

В применении к сферическому зеркалу или к лазерному резонатору параксиальными называются лучи, проходящие вблизи оси зеркала или резонатора.

В качестве примера рассмотрим сферическое зеркало. Широкий пучок световых лучей, выходящих из точки, лежащей на оси сферического зеркала, после отражения не будет сходиться в одной точке. Мы это подробно обсудили в уже упомянутых “Каустиках на плоскости и в пространстве”.

По-другому обстоит с параксиальными пучками. Пучок параксиальных лучей, выходящих из одной точки, после отражения от сферического зеркала сходится в другой точке. Эти точки называются сопряженными — каждая из них служит изображением другой при отражении в сферическом зеркале.

В этом смысле фокусы эллипса сопряжены одновременно и относительно левой дуги на конце большой оси эллипса и относительно и относительно правой (рис. 2). На малой оси сопряженных точек нет.

Обозначим радиус сферического зеркала R и расстояния от сопряженных точек до вершины сферического зеркала ℓ_1 и ℓ_2 . Из школьного курса физики, известна формула сферического зеркала, которая связывает эти три величины

$$\frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_2} = \frac{2}{R}.$$

Сейчас мы используем эту формулу для вывода критерия устойчивости лазерного резонатора.

Сопряженные точки в резонаторе

Предположим, что на оси лазерного резонатора имеются две точки, сопряженные одновременно и относительно левого и относительно правого зеркала (рис. 12). Возьмем карандаш и линейку, отметим начальную точку где-то вблизи оси между сопряженными точками x_1 и x_2 , например, в том месте, где на рисунке 12 стоит буква L .

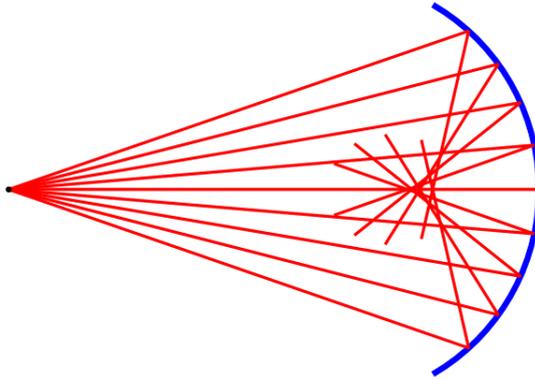


Рис. 10. Широкий пучок после отражения от сферического зеркала перестает быть сходящимся

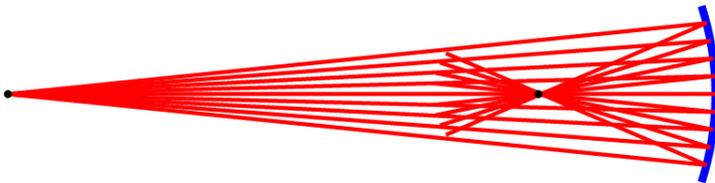


Рис. 11. Параксиальный пучок, выходящий из одной точки, после отражения сходится в другой (сопряженной) точке

Из этой точки запустим световой луч через x_2 . После отражения от правого зеркала он пройдет через x_1 , отразится от левого зеркала, пройдет через x_2 и т. д. Его траектория будет притягиваться к оси резонатора. Если обратить направление этой траектории, то она превратится в отталкивающуюся.

Опять вблизи оси есть притягивающаяся траектория, и есть отталкивающаяся. Каждая траектория, проходящая вблизи оси, является “смесью” притягивающейся и отталкивающейся. Отклонение от оси отталкивающейся компонента растет и после нескольких отражений траектория выбрасывается из пространства между зеркалами — резонатор неустойчив.

Вы видите, что эти рассуждения ничем не отличаются от тех, что мы провели раньше для эллипса.

Итак, вопрос об устойчивости лазерного резонатора, сводится к вопросу о существовании двух точек, сопряженных одновременно относительно левого и правого зеркал. Если такие точки существуют, резонатор неустойчивый, если их нет — устойчивый.

Вывод критерия устойчивости

В качестве нулевой точки на оси резонатора выберем вершину левого зеркала. Тогда координата вершины правого зеркала будет L , а координаты сопряженных точек так и обозначим x_1 и x_2 (рис. 12). Запишем формулу сферического зеркала для сопряженных точек x_1 и x_2 для левого и для правого зеркал

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{R_1} \\ \frac{1}{L - x_1} + \frac{1}{L - x_2} = \frac{2}{R_2} \end{cases}$$

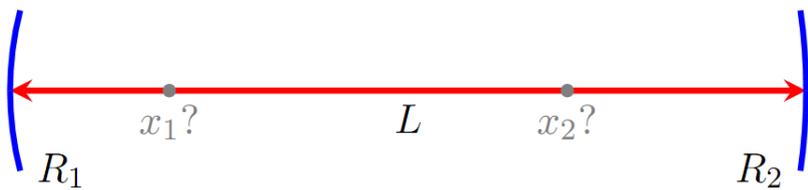


Рис. 12. Существуют ли сопряженные точки?

Все зависит от решений этой системы, если решения существуют, то имеются сопряженные точки и резонатор неустойчив, если не существуют — устойчив. После несложных преобразований она приводится к виду

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2L(R_2 - L)}{R_1 + R_2 - 2L} \\ x_1 x_2 = \frac{LR_1(R_2 - L)}{R_1 + R_2 - 2L} \end{cases}$$

Теперь понятно, почему эта система может иметь решения, а может и нет. По теореме Виета ее решения являются корнями квадратного уравнения с коэффициентами, составленными из правых частей системы. Но соответствующее квадратное уравнение может и не иметь корней, все зависит от знака дискриминанта $D = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$. Если он положителен, корни есть, если отрицателен, корней нет. Итак, если $D < 0$, резонатор устойчив, в противном случае резонатор неустойчив.

Подставляя вместо $x_1 + x_2$ и $x_1 x_2$ правые части уравнений системы и раскладывая на множители, получим

$$D = \frac{4L(L - R_1)(L - R_2)(L - R_1 - R_2)}{(2L - R_1 - R_2)^2}.$$

После отбрасывания заведомо положительных сомножителей критерий приобретает окончательный вид

$$\begin{aligned} (L - R_1)(L - R_2)(L - R_1 - R_2) < 0 & - \text{резонатор устойчив,} \\ (L - R_1)(L - R_2)(L - R_1 - R_2) \geq 0 & - \text{резонатор неустойчив.} \end{aligned}$$

Зафиксируем радиусы зеркал $R_1 < R_2$ и будем считать расстояние L переменным. Расставив на оси L знаки выражения $(L - R_1)(L - R_2)(L - R_1 - R_2)$, мы получаем следующую диаграмму (рис. 13). Она же подсказывает и идею следующего эксперимента.

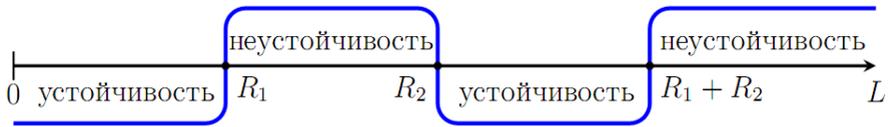


Рис. 13. Диаграмма устойчивости лазерного резонатора

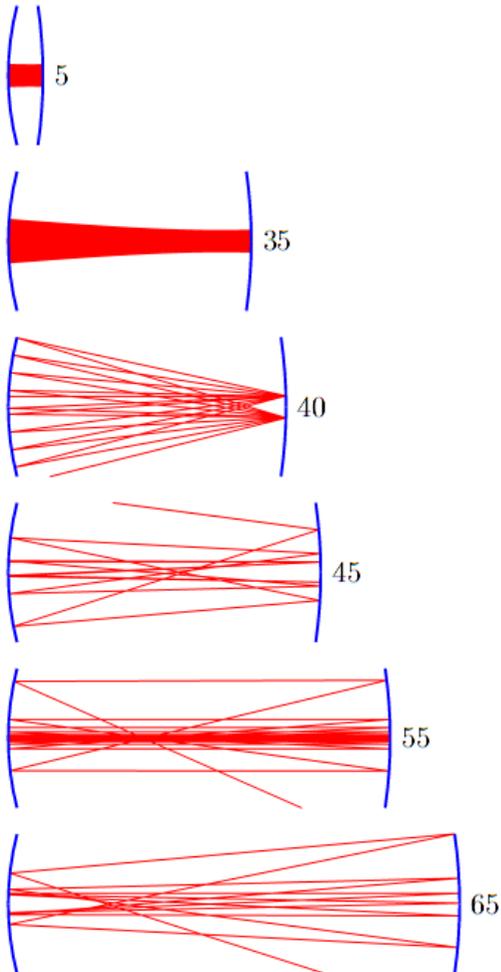


Рис. 14. Компьютерный эксперимент $5 \leq L \leq 65$

Компьютерный эксперимент

Положим $R_1 = 40$, $R_2 = 70$. Расстояние между зеркалами будем менять, начиная от $L = 5$, до $L = 115$. Световой луч будет стартовать с левого зеркала на высоте $h = 1,5$ от оси в горизонтальном направлении. Будем следить за лучом до тех пор, пока он не отклонится от оси резонатора на расстояние $h = 10$ (для неустойчивого резонатора) или пока не произойдет 1000 отражений (для устойчивого).

Результат показан на рисунке 14-14'. Поведение светового луча полностью соответствует полученному критерию устойчивости. Как и предсказывает критерий, имеются две зоны устойчивости $L \in (0, 40)$ и $L \in (70, 110)$ и две зоны неустойчивости $L \in [40, 70]$ и $L \in [110, \infty]$.

Наша цель достигнута — получен критерий устойчивости лазерного резонатора, и мы проверили его с помощью компьютера. Конечно, хотелось бы подтвердить эти результаты еще и с помощью простого физического эксперимента. И такой эксперимент имеется.

Гравитационный бильярд

На этот раз в качестве одного из зеркал мы используем резиновую пленку от воздушного шарика, в качестве другого — гравитацию, а световой луч заменим металлическим шариком.

На стеклянную банку натянем кусок резиновой пленки. Перед тем, как герметично закрепить пленку, нажмем на нее и выпустим из банки немного воздуха, чтобы под действием атмосферного давления пленка прогнулась внутрь (рис.15).

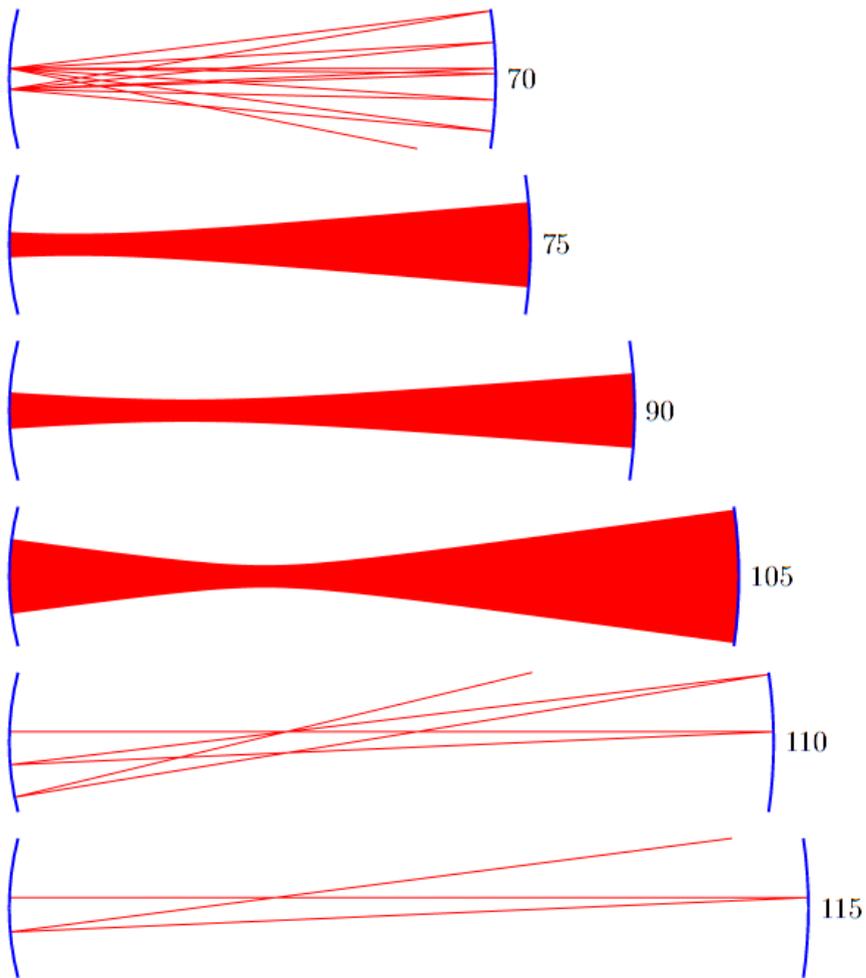


Рис. 14'. Компьютерный эксперимент $70 \leq L \leq 115$

Если на такую пленку с малой высоты точно по центру отпустить небольшой металлический шарик (рис. 16), то он будет многократно отражаться от центра пленки, и эти отражения будут продолжаться достаточно долго. Если же начальная высота превышает некоторое критическое значение, то, как бы точно мы не намечались по центру пленки, все равно, после нескольких соударений шарик будет выброшен за пределы пленки.

Это — то же самое явление неустойчивости, которое мы наблюдали в лазерном резонаторе, и чтобы лучше разобраться с ним, мы сделаем обратный переход от физического эксперимента к компьютерному. Дополнительно заменим сферическую пленку на параболическую. Это облегчит вычисления и улучшит понимание.

Параболический гравитационный бильярд

Итак, заменим сферическую поверхность резиновой пленки на идеальную отражающую параболическую пленку. Идеальную — значит такую, что при соударениях с ней шарика не происходит потери энергии и угол падения равен углу отражения. Для начала мы будем работать с отражающей параболой, заданной уравнением $y = x^2$.

Компьютерный эксперимент показывает (рис. 17), что в этом случае критическая начальная высота $h_{\text{крит}}$, разделяющая устойчивые и неустойчивые траектории составляет 0,25. Но на высоте 0,25 как раз расположен оптический фокус параболы $y = x^2$ — пучок световых лучей, идущий параллельно вертикальной оси этой параболы после отражения от нее собирается в этом фокусе.

Точно так же и для любой параболы $y = ax^2$ критическая высота, разделяющая устойчивые и неустойчивые осевые траектории, будет $h_{\text{крит}} = 1/4a$, что совпадает с высотой оптического фокуса такой параболы.



Рис. 15. Из-за разности давлений пленка принимает сферическую форму



Рис. 16. Шарик падает точно по центру пленки; если начальная высота мала, то он движется вдоль оси ➡, если же начальная высота большая, то после нескольких отражений он вылетает за пределы пленки ➡

У сферического зеркала фокус расположен на расстоянии половины радиуса от вершины, именно там собираются параксиальные лучи, параллельные оси зеркала, после отражения. Так что наш компьютерный эксперимент говорит, что, по-видимому, для сферической отражающей пленки радиуса R критическая высота, отделяющая устойчивые траектории от неустойчивых, будет $h_{\text{крит}} = R/2$.

Механизм неустойчивости гравитационного бильярда

Запустим шарик так, что-бы он пролетел через фокус параболического бильярда (рис. 18). Тогда видно, что после каждого отражения он тоже проходит через фокус. И, если он пролетел через фокус по нисходящей ветви параболы, как на рисунке 18 слева, то его траектория сначала будет прижиматься к оси параболы.

Но, как показано на рисунке 18 справа, в некоторый момент траектория шарика начинает отталкиваться от оси и его выбрасывает за пределы пленки.

По-видимому, мы столкнулись с тем же самым механизмом неустойчивости, который наблюдался нами в случае эллиптического резонатора и в случае лазерного резонатора. А именно, рассмотрим вертикальную периодическую траекторию шарика, начинающуюся выше фокуса отражающей поверхности. Вблизи этой осевой траектории существуют и траектории, притягивающиеся к ней, и траектории, отталкивающиеся от нее. За счет "ошибок округления" движущийся вдоль оси шарик обязательно "пересаживается" на отталкивающуюся траекторию и его выбрасывает за пределы пленки.

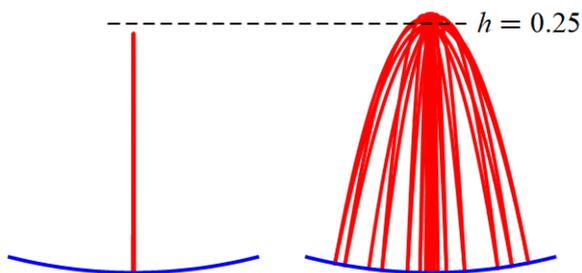


Рис. 17. Шарик отпускается с высоты h_0 с отклонением от оси 0,0001, слева $h_0 = 0,24$ – после 500 соударений, справа $h_0 = 0,26$ – после 20 соударений

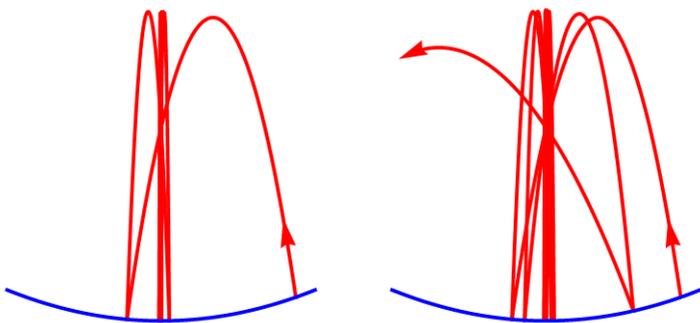


Рис. 18. Шарик все время проходит через фокус параболы и на начальном этапе траектории прижимается к ее оси, затем шарик начинает отталкиваться от оси и его выбрасывает за пределы пленки

Механическая модель лазерного резонатора

Если бы нам удалось выключить гравитацию и оказаться в условиях невесомости, то две расположенные друг против друга банки с движущимся между ними шариком могли бы послужить отличной механической моделью лазерного резонатора.

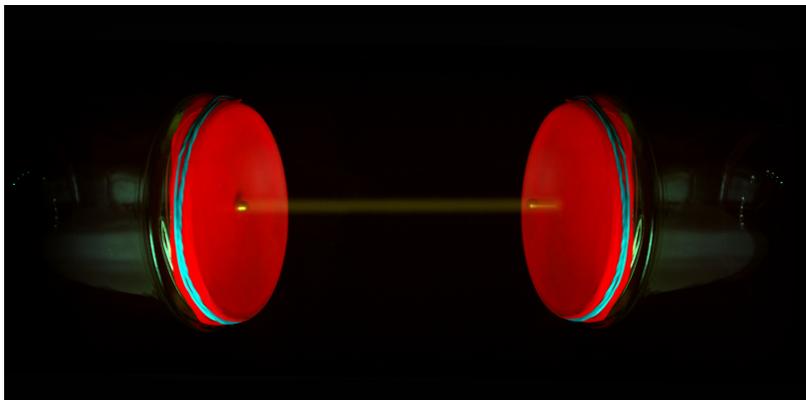


Рис. 20. Механическая модель лазерного резонатора

И с помощью этой конструкции можно было бы провести простой физический эксперимент по проверке выведенного нами критерия устойчивости лазерного резонатора.

Что еще стоит почитать на эту тему

- В 1960 году Теодор Мейман создал первый лазер. В 2000 году он написал автобиографическую книгу “Лазерная одиссея” о том, как он это сделал. В 2010 году к пятидесятилетию создания лазера она была переведена на русский язык. Это увлекательная книга, ее стоит прочесть. Чуть позже мы приведем пару цитат оттуда, а также два рисунка из патента Меймана — US Patent 3,353,115.
- В книге А.Г. Дорфмана “Оптика конических сечений”, Популярные лекции по математике, вып. 31, 1959 г. расска-

зано об оптических свойствах эллипса, гиперболы и параболы.

- Также рекомендуем книгу Г.А. Гальперина и А.Н. Землякова “Математические бильярды”, 1990 г., Библиотечка “Квант”, выпуск 77.
- Книга С.Л. Табачникова и Д.Б. Фукса “Математический дивертисмент” 2011 г. основана на статьях, публиковавшихся авторами в “Кванте” в период с 1970 по 1990 год, и на многочисленных популярных лекциях, прочитанных ими в СССР и в США. Одна из лекций в этой книге называется “Бильярды в эллипсах и геодезические на эллипсоидах”.
- Примерно о том же говорится в книге С. Табачникова “Геометрия и бильярды”, в главе “Бильярды внутри конических сечений и квадратичных поверхностей”, 2011 г.

Дополнительные вопросы и задачи

1. Оптическое определение эллипса приводит еще к одному парадоксу. Пусть M произвольная точка, лежащая на эллипсе. По определению эллипса световой луч F_1M , выходящий из одного фокуса, после отражения в M должен попасть в другой фокус F_2 . Измерим длину всех двузвенных ломаных F_1MF_2 (рис. 3). Тогда, во-первых, по принципу Ферма световой луч должен пойти только по кратчайшей из них и ни по каким другим. И выходит, что вроде бы кривых, удовлетворяющих оптическому определению эллипса, не должно существовать. Но, во-вторых, все наши компьютерные рисунки, начиная с 3 и по 7, на которых углы падения в точности равны углам отражения и траектории проходят через фокусы, подтверждают, что эллипсы все-таки существуют. Попробуйте разрешить это явное противоречие.

2. В своей книге Мейман рассказывает, как он хотел использовать оптическое свойство эллипса для накачки лазера.

Цитируем:

Я сделал чертеж устройства с лампой АНБ, расположенной в фокусе эллиптического цилиндра. Маленький рубиновый стержень должен был помещаться в другом фокусе эллиптического цилиндра.

Что такое эллиптический цилиндр? Представьте себе полую круглую трубку. Если трубку сплющить немного, то ее поперечное сечение примет форму овала (близкую к эллипсу). Теперь вместо одного центра кривизны, который был у круглого сечения, эллиптическое сечение имеет два центра кривизны, находящиеся на некотором расстоянии друг от друга. Они называются фокусами эллипса.

Эллиптический рефлектор обладает тем свойством, что точечный источник света, помещенный в одном фокусе эллипса, отображается в другом фокусе. Я собирался использовать эллиптический цилиндр с тщательно отполированной зеркальной внутренней поверхностью.

В этой конструкции все излучение цилиндрической лампы после отражения от эллиптической оболочки должно было концентрироваться на рубиновом стержне (рис. 21). Правда, позже Мейман отказался от этой идеи и заменил цилиндрическую лампу на спиральную лампу-вспышку, которая обвивалась вокруг рубинового стержня (рис. 22).

3. В качестве лазерного резонатора Мейман использовал сам рубиновый стержень. Вот еще одна цитата.

Я использовал небольшой кристалл розового рубина в форме цилиндрического стержня диаметром $3/8$ дюйма и длиной $3/4$ дюйма, который можно было вставить внутрь спирали лампы. Плоские торцы рубинового цилиндра были отполированы, параллельны друг другу и перпендикулярны оси цилиндра.

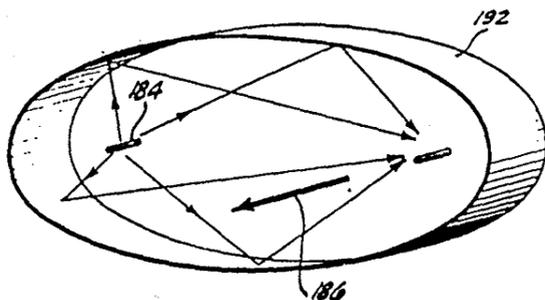


Рис. 21. Мейман, U.S. Patent 3,353,115: 184 — цилиндрическая лампа, 192 — эллиптический отражатель, 186 — лазерный луч, выходящий из рубинового стержня

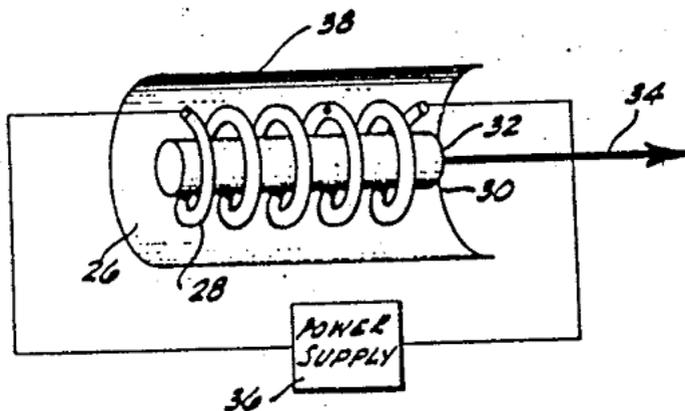


Рис. 22. Оттуда же: 34 — лазерный луч, выходящий из рубинового стержня с посеребренными торцами

Зеркала на торцах приготавливались напылением серебра. В серебряном покрытии на одном из торцов я процарапал крошечное отверстие, через которое должен был выходить лазерный луч.

Итак, Мейман использовал резонатор с плоскими зеркалами. Является ли такой резонатор устойчивым? Нарисуйте траекторию светового луча в этом резонаторе.

4. Исследуйте поведение светового луча внутри резонатора, ограниченного окружностью.

5. Докажите, что в лазерном резонаторе с сопряженными точками x_1 и x_2 , изображенном на рис. 12, притягивающаяся траектория параксиального светового луча приближается к оси резонатора со скоростью

$$k = \frac{L - x_1}{x_1} \cdot \frac{x_2}{L - x_2}.$$

Здесь это означает, что каждая последующая точка отражения на одном и том же зеркале оказывается в k раз ближе к оси, чем предыдущая. Коэффициент k можно записать в виде

$$k = \frac{L - x_1}{L - x_2} \cdot \frac{0 - x_1}{0 - x_2},$$

Правая часть этой формулы называется двойным отношением точек $0, x_1, x_2, L$. Двойное отношение четырех точек — это одно из важнейших понятий в проективной геометрии.

6. Используя формулу зеркала $1/\ell_1 + 1/\ell_2 = 2/R$, докажите, что фокус сферического зеркала — точка, где сходятся после отражения параксиальные лучи, параллельные оси зеркала, расположен на расстоянии $R/2$ от его вершины. Указание: положите $\ell_1 = \infty$.

7. С помощью рис. 14 попытаемся разобраться, как расположены сопряженные точки неустойчивых лазерных резонаторов с $L \in [40, 70]$.

а) Пусть расстояние между зеркалами, равно радиусу одного из них, т. е. $L = 40$ или $L = 70$. В обоих этих случаях на

рис. 14 отчетливо видны две сопряженные точки, расположенные на одном из зеркал. Они симметричны относительно оси резонатора. Где находятся сопряженные друг относительно друга точки, лежащие на самой оси резонатора?

b) Теперь выделим фрагменты с $L = 45$ и с $L = 65$. Отчетливо видна одна из сопряженных точек на оси, где находится другая?

c) Рассмотрим случай $L = (R_1 + R_2)/2 = 55$. Такой резонатор называется софокусным, потому что в этом случае фокусы зеркал совпадают. Этот резонатор нас интересует особо, потому что в этом случае знаменатель дискриминанта

$$D = \frac{4L(L - R_1)(L - R_2)(L - R_1 - R_2)}{(2L - R_1 - R_2)^2}.$$

возникающего при нахождении сопряженных точек, равен 0. На рисунке видно, что одна из сопряженных точек как раз находится в общем фокусе зеркал. Где другая?

8. Эта задача для тех, кто собирается проводить компьютерные эксперименты по построению траекторий светового луча в эллиптическом резонаторе. Для построения такой траектории нужно последовательно вычислять и координаты n -й точки отражения (x_n, y_n) , и координаты вектора скорости (u_n, v_n) после этого отражения (считаем, что длина этого вектора постоянна, а при отражении меняется только направление). Убедитесь, что для построенной вами траектории светового луча в эллиптическом резонаторе величина

$$\frac{u_n x_n}{a^2} + \frac{v_n y_n}{b^2}$$

не зависит от номера отражения n . Такие сохраняющиеся величины называются интегралами соответствующего резонатора или бильярда.

9. А эта задача для тех, кто будет строить с помощью компьютера траектории шарика, движущегося в параболическом

гравитационном бильярде, ограниченном параболой $y = ax$. Пусть опять (x_n, y_n) — координаты очередной точки отражения, и (u_n, v_n) — координаты вектора скорости шарика после этого отражения. Проверьте, что вдоль траектории шарика сохраняется величина

$$\frac{u_n^2}{2} + \frac{v_n^2}{2} + gy_n.$$

Это просто-напросто закон сохранения энергии (и здесь g — это ускорение свободного падения). А также сохраняется еще одна величина

$$2au_nx_n - v_n.$$

Таким образом, у параболического гравитационного бильярда имеются два интеграла.