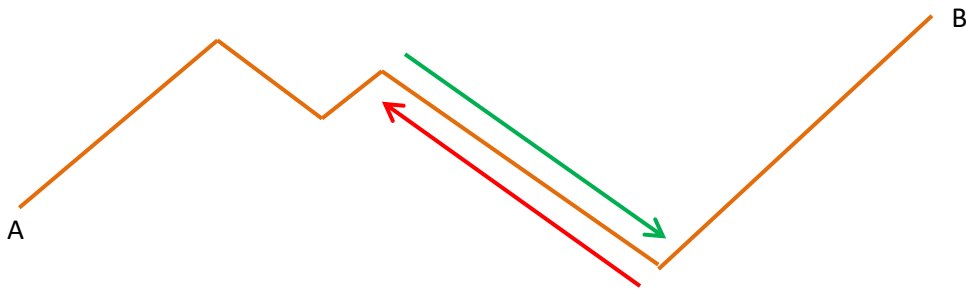


## 1. “Средняя скорость”

Дорога между двумя горными сёлами А и В идёт то в гору, то под гору. Старый автобус, который развивает среднюю скорость 30 км/ч в гору и 60 км/ч под гору, проехал из А в В и обратно. Какова была его средняя скорость на всём пути?

**Решение.**

Кажется, что достаточно взять среднее арифметическое двух чисел  $(30+60)/2 = 45$  км/ч, однако это неверно! Давайте посчитаем. Пусть  $S$  км — расстояние между сёлами А и В по горной дороге. Тогда, если в пути от А до В автобус ехал по какому-то участку дороги под гору, то на обратном пути автобус проехал тот же участок в гору (см. рисунок), и наоборот.



Значит, на всем пути от А до В и обратно автобус ехал ровно  $S$  км в гору и  $S$  км под гору. Затраченное время на путь в гору равно  $(S/30)$  часов, а на путь под гору  $(S/60)$  часов. Тогда средняя скорость на всем пути равна

$(\text{весь путь}) / (\text{все затраченное время}) = 2S / (S/30 + S/60) = 2 / (1/30 + 1/60) = 40$  км/ч.

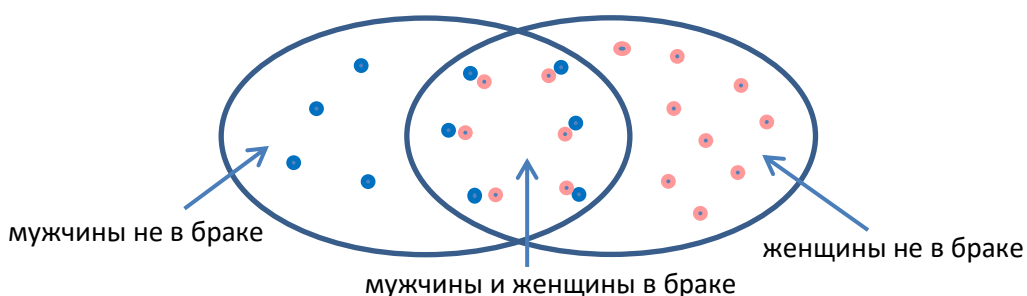
**Комментарий:** это так называемое среднее гармоническое двух чисел 30 и 60. Среднее гармоническое двух различных положительных чисел всегда меньше их среднего арифметического. Попробуйте доказать это самостоятельно.

## 2. “На острове”

40% взрослых мужчин и 60% взрослых женщин на острове не состоят в браке. Какая часть взрослого населения острова не состоит в браке (многожёнство и однополые браки на острове запрещены)?

**Решение.**

Пусть на острове живёт  $x$  взрослых мужчин и  $y$  взрослых женщин. Из условия следует, что  $0.6x$  взрослых мужчин и  $0.4y$  взрослых женщин состоят в браке. Но эти числа должны быть равны (мужчины и женщины в браке образуют пары), т.е.  $0.6x = 0.4y \Rightarrow y = 1.5x$ . Доля взрослого населения, которая не состоит в браке, равна  $(0.4x + 0.6y) / (x+y) = (0.4x + 0.9x) / 2.5x = 1.3 / 2.5 = 0.52$  или 52%.



### 3. “Встреча”

Два брата Вася и Петя шли навстречу друг другу со скоростью 5 км/ч каждый. Когда расстояние между братьями стало 1 км, Шарик, который сопровождал Васю, заметил Петю и бросился ему навстречу со скоростью 20 км/ч. Поравнявшись с Петей, Шарик развернулся и побежал навстречу Васе и так до тех пор, пока братья не встретились. Какое расстояние пробежал Шарик?

#### Решение.

На рисунке схематично изображена траектория движения Шарика.



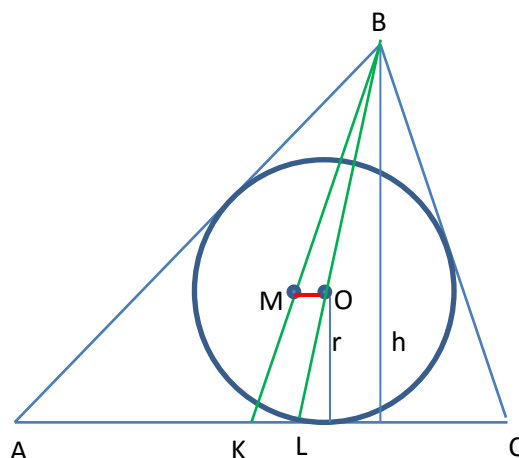
Нужно найти сумму длин всё уменьшающихся отрезков на рисунке (сумму ряда). Однако, всё гораздо проще! 1 км до встречи братья преодолели за  $1/10$  часа. Всё это время Шарик находился в движении. Значит, Шарик пробежал  $20 \text{ км/ч} \cdot (1/10 \text{ ч}) = 2 \text{ км}$ .

### 4. “Почти правильный треугольник”

Стороны треугольника равны 2016, 2017 и 2018. Чему равно расстояние между точкой пересечения медиан и центром вписанной окружности этого треугольника?

#### Решение.

Рассмотрим какой-либо треугольник, длины сторон которого образуют арифметическую прогрессию и равны  $a-d$ ,  $a$ ,  $a+d$ . Пусть  $M$  - точка пересечения медиан,  $O$  - центр вписанной окружности этого треугольника (см. рисунок). Проведем к средней стороне  $AC=a$  медиану  $BK$  и биссектрису  $BL$  (зелёные отрезки на рисунке справа). Посчитаем площадь треугольника  $ABC$  двумя способами  $S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot a = \frac{1}{2} \cdot r \cdot ((a-d)+a+(a+d))$ . Отсюда,  $r = h/3$ . Кроме того, поскольку  $M$  точка пересечения медиан, то  $KM:KB = 1:3$ . Значит,  $OM$  (красный отрезок на рисунке) параллелен  $AC$  и  $OM = \frac{2}{3} \cdot KL$ .



Пусть  $AL = x$ . Так как  $BL$  биссектриса, то  $AL:LC = AB:BC = (a+d)/(a-d)$ . Отсюда,  $x \cdot (a-d) = (a-x) \cdot (a+d) \rightarrow x = (a+d)/2 \rightarrow KL = AL - AK = d/2 \rightarrow OM = \frac{2}{3} \cdot KL = d/3$ . В нашем случае  $d = 1$ , то есть искомое расстояние равно  $1/3$ .

**Комментарий:** если предположить, что искомое расстояние зависит только от  $d$  (и не зависит от  $a$ ), то можно было быстро получить правильный ответ, нарисовав прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4, 5 на клетчатой бумаге. Проверьте!