1. “Рыцари и лжецы”

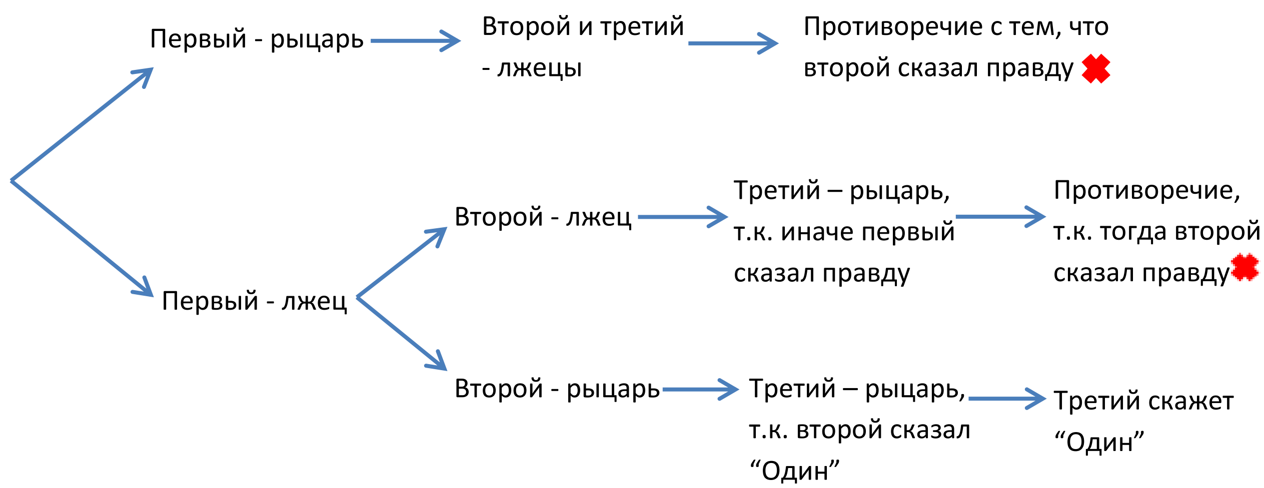
На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путник встретил троих жителей острова и спросил каждого из них: «Сколько рыцарей среди твоих спутников?» Первый ответил: «Ни одного». Второй сказал: «Один». Что сказал третий?

Решение.

Могут ли слова первого быть правдой? Предположим, что это так. Тогда второй и третий – лжецы. Но в этом случае второй сказал правду, ведь среди его спутников ровно один рыцарь (первый житель острова). Получаем противоречие с тем, что второй - лжец. Поэтому первый житель является лжецом. При этом среди двух других жителей есть хотя бы один рыцарь.

Предположим теперь, что второй также является лжецом. Тогда третий, как мы знаем, должен быть рыцарем. Но в этом случае второй сказал правду (среди его спутников ровно один рыцарь). Получаем противоречие с тем, что второй - лжец. Поэтому второй житель является рыцарем и он сказал правду, т.е. третий также является рыцарем и он скажет “Один”.

Наши рассуждения удобно изобразить с помощью схемы:



2. “Грейпфрут”

Петя купил грейпфрут диаметра 10 см, толщина корки которого 1 см. Какая часть грейпфрута съедобна, если корка съедобной не является?

Решение.

Ясно, что объём грейпфрута это объём шара радиуса 5 см, тогда как объём его съедобной части это объём шара радиуса 4 см. Для решения задачи совсем не обязательно знать формулу объёма шара.

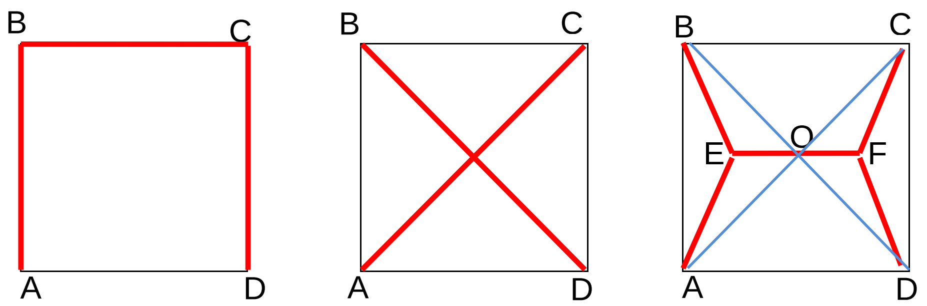
Достаточно понимать, что отношение объёмов двух подобных фигур в пространстве равно k^3, где k – коэффициент подобия этих фигур (отношение длин соответствующих линейных элементов этих фигур). Например, в случае подобных пирамид на рисунке, k равно отношению длин оснований этих пирамид. В нашем же случае k равно отношению радиусов шаров 4/5 и поэтому доля съедобной части составляет $(4/5)^3$ = 64/125 ≈ 0.5. Итак, лишь примерно половина такого грейпфрута съедобна, что на первый взгляд кажется удивительным.

3. “4 города”

4 крупных города страны Абдулия расположены в пустыне в вершинах квадрата со стороной 100 км. Король Абдул хочет соединить их системой дорог так, чтобы из любого города можно было добраться в любой другой по дороге. Стоимость строительства одного км дороги равна 1 млн. динаров. Чему равны наименьшие затраты на строительство такой системы дорог?

Решение.

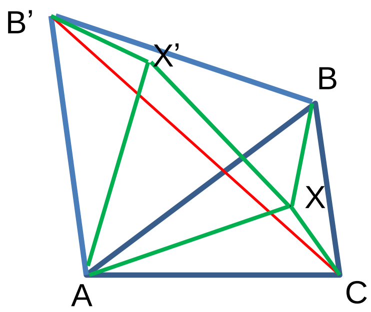
Пусть A, B, C и D – города, расположенные в вершинах квадрата ABCD со стороной 100 км. Их можно соединить, например, буквой “П”: дорога идет от A до B, затем от B до C, и затем от C до D. Общая длина такой системы 300 км. Её можно улучшить, соединив города по диагоналям квадрата (при этом образуется один перекресток). Общая длина такой системы 200√2 ≈ 283 км. Интуитивно кажется, что такая система является оптимальной, но это не так!



Покажем, как её можно улучшить. Пусть O – центр квадрата. В треугольнике AOB возьмем точку E, из которой его стороны видны под углом 120º. В треугольнике COD возьмем точку F, из которой его стороны видны под углом 120º. Теперь соединим E с A, B и F, а F с C и D (см. рисунок). Легко посчитать общую длину такой системы: 4*(100/√3) + (100 – 100/√3) = 100*(√3+1) = 273.2 км, т.е. экономим почти 10 млн. динаров!

Примечание: Здесь мы не приводим строгого доказательства оптимальности такой системы. Оно основано на замечательной задаче о точке Торричелли: внутри остроугольного треугольника ABC найдите точку X, для которой сумма расстояний до вершин треугольника будет минимальной. Ответом будет точка X, из которой стороны треугольника видны под углом 120º. Красивое доказательство этого факта можно получить с помощью рисунка ниже.

Пусть B’ и X’ образы точек B и X соответственно при повороте на 60º вокруг точки A. Тогда AX + BX + CX = CX + XX’ + X’B’ ≥ CB’ (ломаная длиннее отрезка, соединяющего ее концы), причем равенство достигается лишь в случае, когда X и X’ лежат на прямой CB’, но тогда углы AXB, BXC и CXA равны 120º.



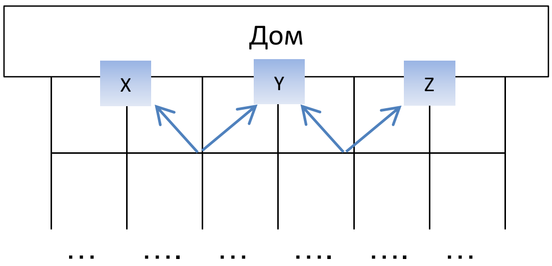
4. “Про ковбоя Джо”

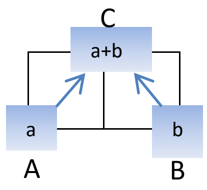
Ковбой Джо выходит из бара на середину дороги шириной 3 метра, которая ведёт прямо к его дому, расположенному в 20 метрах от бара. С каждым шагом пьяный Джо продвигается вперёд на полметра и на полметра отклоняется вправо или влево случайным образом (с вероятностью ½ вправо и с вероятностью ½ влево). Если Джо оказывается на краю дороги, то он падает в канаву и остается там спать до утра. Каковы шансы, что Джо не свалится в канаву и дойдёт до дома?

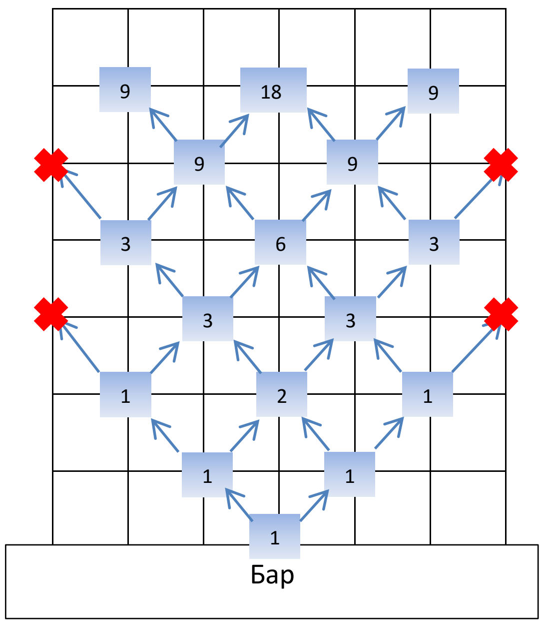
Решение.

Изобразим блуждания нашего Джо на рисунке.

Для этого разделим дорогу на квадраты размером 0.5 м * 0.5 м и в каждой точке, где может оказаться Джо, поставим число различных способов (путей) оказаться в этой точке. При этом если в узлы A и B Джо может попасть a и b способами, то в узел C (рисунок ниже) он может попасть a+b способами.







Поэтому вырисовывается такая картинка (правый рисунок). Здесь красные крестики соответствуют положениям, из которых Джо падает в канаву. Легко понять (и доказать по индукции), что если до дома n метров (2n шагов), то количество различных путей до дома (способов оказаться в точках X, Y или Z на рисунке) равно $4*3^{n-1}$

С другой стороны, если предположить что канава отсутствует, существует всего 2^{2n} различных путей, так как с каждым шагом Джо отклоняется либо вправо, либо влево (2 варианта) и всего Джо делает 2n шагов. Поэтому вероятность, что Джо дойдет в нашем случае (n=20) равна $4*3^{19} / 2^{40} = (3/4)^{19} \approx 0.0042$ или примерно 0.4%.