№ 6 | июнь 2025
Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№6
ИЮНЬ 2025

МАЯТНИКОВАЯ ДВЕРЬ

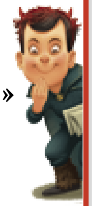
КАК СДЕЛАТЬ ИГРУ «ДОББЛЬ»

ДОДО В ЖИЗНИ И ИСКУССТВЕ

Enter

e-mail: kvantik@mccme.ru

ДОРОГИЕ ДРУЗЬЯ!



Вышла в свет четвёртая книга из серии «Библиотечка журнала “Квантик”»

УПРЯМОУГОЛЬНИК. ГОЛОВОЛОМКИ ДЛЯ ВСЕЙ СЕМЬИ.

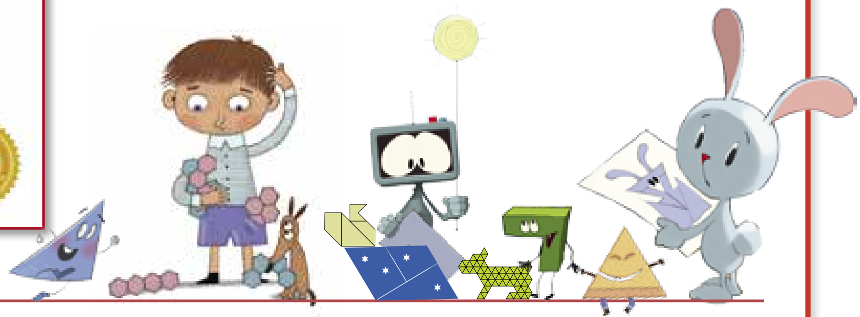
Автор – Владимир Иванович Красноухов,
знаменитый изобретатель логических игр и головоломок.

В сборник вошли его статьи из рубрики «Игры и головоломки» журнала «Квантик», опубликованные с 2013 по 2024 годы.

Познавательные и занимательные головоломки понравятся детям и взрослым, позволят весело провести досуг в семье и дополнят внеклассные занятия в школе.

Эта книга для всех, кто ценит необычные задачи и юмор, стремится развивать пространственное мышление и творческие способности.

ISBN 978-5-4439-1925-6
издательство МЦНМО, 2025 год



Купить новую книгу, а также другие издания «Квантика» можно в магазине «Математическая книга» по адресу: г. Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, сайт: **biblio.mccme.ru**, а также в интернет-магазинах **ozon.ru, market.yandex.ru**, **wildberries.ru**, **my-shop.ru** и других.

НАГРАДЫ ЖУРНАЛА

2017 — Минобрнауки России **ПРЕМИЯ «ЗА ВЕРНОСТЬ НАУКЕ»** за лучший детский проект о науке

2021 — **БЕЛЯЕВСКАЯ ПРЕМИЯ** за плодотворную работу и просветительскую деятельность

2022 — Российская академия наук **ПРЕМИЯ ХУДОЖНИКАМ ЖУРНАЛА** за лучшие работы в области популяризации науки

2024 — Победитель конкурса в номинациях **ЛУЧШИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ СРЕДНЕГО ШКОЛЬНОГО ВОЗРАСТА**, **ЛУЧШЕЕ ДИЗАЙНЕРСКОЕ РЕШЕНИЕ**

Журнал «Квантик» № 6, июнь 2025 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С.А. Дориченко
Редакция: В.Г. Асташкина, Т.А. Корчемкина, Е.А. Котко, И.А. Маховая, Г.А. Мерзон, М.В. Прасолов, Н.А. Солодовников
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р.К. Шагеева, И.Х. Гумерова
Обложка: художник Yustas

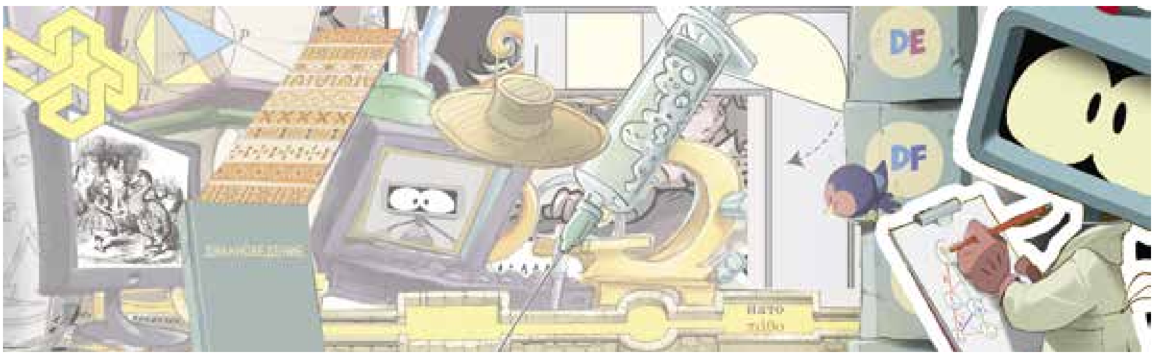
Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя:
119002, г. Москва,
Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**

Подписка на журнал в отделениях почтовой связи Почты России:
Каталог Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)
Онлайн-подписка на сайте Почты России:
podpiska.pochta.ru/press/ПМ068

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31**
и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84x108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 29.04.2025
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831) 218-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

СОДЕРЖАНИЕ



Евгений Смирнов

КАК СДЕЛАТЬ ИГРУ «ДОББЛЬ»

Многие знают настольную игру «Доббль» (или «Spot-It»). В неё играют колодой из специальных круглых карт, на каждой из которых нарисовано по восемь забавных фигурок. Правила игры бывают разными, но один из вариантов такой: игроки берут себе по одной карте, а остальную колоду кладут в центр стола лицевой стороной кверху (так что верхняя карта в колоде видна всем). Первый, кто найдёт общую фигурку у своей карточки и карточки в центре стола, называет её, забирает себе карточку и кладёт сверху на свою, получая одно очко. Дальше все пытаются найти общую фигурку у следующей карты в колоде и своей верхней карточки и так далее.

Как должны быть устроены карточки для «Доббля»?

У карточек есть чудесное свойство, на котором и основана вся игра:

(1) какие бы две карточки из колоды мы ни взяли, найдётся фигурка, нарисованная на обеих этих карточках, причём только одна.

На фото (рис. 1) у двух левых карточек общая фигурка – щенок, у двух нижних – ведро, у правой верхней и центральной – мяч, и так далее (найдите общую картинку для каждой из пар!).

Рис. 1

Возникает вопрос: а как сделать такую колоду? Ведь фигурки нельзя разбросать по карточкам в произвольном порядке, чтобы это свойство выполнялось.

На этот вопрос можно дать «дурацкий» ответ: нарисуем на всех карточках одну и ту же фигурку, а все остальные фигурки сделаем разными. Таких карточек можно сделать сколько угодно, и условие (1), очевидно, будет выполнено – но такой колодой неинтересно играть: общая фигурка всегда одна и та же. Кроме того, разные фигурки в колоде тогда бы встречались с неравномерной частотой: одна фигурка – столько раз, сколько у нас карточек, а все остальные – лишь однажды. Давайте наложим ещё два условия:

(2) для любых двух различных фигурок существует карточка, на которой нарисованы они обе, причём такая карточка только одна;

(3) никакая фигурка не встречается на всех карточках одновременно.

Кроме того, потребуем, чтобы выполнялось ещё одно естественное условие:

(4) на всех карточках одинаковое число фигурок.

Теперь попробуем сделать колоду для «Доббля». Только давайте начнём с варианта игры, где на каждой карточке не восемь фигурок, а меньшее их число – естественно, одинаковое на всех карточках.

Легко сделать колоду, где на каждой карточке будет две фигурки. В такой колоде три карточки с фигурками AB, AC, BC (рис. 2).

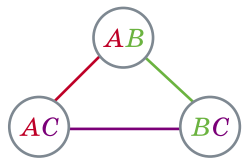


Рис. 2

Другие карточки в неё добавить нельзя. Ведь на новой карточке должна быть фигурка, которая нам ещё не встречалась; назовём её D. Но вторая фигурка на новой карточке должна быть уже встречавшейся, и какой бы она ни была, получаем противоречие с условием (1).

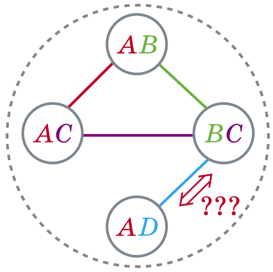
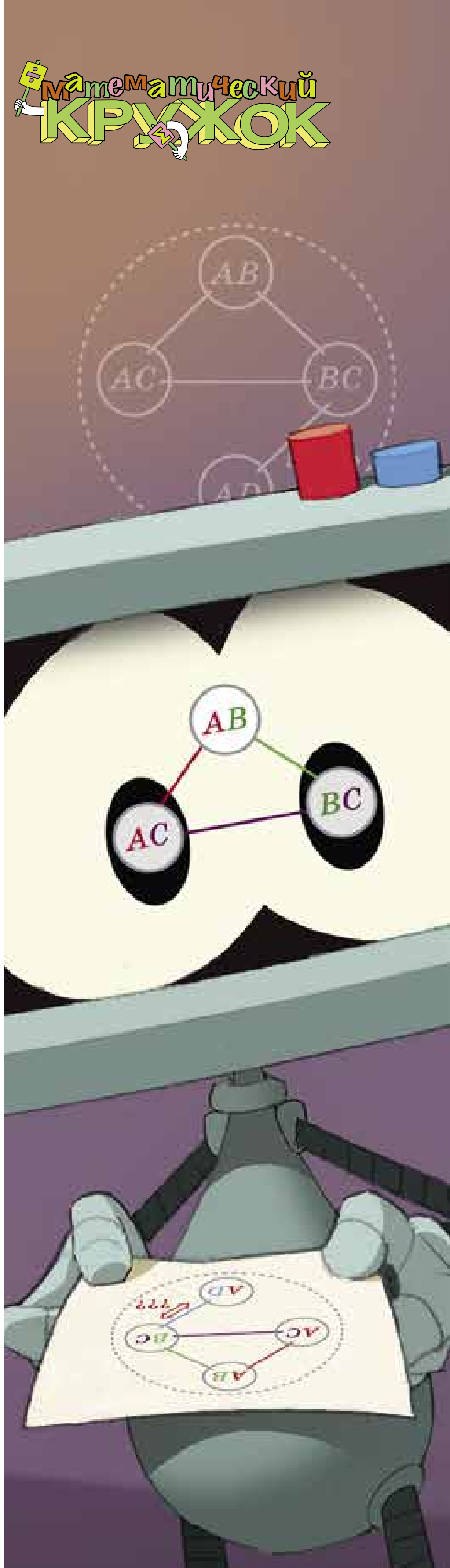
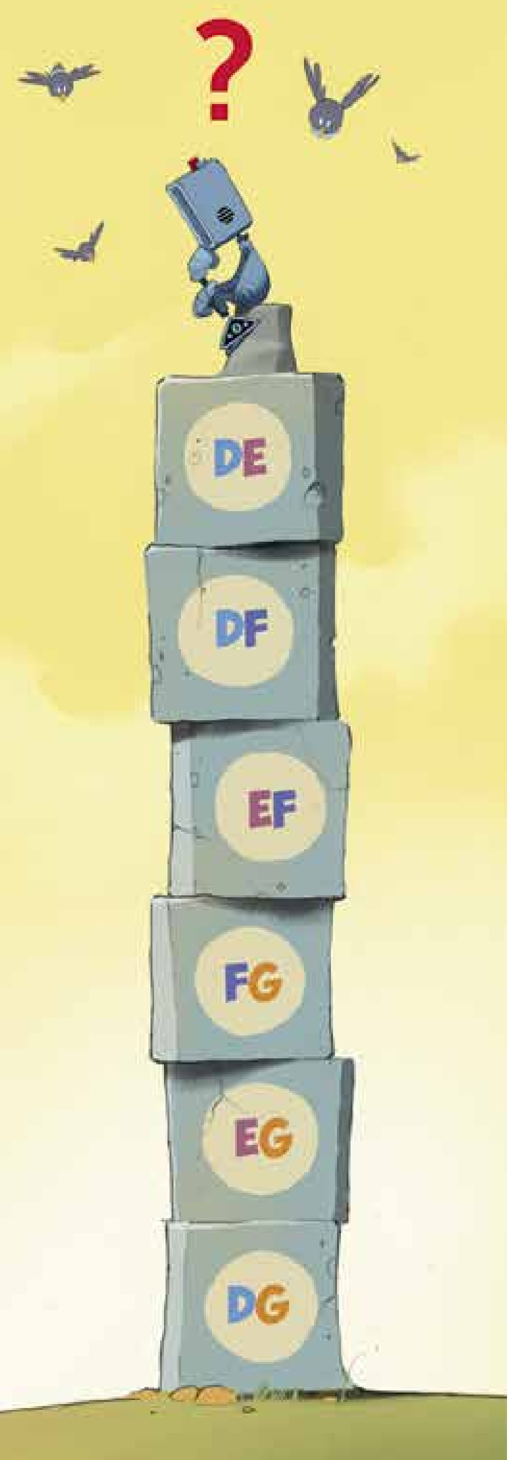


Рис. 3

«Доббль» с тремя фигурками

Итак, получилась колода «“Доббля” для самых маленьких». Попробуем пойти дальше и сделать колоду с тремя фигурками на каждой карточке. Чтобы разобраться, как она должна быть устроена, представьте, что эта колода лежит перед нами на столе, и выполните упражнения (ответы идут сразу за ними).





Упражнение 1. Докажите, что любая фигурка нарисована ровно на трёх карточках.

Действительно, выложим на стол все карточки, которые содержат, например, фигурку A. Теперь возьмём какую-нибудь карточку без фигурки A (такая карточка есть по условию (3)). По условию (1) эта карточка имеет с каждой из карточек на столе ровно одну общую фигурку.

И все эти фигурки разные (рис. 4): в противном случае две из карточек, лежащих на столе, содержали бы как эту фигурку, так и фигурку A, что запрещено условием (2). Итого *карточек, содержащих фигурку* ***A****, ровно столько же, сколько фигурок на одной карточке*, то есть три.

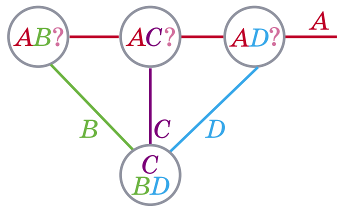


Рис. 4

Упражнение 2. Докажите, что на лежащих на столе карточках с фигуркой A нарисованы ещё шесть фигурок, по две на каждой карточке. Никаких других фигурок в колоде, кроме этих семи, нет.

По условию (2) для любых двух фигурок есть единственная содержащая их карточка. В частности, любая фигурка встречается на одной карточке с A.

Упражнение 3. Сколько карточек в этой колоде?

Нетрудно понять, что их столько же, сколько разных фигурок, то есть семь.

Действительно, каждая фигурка встречается в колоде трижды – то есть общее количество фигурок на всех карточках $7 \times 3 = 21$, и при этом на каждой карточке нарисовано по три фигурки, то есть карточек $21 : 3 = 7$.

Упражнение 4. Как устроены все эти карточки?

Возьмём одну из карточек; назовём фигурки на ней A, B и C. Каждая из этих фигурок изображена на двух из оставшихся шести карточек (рис. 5). Оставшиеся 4 фигурки назовём D, E, F, G. Из них можно составить шесть различных пар: DE, DF, DG, EF, EG, FG – как раз столько же, сколько у нас осталось карточек. Как эти пары должны быть распределены по карточкам?

Как мы уже обсуждали, на карточках с фигуркой A должны встречаться все остальные фигурки; то же верно и для карточек с фигурками B и C. Фигурки D, E, F, G можно разбить на пары как раз тремя способами: $DE–FG$, $DF–EG$ и $DG–EF$ – каждое из разбиений будет встречаться вместе с одной из фигурок A, B, C.

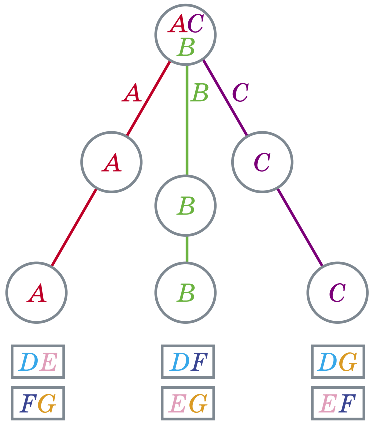


Рис. 5

Получается колода для «Доббля» из семи карточек с тремя фигурками на каждой из них (рис. 6). Мы соединили каждую тройку карточек, содержащих одну и ту же фигурку, линией. Кстати, буквы на карточках можно было и не писать: для каждой карточки набор линий, которые через неё проходят, соответствует нарисованным на карточке фигуркам.

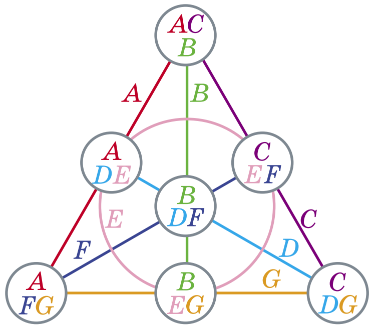
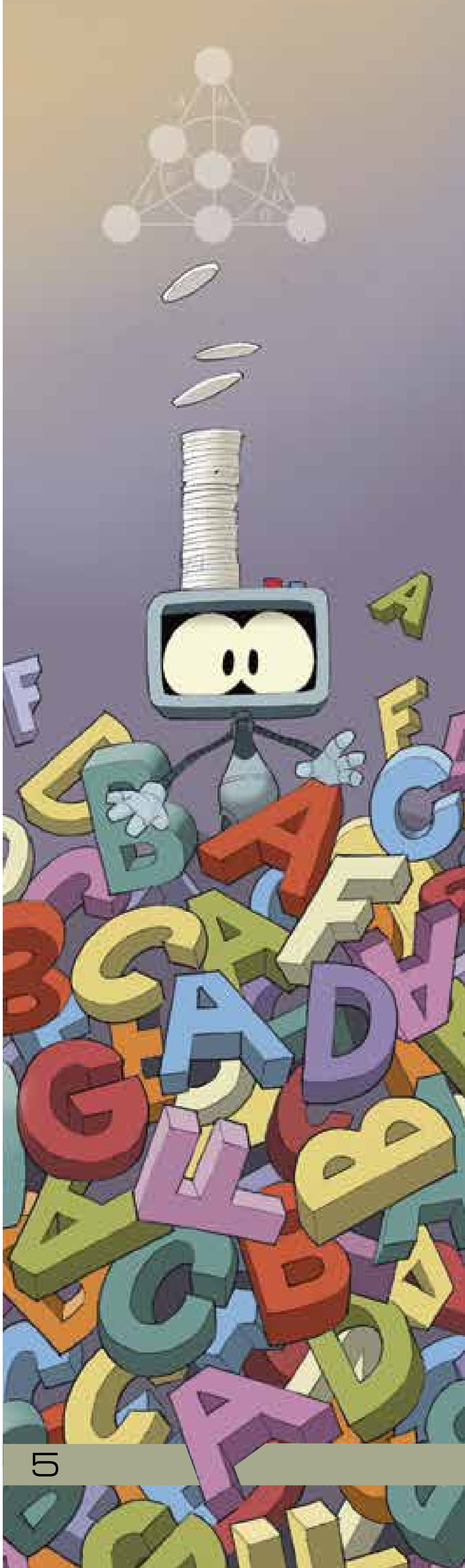


Рис. 6

Точки и прямые

Про эту картинку (рис. 6) можно думать в геометрических терминах – как про «плоскость», состоящую из «точек» (карточек). При этом через каждую точку проходят «прямые», отвечающие фигуркам: прямая – это набор всех карточек, содержащих данную фигурку (изображённую на рисунке 6 «окружность» мы тоже называем прямой). Условие (1) в этих терминах становится аксиомой планиметрии: *через любые две точки можно провести прямую, причём только одну*.

А что же с условием (2)? Оно утверждает, что *любые две прямые пересекаются ровно в одной точке*. Это уже не похоже на привычную нам геометрию, где прямые могут быть параллельными – а в «геометрии “Доббля“» параллельных прямых нет и любые две



прямые будут пересекаться! Ну и, конечно, ещё одно существенное отличие состоит в том, что и точек, и прямых в этой геометрии будет конечное число. Полученную структуру называют *проективной плоскостью Фано* в честь итальянского математика Джи́но Фа́но (1871–1952).

А сколько будет карточек в колоде для «Доббля», если фигурок на каждой карточке будет не три, а больше – скажем, 8, как в стандартной колоде? Похожим рассуждением можно доказать, что всего карточек с данной фигуркой («точек на прямой») будет тоже 8. Помимо общей фигурки, на каждой из них будет ещё 7 уникальных. То есть всего фигурок будет $8 \cdot 7 + 1 = 57$. Столько же будет и карточек в колоде.

Интересно, что хотя в стандартной колоде для «Доббля» 57 фигурок, на практике карточек всего 55. Но причиной этому не какие-то глубокие математические соображения, а более приземлённые: оказывается, 57 круглых карточек нужного диаметра не получилось разместить на стандартном листе картона, из которого они вырезаются, а для 55 нашлось более экономное размещение, при котором оставалось мало обрезков. Поэтому двумя карточками производители решили пожертвовать. Если у вас есть такая колода, попробуйте понять, каких двух карточек не хватает.

А для какого количества фигурок на карточке можно построить набор для игры в «Доббль»? Полный ответ неизвестен! Если число q простое или степень простого числа, можно построить комплект с $q+1$ фигурками на карточке (и в нём обязательно будет q^2+q+1 карточек). Например, при $q=7$ получится обычная колода из 57 карточек, а при $q=5$ – из 31 карточки, с шестью фигурками на каждой. Такие колоды тоже продаются, хотя и встречаются реже, чем стандартные.

А вот если $q=6$ или 10, то можно доказать, что такого комплекта не существует (но это совсем не просто!). Что же касается остальных чисел q, не являющихся степенью простого числа, – предположительно для них «проективной плоскости порядка q» (колоды карточек с $q+1$ фигурками на карточке) не существует. Однако пока это не доказано даже для $q=12$.

Фото: Валентина Асташкина

Художник Алексей Вайнер

Никита Солодовников

МАЯТНИКОВАЯ ДВЕРЬ

Для крепления обычной двери используют петлю: две пластины, которые свободно вращаются вокруг общего стержня (см. фото). Дверь на обыкновенных петлях открывается только в одну сторону. Одна пластина прикреплена к косяку, другая к двери, и дверь открывается в ту сторону, на которую вынесен стержень петли. Открыть её в другую сторону не удаётся – дверь торцом упирается в косяк или в стену.

Некоторые двери открываются настежь в обе стороны. Как могут быть устроены такие двери и их петли? Можно насадить дверь на вертикальную ось от потолка до пола – и так делают. Можно делать тоньше косяк и выносить стержень петли дальше от стены – это и сложно, и менее надёжно. Есть и другие способы. Один из них изображён на картинке сверху, его можно увидеть в салунах в фильмах о Диком Западе. Попробуйте придумать, как устроены такие петли.

Художник Yustas Фото: Yustas

Леонид Свистов

ПОЧЕМУ ВОДА КИПИТ ПРИ ТЕМПЕРАТУРЕ 100 ГРАДУСОВ?

Чтобы разобраться, чем замечательна эта температура, давайте, как и в статье «Фотографии кипящей воды» из прошлого номера, поставим кастрюлю с водой на нагреватель и закроем её крышкой. При закипании крышка со звоном приоткрывается, из-под неё начинает выходить газ. Поскольку газ выходит наружу, то давление под крышкой кастрюли с кипящей водой чуть больше атмосферного! (Давление внутри и снаружи различается не сильно, поскольку крышка только стучит, а не слетает с кастрюли.)

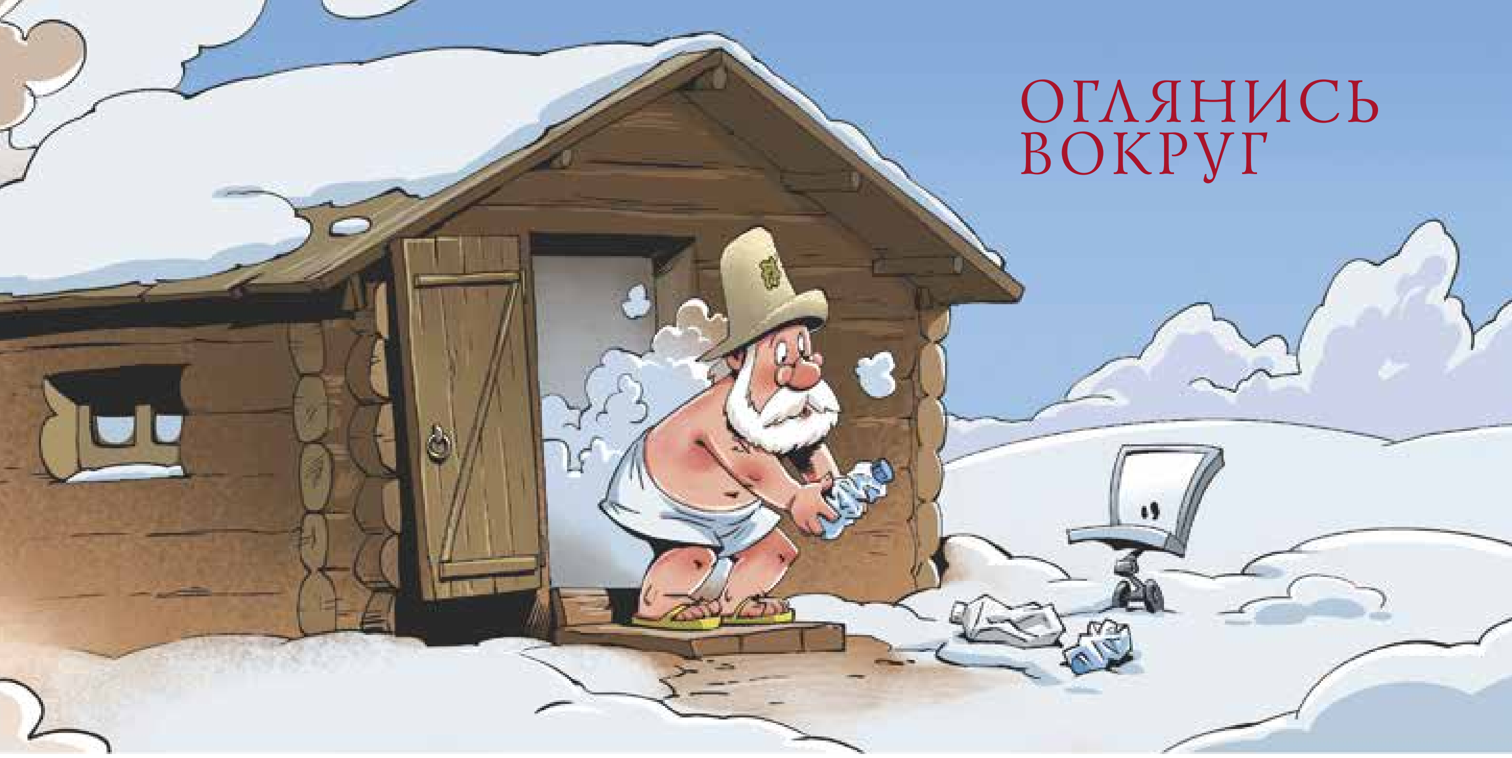
Что происходит внутри? С поверхности воды идёт процесс испарения: переход молекул жидкости в газ. Одновременно происходит обратный процесс – конденсация пара в воду. Если скорость испарения равна скорости конденсации, пар называется *насыщенным*. Именно такой пар можно найти над поверхностью воды в отсутствии сквозняка – например, в кастрюле с водой, накрытой крышкой.

Чем выше температура, тем большее количество молекул воды может вырваться из жидкости и тем быстрее они двигаются в газе. Поэтому давление насыщенного пара растёт с повышением температуры. Под крышкой находится смесь воздуха и пара. Если температура воды комнатная, то газ в основном состоит из воздуха, так как давление насыщенного пара составляет приблизительно одну пятидесятую часть атмосферного давления. Остальные 49 частей приходятся на воздух.

При нагреве под крышкой становится больше пара, а воздуха – меньше. Вы, наверное, замечали, что в парно́м отделении русской бани становится труднее дышать, после того как банщик плеснёт на раскалённые камни воды. Это связано с тем, что пары́ воды вытесняют из парилки воздух.

Чтобы убедиться, что над горячей водой воздуха меньше, чем над холод-

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ



ной, проведём эксперимент. Возьмём пустую пластиковую бутылку с завинчивающейся крышкой и аккуратно нальём в неё немного горячей воды из недавно кипевшего чайника. Выльем воду, *быстро* закроем бутылку крышкой и оставим охлаждаться. Остудить её быстрее можно струёй холодной воды из-под крана. На фото 1 и 2 – пластиковые бутылки и ёмкости на бумажной основе, обработанные описанным способом. Они выглядят так, будто их топтали ногами! Что произошло?

Когда мы закрывали крышку, давление газа внутри и снаружи бутылки равнялось атмосферному. После её охлаждения давление насыщенного пара в бутылке стало во много раз меньше атмосферного, поскольку избыток пара сконденсировался в капельки воды на внутренней поверхности бутылки. Давление газа в холодной бутылке оказалось меньше, чем давление атмосферы снаружи. Пластиковая бутылка не выдержала перепада давления и деформировалась, уменьшив свой объём.

Фото 1

Фото 2

Конечно, в бутылке есть ещё и воздух, давление которого также при охлаждении уменьшается. Но воздуха в бутылке мало (см. далее решение задачи 1) и тепловое изменение объёма этого воздуха незначительное. Сомневающийся читатель может сам экспериментально измерить, во сколько раз меняется объём сухого воздуха при охлаждении от 90 – 100 °С до комнатной температуры. В наших экспериментах с сухим воздухом объём уменьшался всего на четверть, что недостаточно для объяснения деформации бутылок в эксперименте.

> **!** Если вы решились повторить этот эксперимент, то, во-первых, будьте аккуратны с кипятком, а во-вторых, пластиковые тонкостенные бутылки (фото 1) деформируются при высокой температуре. Поэтому ополаскивайте их малым количеством кипятка (1/4 стакана). Этого достаточно для заполнения их горячим паром. На фото 2 – ёмкости на бумажной основе, которым разогрев до 100 °С не страшен. Обратите внимание, что при выборе сосуда на бумажной основе его горлышко должно быть вварено в сосуд (как на фото 2), а не наклеено, как это часто бывает на упаковках соков и молочной продукции. Клей не выдерживает нагрева!

Теперь, вооружившись знанием о насыщенном паре над поверхностью воды в кастрюле, мы можем вернуться к пузырькам в кипящей воде, о которых шла речь в статье из прошлого номера. С ними всё проще! Внутри них может быть только пар, поскольку воздух из воды вышел на ранних стадиях её нагрева. Вспомним, что на последней стадии кипения пузырёк, образовавшийся у дна кастрюли, всплывает и увеличивается в своих размерах. Отсюда заключаем, что испарение в пузырь идёт интенсивнее, чем конденсация, то есть давление насыщенного пара внутри пузыря больше, чем атмосферное.

Если же пузырёк, всплывая, попадает в более холодную воду, пар на-

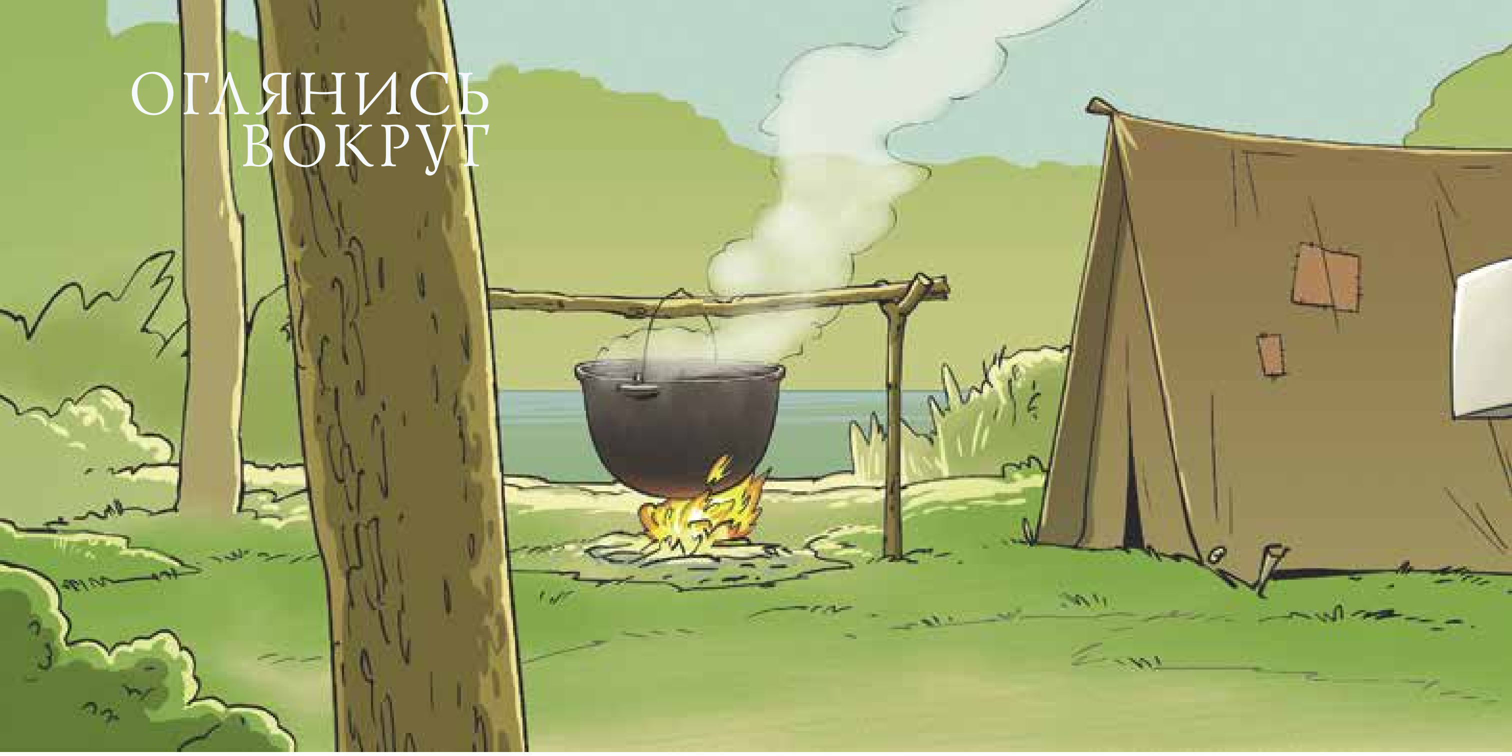
чинает конденсироваться, и пузырёк уменьшается и исчезает. Такое схлопывание пузырьков можно услышать, как характерный шум от воды незадолго до закипания. Таким образом, ответ на поставленный вопрос такой: при температуре кипения (~100 °С) давление насыщенного пара становится равным атмосферному и испарение с участием пузырей, или кипение, становится возможным.

Фото 3

Задача 1. Измерьте, во сколько раз плотность воздуха над поверхностью воды, кипящей в кастрюле с открытой крышкой, меньше, чем в комнате.

Для решения этой задачи мы воспользовались стеклянной пробиркой, которую сперва согрели в кипящей воде (фото 3). После чего вылили из неё воду так, чтобы открытый конец пробирки всё время находился рядом с поверхностью кипящей воды. За-

Фото 4

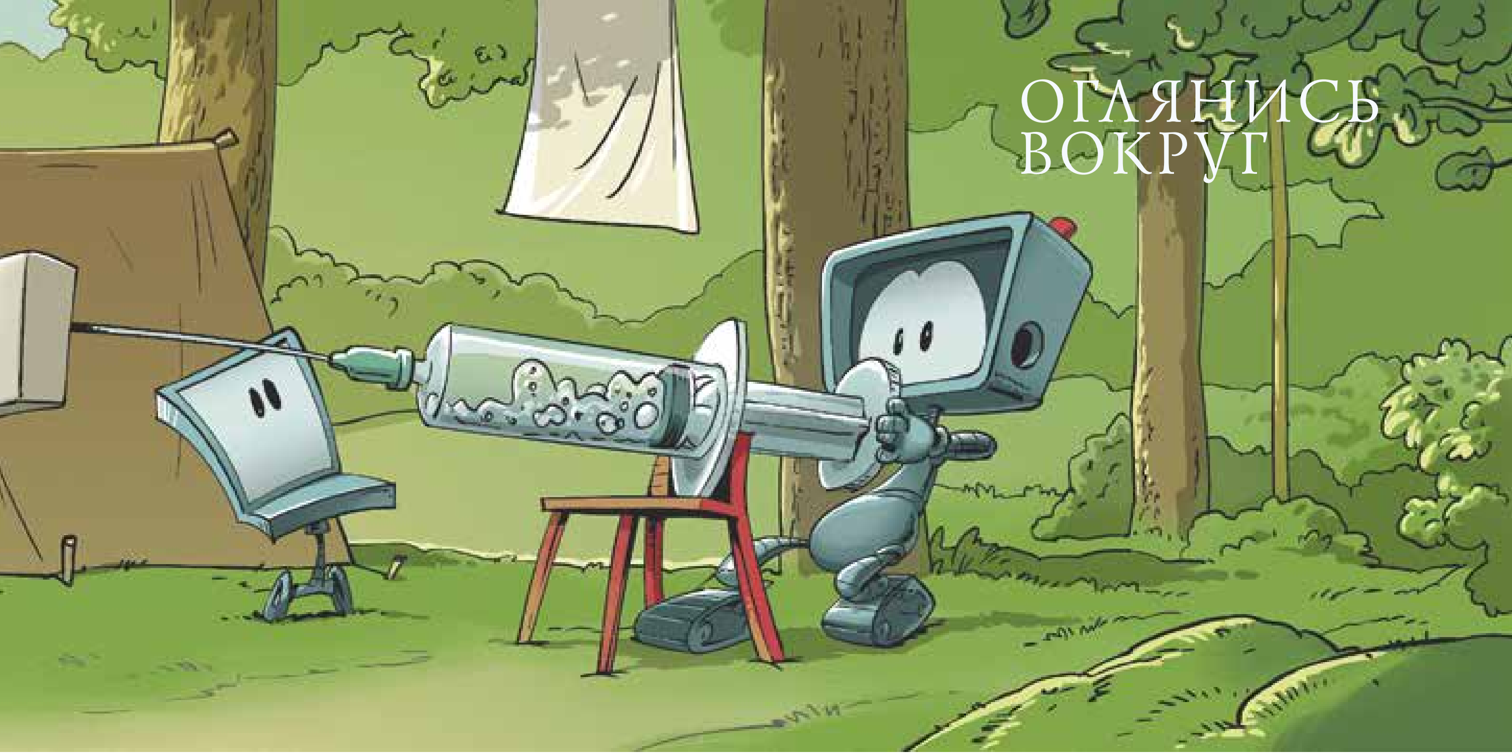


тем опустили открытый конец в воду, установили пробирку вертикально и выключили нагреватель. На фото 4 – пробирка и кастрюля после охлаждения до комнатной температуры. Воздушный пузырь вверху пробирки составляет приблизительно треть от всей высоты. Из этого эксперимента мы можем заключить, что над поверхностью кипящей воды в нашем эксперименте плотность воздуха приблизительно в три раза меньше, чем плотность воздуха в комнате. Верёвочка, привязанная к пробирке, помогала нам выливать воду из горячей пробирки и устанавливать её вертикально.

Задача 2. Как вскипятить воду, не нагревая её?

Вспомним, что кипение – это испарение в пузыри в объемё жидкости, и такие пузыри будут расти, если давление насыщенного пара в них превосходит давление в жидкости. Давление вблизи поверхности жидкости равно давлению газа над ней, поэтому чтобы вскипятить воду при комнатной температуре, необходимо понизить давление воздуха в 50 раз (до величины давления насыщенного пара: 17 мм ртутного столба при 20 °C).

Мы предлагаем создать такое низкое давление с помощью медицинского шприца. Присоедините плотно иголку к шприцу. Насадите на иглу кусочек эластичной резины, например обыкновенный ластик. Теперь внутренний объём шприца изолирован от атмосферы. Проверьте это. Выдвиньте поршень и через некоторое время дайте ему плавно вернуться в исходное состояние. Если в шприце не появилось воздуха, то ваш прибор готов к исследованию воды при низком давлении. Теперь снимите резинку с иголки и заполните часть шприца водой. Поверните шприц иголкой вверх и выдавите немного воды. Это нужно для того,



чтобы избавиться от случайно попавшего воздуха. Теперь нужно снова наколоть на иголку резинку, немного выдвинуть поршень шприца, и можно наслаждаться кипением воды при комнатной температуре (фото 5)! Кипение воды происходит интенсивно сразу после выдвигания поршня. Через некоторое время рост пузырей останавливается, поскольку давление пара над водой растёт при кипении. Заставить пузыри снова расти и всплывать можно, если дополнительно понизить давление, выдвигая поршень. При плавном возврате поршня в исходное состояние пузыри и объём пара над водой уменьшаются и пропадают. Пар конденсируется в воду.

Температура кипящей воды в этом эксперименте комфортная для купальщика, но давление настолько низкое, что версию использования Коньком-Горбунком такой воды для купания Иванушки и царя можно определённо исключить (см. статью из прошлого номера).

Фото 5

Фото: Юлия и Марьян Жунины

Художник Мария Усеинова

Материал подготовил
Григорий Мерзон

ЗАДАЧА О ДИВАНЕ

Представьте себе, что мы хотим пронести фигуру («диван») как можно большей площади по Г-образному (поворачивающему под прямым углом) длинному коридору ширины 1. Какой формы должен быть диван и чему равна эта площадь?

Ясно, что легко пронести квадрат со стороной 1, его площадь равна 1. Можно сообразить, что пролезет и полукруг радиуса 1; его площадь чуть больше: $\pi/2 \approx 1{,}57$ (рис. 1).

Задачу о диване сформулировал в 1966 году Лео Мозер (Leo Moser). А в 1968 году Джон Хаммерсли (John Hammersley) заметил, что если между двумя четвертинками окружности вставить прямоугольник с вырезанной полукруглой дыркой (рис. 2), то можно пронести и такой диван. Радиус выреза r можно брать любым между 0 и 1,

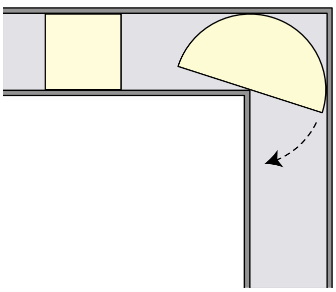


Рис. 1. Квадрат и полукруг в Г-образном коридоре

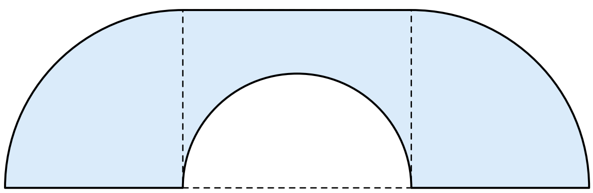


Рис. 2. Диван Хаммерсли

но самая большая площадь получается при $r=2/\pi$ и равна $\pi/2+2/\pi\approx2{,}2074$.

Много лет этот результат никто не мог улучшить и многие ожидали, что это и есть «идеальный» диван. Но в 1992 году Джозеф Гервер (Joseph Gerver) немного подправил форму дивана (рис. 3), увеличив площадь примерно на 0,5% – приблизительно до 2,2195.

В диване Гервера дуги окружностей заменены на полтора десятка участков более хитрой формы, каждый участок – кусочек кривой, заданной своим уравнением (рис. 4).

Тут уже, наоборот, казалось бы странным ожидать, что это и есть окончательный ответ. Но в конце 2024 года Пэк Чинон (Jineon Baek) выложил препринт с доказательством оптимальности дивана Гервера. Доказательство занимает больше 100 страниц. Будем надеяться, что оно верное.

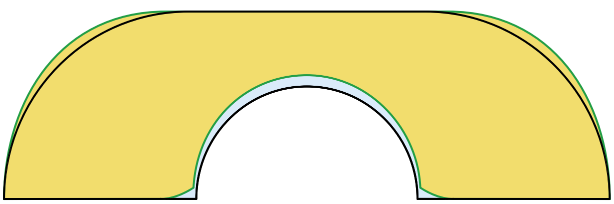


Рис. 3. Диван Гервера на фоне дивана Хаммерсли (сайт «Математические этюды», etudes.ru)

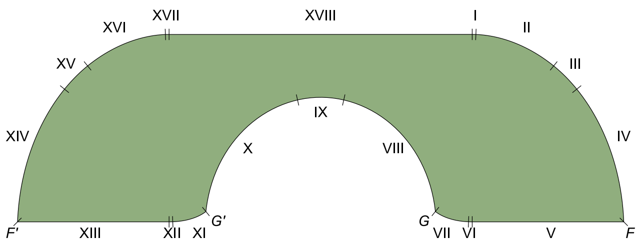
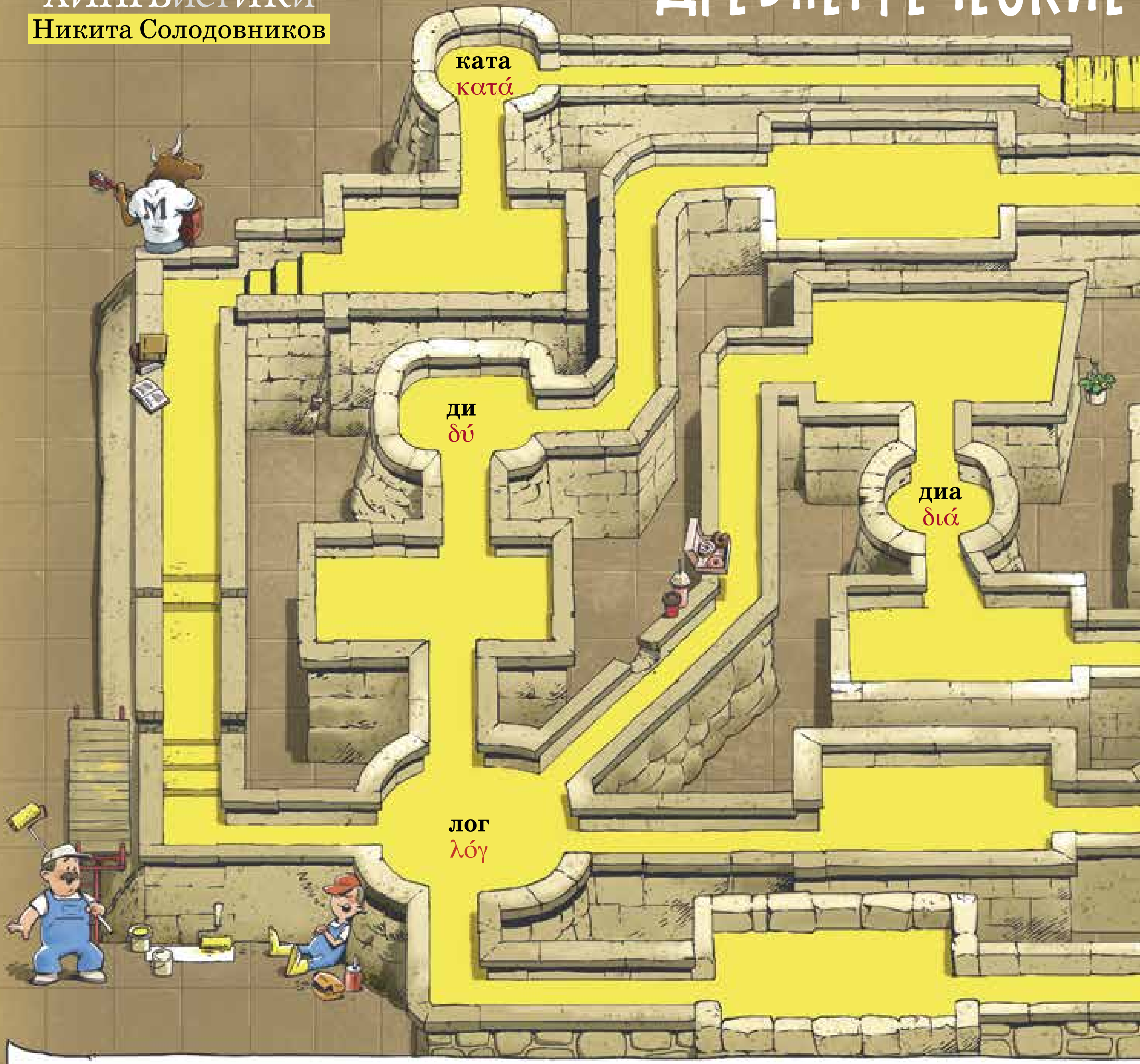


Рис. 4. Участки, на которые разбита граница дивана Гервера

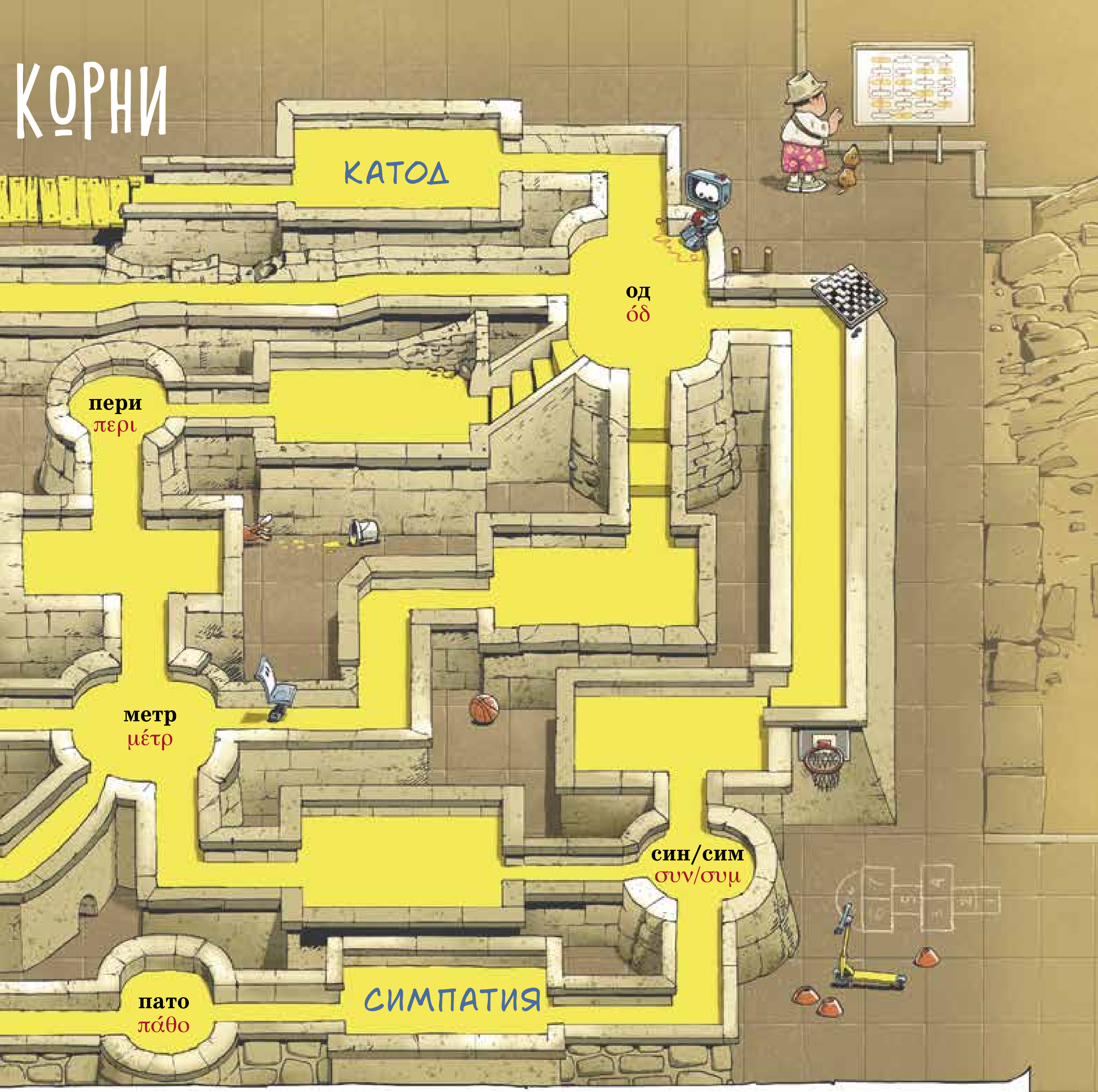
Художник Алексей Вайнер

Древнегреческие



Многие русские слова заимствованы из древнегреческого языка или содержат греческие по происхождению морфемы (значимые части слов). Например, слово «симфония» содержит приставку *сим-* и корень *фон-*. Этот корень можно встретить в словах «диктофон», «магнитофон» и «патефон»; он означает что-то вроде «звук» или «голос». А приставка *сим-* (*син-*) означает «со-», «вместе», её можно встретить в словах «синтаксис», «симпозиум»

КОРНИ



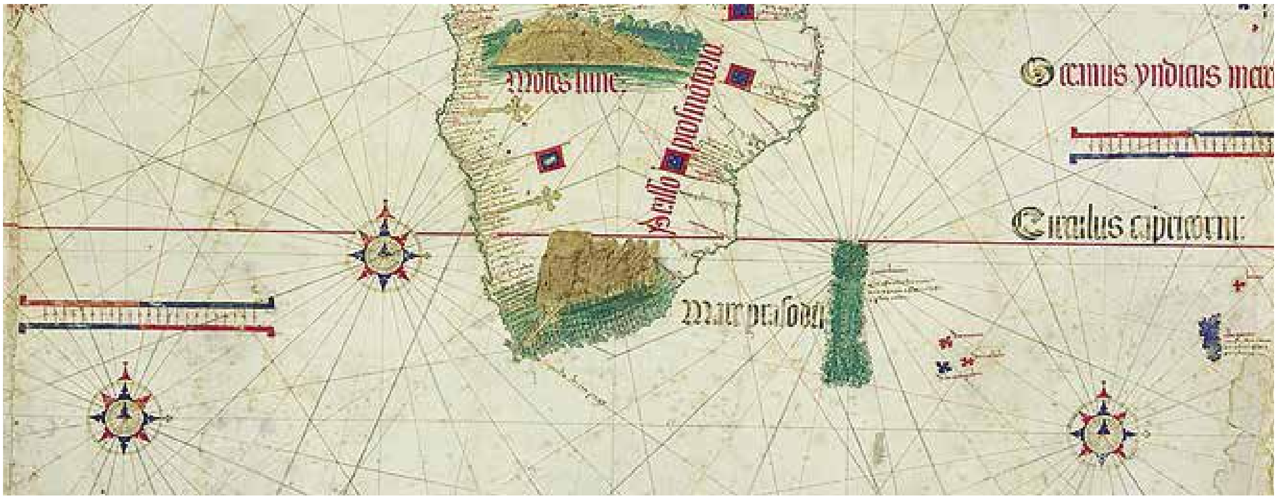
и «симпатия». Получается, слово «симфония» можно буквально перевести как «созвучие» или «согласие».

На схеме каждая древнегреческая морфема соединена с теми словами, в состав которых она входит. Сами слова не приведены – кроме двух примеров. Попробуйте угадать слова и впишите их в нужные прямоугольники. Исходя из смысла получившихся слов, попробуйте описать значение каждой морфемы.

Художник Мария Усеинова

Григорий Идельсон

ДОДО В ЖИЗНИ И ИСКУССТВЕ



В 1501 году герцог Феррары, небольшого итальянского государства, послал в Португалию своего агента Альберто Кантино, официально – для закупки лошадей, а на самом деле – чтобы разузнать португальские географические тайны. Миссия увенчалась успехом, и по возвращении Кантино составил подробнейшую карту, включавшую в себя побережье Бразилии, Кубу и Гаити, Флориду, южную оконечность Африки. В самой Португалии географические карты были засекречены, а позже архивы погибли во время страшного землетрясения в Лиссабоне в 1755 году, так что только благодаря феррарскому шпиону мы знаем, что знали португальцы в начале XVI века.

На восток от Мадагаскара на карте есть три острова, названные арабскими именами: Дина Маргабин, Дина Ароби и Дина Морате. Выходит, арабские моряки, а от них и португальцы знали о трёх островах в Индийском океане: Реюньоне, Маврикии и Родригесе.

Все три острова были покрыты тропическими лесами и, судя по всему, никогда не были заселены людьми. Португальцы впервые побывали на Маврикии в 1507–1513 годах. Остров стоял в стороне от торговых путей и не представлял для них интереса. Только в 1598 году голландцы добрались до острова и решили создать там колонию.

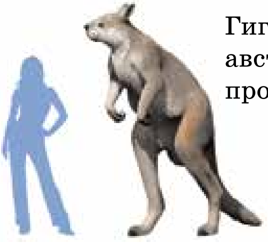
Как и на многих других изолированных островах, на Маврикии не было млекопитающих. Фауна острова в основном состояла из птиц: только они могли до него добраться. Птицы на острове эволюционировали, и одна из них заняла экологическую нишу «самого большого зверя», которого не может съесть никакой местный хищник. Как правило, такие птицы на самых разных островах не умеют летать.

На Маврикии самая большая птица была ростом до 1 м. Она – родственник голубя. Голландцы назвали её *дронтом* (происхождение этого слова неясно), а португальцы – *додó* (дурачком).

На голландской гравюре 1601 года изображена счастливая жизнь голландских колонистов, осваивающих новый остров: они ловят рыбу, строят лодки и дома, куют железо, проповедник читает под открытым небом проповедь… Слева изображены местные животные: два вида черепах и дронт

Додо – птица совершенно беззащитная. После появления людей она исчезла очень быстро. Как всегда, дело не только в том, что люди на неё охотились (её мясо считалось невкусным), но и в том, что они завезли с собой собак, кошек, крыс и даже обезьян, которые все конкурировали с додо за ресурсы. Последний случай охоты на додо описан в 1688 году.

Такая судьба «самого крупного зверя» после прихода людей – не исключение, а правило. Во всех местах, куда мигрировали люди, уже имеющие опыт охоты, их появление совпадало с исчезновением мегафауны – самых крупных животных. Так произошло в Австралии с гигантскими кенгуру – *прокоптодонами* – примерно 50 000 лет назад, на северо-востоке Евразии и в Северной Америке с мамонтами и шерстистыми носорогами 13 000 лет назад, в Новой Зеландии с гигантскими птицами *моа* в XV веке.



Гигантский австралийский прокоптодон

Гигантский орёл нападает на новозеландских моа (они достигали 1,8 м в высоту)

Мамонты и шерстистый носорог

Короткая встреча додо с человечеством совпала с расцветом голландской живописи, и поэтому сохранились десятки картин с изображением этой птицы. Больше всего таких картин написал художник Рулант Саверей (Roelant Savery). На его картине «Пейзаж с птицами» (1628 год) додо стоит справа внизу. Обратим внимание ещё на несколько экзотических птиц. Рядом с додо стоит казуар, только-только привезённый из Новой Гвинеи. В нескольких местах – ары, только что открытые в Центральной Америке. И, наконец, на камне слева – ещё одна экзотическая птица, только что завезённая из Америки, – индюк.

Одна из картин Саверея была прода-

Пейзаж с птицами

Иллюстрация Дж. Тенниела
к «Алисе в Стране чудес» (1865)

на в Англию, и её хозяин – натуралист Эдвардс – в 1750 году подарил её Британскому музею. Именно из неё Льюис Кэрролл узнал об этой птице и включил её в «Алису в Стране чудес», и именно с этой картины художник Тенниел сделал знаменитую иллюстрацию к «Алисе».

В 1950-е годы ленинградский орнитолог А.И.Иванов, прочитав о додо на картинах голландцев, решил поискать её и в советских музеях. В Эрмитаже и Пушкинском музее он ничего не нашёл, но совершенно неожиданно наткнулся на изображение додо там, где не искал, – в Институте востоковедения.

Эта картина была сделана в 1625 году индийским художником Устадом Мансуром (Ustad Mansur). Известно, что правитель Индии, Великий Могол Джахангир, любил коллекционировать редких птиц, а европейцы (голландцы или португальцы) охотно дарили ему экзотические подарки.

Картина Р. Саверея (1626),
приобретенная Дж. Эдвардсом
и переданная им в дар Британскому музею (1750)

Картина Устада Мансура
«Дронт среди других птиц» (1625)

Владимир Красноухов

Художник Дарья Хуснутдинова

Странные иероглифы

К нам в редакцию поступил набор вот таких плоских фигурок (рис. 1). Что-то похожее на древние марсианские иероглифы, подумали мы. А может быть, это язык сомали?

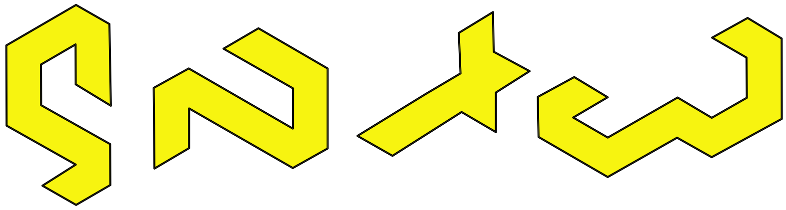


Рис. 1

Пока к нам добирался эксперт – специалист по кушитской ветви афразийских языков, мы, повертев на столе загадочные детали, случайно собрали фигуру, обладающую интересным свойством – ни одна деталь не могла перемещаться на поверхности стола независимо от других! То есть получилось то, что в занимательной математике называется «антислайд».

Вот изображение этой фигуры на сетке (рис. 2) – чтобы вы могли точно вырезать детали из картона. А теперь – задача. Попробуйте разместить их на поверхности стола так, чтобы образовался симметричный антислайд. Детали можно как угодно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.

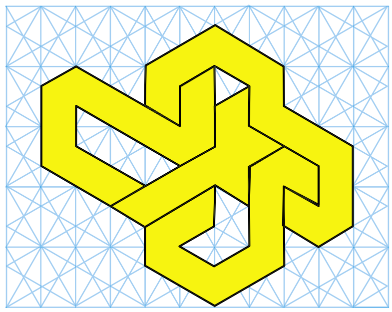
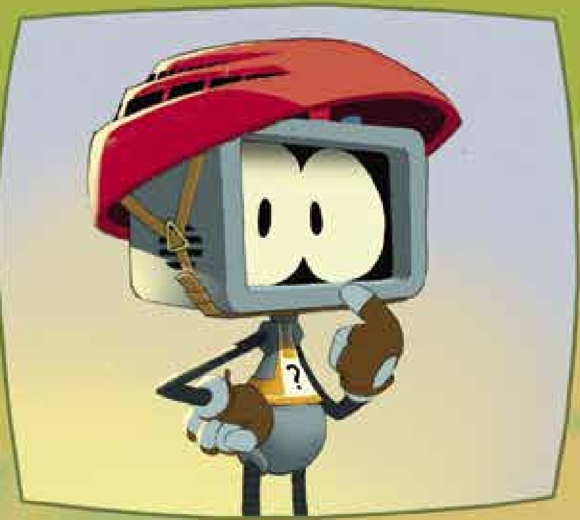


Рис. 2

Кстати, это одна из тех механических головоломок, которые решали финалисты 27-го открытого очного Чемпионата России по пазлспорту 29 июля 2024 года в Переславле-Залесском. Задача оказалась не самой сложной – за отведённые по регламенту 10 минут с ней справились почти все участники. Можно помериться с ними силами. У вас ведь, уважаемые читатели «Квантика», запас времени не ограничен никаким регламентом, впереди летние каникулы!

Желаем успехов!

Ответ в следующем номере



ВЕЛОСИПЕДНЫЕ СЛЕДЫ

В какую сторону ехал велосипед, оставивший такой след? (Колёса не скользили по дороге.)

Ответы в следующем номере

Автор Александр Бердников
Художник Алексей Вайнер

XLVI ТУРНИР ГОРОДОВ
ВЕСЕННИЙ ТУР, 8–9 КЛАССЫ

2 и 16 марта 2025 года прошёл весенний тур XLVI Международного математического Турнира городов. Приводим задачи для 8–9 классов. В скобках указано число баллов за полное решение задачи. При подведении итогов учитываются три задачи, по которым участник набрал больше всего баллов (баллы за пункты одной задачи суммируются).

Базовый вариант

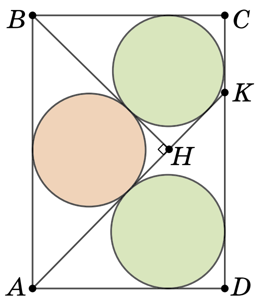
1 [4]. На доску записали числа 1, 2, ..., 100. Далее за ход стирают любые два числа a и b, где $a \geqslant b > 0$, и пишут вместо них одно число $[a/b]$. После 99 ходов на доске останется одно число. Каким наибольшим оно может быть? (Напомним, что $[x]$ – это наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Егор Бакаев

2 [5]. В классе N школьников, среди них образовалось несколько компаний. *Общительностью* школьника назовём количество людей в наибольшей компании, куда он входит (если ни в одну не входит, то общительность равна 1). Оказалось, что у всех девочек в классе общительность разная. Каково наибольшее возможное количество девочек в классе?

Борис Френкин

3 [5]. На стороне CD прямоугольника $ABCD$ взята точка K. Из вершины B опустили перпендикуляр BH на отрезок AK (так что $H \neq K$). Оказалось, что отрезки AK и BH делят прямоугольник на три части, в каждую из которых можно вписать круг (см. рисунок). Докажите, что если круги, касающиеся стороны CD, равны, то и третий круг им равен.



Михаил Евдокимов

4 [6]. По кругу стоят кувшины с соками, не обязательно одинакового размера. Из любого кувшина разрешается переливать любую часть сока (возможно, нисколько или весь сок) в соседний кувшин справа, так чтобы тот не переполнился и сладость смеси в нём стала равна 10%. Известно, что в начальный момент такое переливание удалось бы сделать из любого кувшина. Докажите, что можно сделать в каком-то порядке несколько таких переливаний (не более одного из каждого кувшина), так чтобы сладость смеси во всех непустых кувшинах стала равна 10%. (Сла-

дость – это процент сахара в смеси, по весу. Сахар всегда равномерно распределён в кувшине.)

Александр Шаповалов

5 [6]. Прямоугольная клетчатая доска покрашена в шахматном порядке в чёрный и белый цвета и разбита на доминошки 1×2. Везде, где граничат по стороне горизонтальная и вертикальная доминошки, стоит дверка. Она покрашена в тот же цвет, что и примыкающая клетка той доминошки, которая примыкает короткой стороной. Обязательно ли белых дверок столько же, сколько чёрных?

Борис Френкин

Сложный вариант

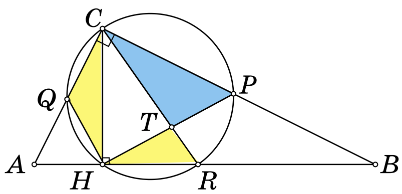
1 [4]. Учитель назвал две различные ненулевые цифры. Коля хочет составить делящееся на 7 семизначное число, в десятичной записи которого нет других цифр, кроме этих двух. Всегда ли Коля может это сделать, какие бы две цифры ни назвал учитель?

Алексей Толпыго

2 [5]. В квадрате 2025×2025 отмечено несколько клеток. За один ход Кирилл может узнать количество отмеченных клеток в любом клетчатом квадрате со стороной меньше 2025 внутри исходного квадрата. Какого наименьшего количества ходов точно хватит, чтобы узнать количество отмеченных клеток во всём квадрате?

Кирилл Никитин

3 [5]. В треугольнике ABC с прямым углом C провели высоту CH. Некоторая окружность, проходящая через точки C и H, повторно пересекает отрезки AC, CB и BH в точках Q, P и R соответственно. Отрезки HP и CR пересекаются в точке T. Что больше: площадь треугольника CPT или сумма площадей треугольников CQH и HTR?



Михаил Евдокимов

4. Даны $2N$ действительных чисел. Известно, что как ни разбей их на две группы по N чисел, произведение чисел первой группы отличается от произведения чисел второй группы не более чем на 2. Верно ли, что как ни расставь эти числа по кругу, найдутся два соседних числа, различающихся не более чем на 2, если

а) [3] $N = 50$;

б) [5] $N = 25$?

Илья Богданов

5 [8]. Имеется 15 неразличимых на вид монет. Известно, что одна из них весит 1 г, две – по 2 г, три – по 3 г, четыре – по 4 г, пять – по 5 г. На монетах есть соответствующие надписи с указанием масс. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь проверить, все ли надписи сделаны верно? (Не требуется определять, какие именно надписи верны, а какие нет.)

Александр Грибалко

6. Равносторонний треугольник разрезан на белые и чёрные треугольники. Известно, что все белые треугольники – прямоугольные и равны друг другу, а все чёрные – равнобедренные и тоже равны друг другу. Обязательно ли кратны $30°$ все углы

а) [4] у белых треугольников;

б) [5] у чёрных треугольников?

Алексей Заславский

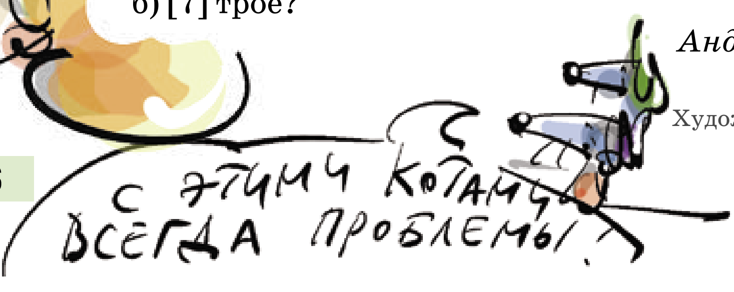
7. Хозяйка достала кусок мяса из холодильника, вокруг неё собрались котята. Раз в минуту хозяйка отрезает кусочек мяса и скармливает его одному из котят (на свой выбор), причём каждый кусочек должен составлять одну и ту же долю куска, от которого его отрезают. Через некоторое время хозяйка убирает остаток мяса в холодильник. Может ли хозяйка скормить котятам поровну мяса, если всего котят

а) [3] двое;

б) [7] трое?

Андрей Кушнир

Художник Сергей Чуб



16 марта 2025 года прошла очередная Московская математическая олимпиада (одновременно с Турниром городов). Приводим избранные задачи 8 и 9 классов, не вошедшие в вариант Турнира городов.

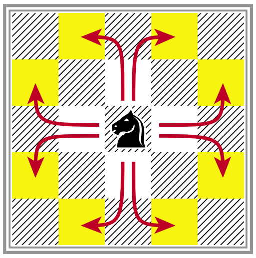
1. Можно ли расставить девять различных целых чисел в клетки таблицы 3×3 так, чтобы произведение чисел в каждой строке равнялось 2025 и произведение чисел в каждом столбце тоже равнялось 2025?

Михаил Евдокимов

2. На совместный симпозиум лжецов (всегда лгут) и правдолюбов (всегда говорят правду) собрались 12 участников, среди которых не все лжецы и не все правдолюбы. Каждые два участника либо знакомы, либо незнакомы друг с другом. Каждый ответил «да» или «нет» на вопрос «Знакомы ли вы?» про каждого из остальных. Какое наименьшее количество ответов «да» могло быть получено?

Михаил Евдокимов

3. Можно ли на бесконечной клетчатой плоскости расставить бесконечное количество шахматных коней (не более одного коня в клетку) так, чтобы каждый конь бил ровно а) 6 других; б) 5 других?



Напомним, что шахматный конь бьёт 8 клеток, как показано на рисунке.

Александр Тертерян

4. Каждая клетка квадрата 100×100 покрашена либо в белый, либо в чёрный цвет. Оказалось, что у каждой белой клетки ровно две соседних с ней по стороне клетки покрашены в белый цвет, а у каждой чёрной клетки ровно две соседних с ней по стороне клетки покрашены в чёрный цвет. Найдите максимальное возможное количество чёрных клеток.

Алексей Заславский

Художник Сергей Чуб

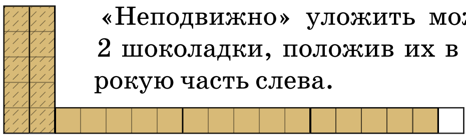
НАШ КОНКУРС, VIII тур
(«Квантик» № 4, 2025)

36. *Назовём натуральное число троечным, если оно делится на 3 или содержит тройку в десятичной записи. Найдите хотя бы одно такое число N, что среди чисел от 1 до N ровно половина троечных.*

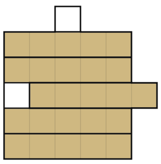
Ответ: например, 36. Среди чисел от 1 до 30 только 10 делятся на 3, а из остальных содержат в записи тройку два числа – 13 и 23. Итого, от 1 до 30 есть 12 троечных чисел – на 3 меньше половины чисел. Значит, если мы возьмём 6 следующих чисел (31, ..., 36 – троечные), то получим ровно половину троечных – 18 из 36.

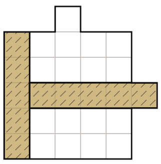
37. *У Саши есть плоская коробка в виде клетчатого многоугольника, в которой лежат 5 шоколадок размером 1×5. Саша захотел упаковать шоколадки так, чтобы они не болтались (никакую нельзя подвинуть ни по горизонтали, ни по вертикали ни на одну клеточку). Оказалось, что тогда в коробку можно упаковать 2 шоколадки, а больше – не получается. Приведите пример такой коробки.*

Ответ: см. рисунок. Положить 5 шоколадок в такую коробку можно, только если оставить свободной одну клетку в нижнем ряду – но тогда шоколадки в нём можно сдвинуть. «Неподвижно» уложить можно лишь 2 шоколадки, положив их в более широкую часть слева.



Есть и другие подходящие коробки – например, можно немного модифицировать квадратную коробку.

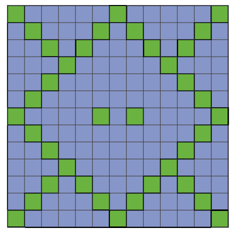




38. *У мудрецов Пети, Васи и Тимы ко лбу прикреплены бумажки, на каждой из которых написано натуральное число. Известно, что сумма всех трёх чисел не больше 5. На вопрос «можешь ли ты назвать своё число» Петя ответил «нет», затем Вася ответил «нет», а затем Тима назвал своё число и обосновал ответ. Какое число было написано у Тимы?*

Ответ: 1. В задаче предполагается, что каждый видит бумажки остальных, а свою не видит. Наибольшее число, которое может быть у Тимы – это 3, но тогда и Петя, и Вася поняли бы, что у них единицы (иначе сумма всех трёх чисел больше 5). Предположим, что у Тимы – число 2. Тогда остальные два числа – это либо 1 и 2, либо 1 и 1 . Поскольку Петя ответил «нет», то у Васи на бумажке – не 2. Но тогда Вася видит 2 у Тимы, слышит Петин ответ «нет» и тоже понимает про своё число, что это не 2, то есть 1 – противоречие. Значит, у Тимы написано число 1. Это и вправду возможно – например, у Пети с Васей при этом могут быть две единицы, а может у кого-то 2, а у кого-то 1, и они эти ситуации не отличат.

39. *Вася покрасил 131 клетку в квадрате 13×13 в синий цвет, а остальные 38 клеток – в зелёный. Верно ли, что Петя в любом случае сможет вырезать из этого квадрата 20 целиком синих пентаминошек (не обязательно различных)?*



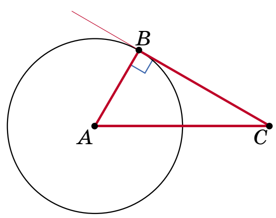
Ответ: неверно, см. пример на рисунке.

В каждой из 8 маленьких синих областей по 9 клеток, значит, из каждой Петя сможет вырезать не больше одной пентаминошки. В центральной синей части клеток $131 - 8 \cdot 9 = 59$, то есть из неё можно вырезать максимум 11 пентамино. Тогда суммарно можно вырезать не больше $11 + 8 = 19$ полностью синих пентаминошек.

40. *В треугольнике ABC биссектриса угла A делит медиану, проведённую из вершины B, пополам. Какое наибольшее значение может иметь величина угла C?*

Ответ: 30°. Пусть точка M – основание медианы BM. В треугольнике ABM биссектриса, проведённая из A – это и медиана, откуда $\triangle ABM$ – равнобедренный, $AB = BM$. Поскольку BM – медиана в $\triangle ABC$, имеем: $AB = BM = MC = \frac{1}{2}AC$. Значит, точка B лежит на фиксированной окружности с центром в A и радиусом $\frac{1}{2}AC$.

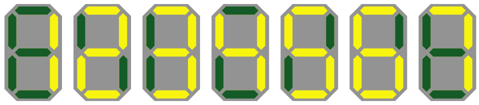
Поэтому самым большим угол C будет, когда CB – касательная к этой окружности. Тогда касательная CB перпендикулярна радиусу AB, треугольник ABC прямоугольный. В нём гипотенуза AC в два раза больше катета AB, откуда угол C равен 30° (а треугольник ABM равнобедренный, так что условие выполняется – его биссектриса, выходящая из A, будет также медианой и она поделит BM пополам).



ЗАГАДОЧНЫЕ ПАЛОЧКИ

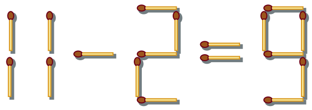
(«Квантик» № 5, 2025)

1. Закрасив «недостающие» палочки, видим последовательные цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6:

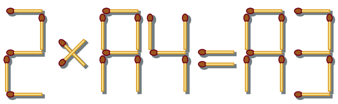


Значит, ответ – б), негорящая цифра 7.

2.

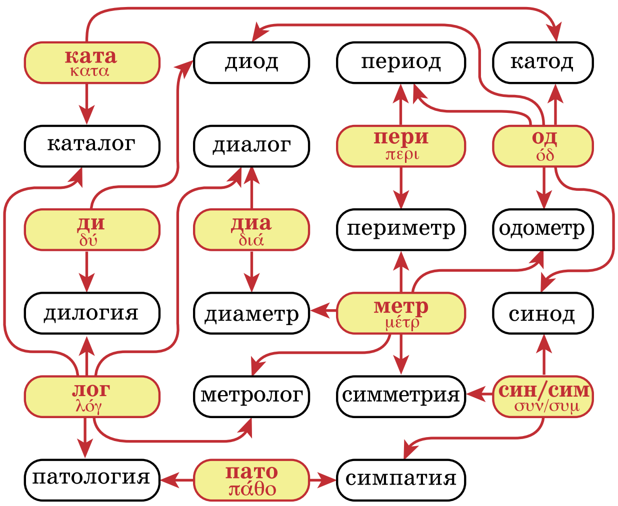


3. Удалим нижние спички у восьмёрок:



Но бумажный формат А3 (297×420 мм) составляется из двух форматов А4 (297×210 мм)!

ДРЕВНЕГРЕЧЕСКИЕ КОРНИ



XLVI ТУРНИР ГОРОДОВ.

Весенний тур, 8–9 классы

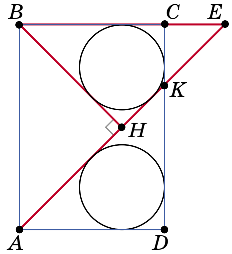
Базовый вариант

1. Ответ: 100. Очевидно, что все числа на доске всегда не меньше 1 и всегда не больше 100. Применив указанную операцию к парам (99, 98), (97, 96), ..., (3, 2), оставим на доске число 100 и 50 единиц. Далее каждый ход убирает одну единицу.

2. Ответ: $[(N+1)/2]$ девочек (квадратные скобки обозначают целую часть).

Оценка. Пусть в классе k девочек. Тогда девочка с наибольшей общительностью входит в компанию, где не меньше k человек. В такой компании все девочки имеют одинаковую общительность, поэтому там только одна девочка и не меньше $k-1$ мальчиков. Значит, $k+(k-1)\leqslant N$, то есть $k\leqslant[(N+1)/2]$.

Пример. При $k=[(N+1)/2]$ занумеруем девочек числами от 1 до k, мальчиков – числами от $k+1$ до N и создадим k компаний: в i-ю компанию входят i-я девочка и $i-1$ мальчиков с наименьшими номерами.



3. Продлим отрезок AK до пересечения с прямой BC в точке E. Два правых круга симметричны относительно горизонтальной средней линии нашего прямоугольника. Значит, углы CBH и DAH равны, откуда AHB – равнобедренный прямоугольный треугольник. Но тогда он равен треугольнику BHE (по двум углам и катету BH). А окружности, вписанные в равные треугольники, равны.

4. При смешивании двух соков получается какая-то промежуточная сладость между сладостями этих соков. Назовём кувшин *нормальным*, если он пустой или сладость в нём равна 10%; *кислым* – если сладость в нём меньше 10%, *сладким* – если больше. Аналогично дадим название чану, куда мысленно сольём весь сок.

Если какой-то кувшин нормальный, то переливание из него не изменит название кувшина справа. Значит, справа тоже нормальный кувшин, и так далее. Тогда все кувшины нормальные и переливаний не требуется.

Иначе имеем чередование кислых и сладких кувшинов (в частности, всего кувшинов чётное количество). Разобьём кувшины на пары соседних так, чтобы левый кувшин каждой пары был кислым. Переливанием в каждой паре сделаем сладкий кувшин нормальным. Значит, чан кислый или нормальный. Если бы разбили на пары по-другому, получили бы сладкий или нормальный чан. Следовательно, чан нормальный и все левые кувшины в парах опустели.

5. Ответ: обязательно. Рассмотрим стороны клеток на границе доски. Среди них поровну белых и чёрных (так как у доски есть чётная сторона). Каждая длинная сторона доминошки, выходящая на границу, даёт вклад из одной белой и одной чёрной стороны клетки. Тогда и среди коротких сторон, выходящих на границу, поровну белых и чёрных сторон клеток. Поэтому, если мы проделаем новые дверки наружу в каждой короткой стороне доминошки, прилегающей к краю доски, то добавлено будет одинаковое количество белых и чёрных дверок.

Рассмотрим теперь произвольную вертикаль из клеток и объединим в ней примыкающие друг к другу вертикальные доминошки в вертикальные полоски. В каждой получившейся полоске (если они есть) ровно две «горизонтальные» дверки, причём разного цвета (так как длина полоски чётна). Тогда в каждой вертикали поровну чёрных и белых дверок. То же верно и для горизонталей, а значит, и для всей доски.

Сложный вариант

1. Ответ: не всегда. Если учитель назовёт цифры 1 и 8, то любое число Коли будет давать тот же остаток от деления на 7, что и число 1111111 (поскольку отличается от Колиного на число, составленное из нулей и семёрок, которое кратно 7). Но число 1111111 на 7 не делится.

Замечание. Ещё одна «плохая» пара – это 2 и 9. В остальных случаях Коля может добиться желаемого (попробуйте доказать!).

2. Ответ: 5 ходов. Пусть K – исходный квадрат.

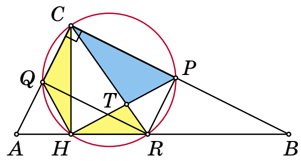
Оценка. Пусть ходов только 4. Ясно, что каждый из соответствующих четырёх квадратов должен содержать свою угловую клетку у K.

Если квадраты не покрывают K, то Кирилл ничего не узнает о количестве отмеченных клеток среди непокрытых.

Если же квадраты покрывают K, то какие-то из них пересекаются (иначе рассмотрим квадрат, содержащий центральную клетку, его сторона не меньше 1013; но тогда стороны остальных квадратов не больше 1012, и взяв из них два квадрата, примыкающих к одной стороне K, видим, что эта сторона покрыта не полностью).

Пусть на каждом ходу отвечали, что отмечена одна клетка. Тогда отмеченных клеток в K может быть как 4 (все его угловые клетки), так и меньше: возьмём любую клетку, попавшую в пересечение двух или более квадратов, и отметим её вместо углов K, попавших в эти квадраты.

Пример. Возьмём: 1) два квадрата со стороной 1013, покрывающих два противоположных угла; 2) центральную клетку; 3) два квадрата со стороной 1012, покрывающих два других противоположных угла. Первые два квадрата пересекаются как раз по центральной клетке, так что сложив первые два числа и вычтя третье, мы узнаем, сколько отмеченных клеток покрывают первые три квадрата. Остальное покрывают (без пересечений) оставшиеся два квадрата.



3. Ответ: эти выражения равны. Добавим к обеим суммам площадь треугольника RTP. Тогда надо сравнить площадь PCR и сумму площадей CHQ и PHR. Заметим, что PQ и CR – диаметры нашей окружности, поэтому $CPRQ$ – прямоугольник. Площадь PCR равна половине площади прямоугольника. Но у треугольников PHR и CHQ равные основания PR и CQ, а сумма их высот, опущенных на PR и CQ соответственно, равна PC. Поэтому их суммарная площадь – тоже половина площади прямоугольника.

4. а) Ответ: нет. Пусть 50 чисел равны 2, а остальные 50 равны –2. Тогда при любом разбиении их на две группы по 50 чисел произведения в группах будут одинаковы (так как отрицательных чисел чётное количество). Но расставив числа по кругу, чередуя положительные с отрицательными, получим контрпример.

б) Ответ: да. Разобьём числа по кругу на 25 пар соседних чисел. В каждой паре вычтем из большего числа меньшее. Пусть все разности больше 2. Тогда их произведение больше 2^{25}.

Но если в этом произведении разностей раскрыть скобки, то слагаемые (коих будет 2^{25}) можно сгруппировать по парам: произведение каких-то 25 исходных чисел минус произведение 25 оставшихся (будет именно знак минус из-за нечётности числа 25). Пар произведений будет $2^{25}:2=2^{24}$, и их сумма не превосходит 2^{25} по условию. Противоречие.

5. Для обозначения монет будем использовать надписи, которые сделаны на них.

1-*е взвешивание*: сравним $1+2+2+3+3+3$ и $5+5+5$. Минимальный возможный вес монет на первой чаше равен 14 г, а максимальный на правой – 15 г. Поэтому если левая чаша легче, то на ней именно такой набор монет (возможно, с перепутанными надписями), а на правой – три монеты массой 5 г.

2-*е взвешивание*: сравним $1+4+4+4+5^*$ и $3+3+3+5+5$, где 5^* – монета, про которую уже известно, что она весит 5 г, а 5 – монета про которую мы этого не знаем.

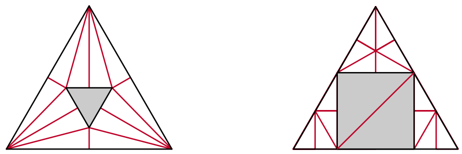
Минимальный возможный вес монет на первой чаше – 18 г, а максимальный на правой – 19 г. Значит, если левая чаша легче, то на всех монетах на весах надписи верные. Тогда и на оставшихся монетах 2, 2 и 4 надписи верные.

Если хотя бы одно из взвешиваний даст другой результат, то среди надписей есть ошибочные.

6. Ответ: необязательно в обоих пунктах.

а) Контрпример см. ниже слева. Острые углы прямоугольных треугольников равны 15° и 75°.

б) Контрпример см. ниже справа.



7. Ответы: может в обоих пунктах. Пусть вес исходного куска равен 1, а вес куска, оставшегося после первого отрезания, равен t. Тогда доля каждого отрезаемого куска равна $1-t$. Значит, вес второго отрезанного куска равен $t(1-t)$, а вес оставшегося равен $t-t(1-t)=t^2$ и так далее: после k-го отрезания вес оставшегося куска равен t^k, а вес отрезанного равен $(1-t)t^k$. Сократив на $1-t$, получим, что задачу можно переформулировать так: для некоторого t между 0 и 1 и натурального k нужно разбить числа $1, t, t^2, \ldots, t^k$ на группы с равными суммами (две в пункте а) и три в пункте б)).

а) Квадратное уравнение $x+x^2=1$ имеет корень t между 0 и 1 (потому, что при $x=0$ правая часть меньше 1, а при $x=1$ она больше 1). Отдав одному котёнку первый кусочек, а другому – два следующих, хозяйка получит желаемый результат.

б) Аналогично, найдётся число t между 0 и 1, для которого $t+t^3=1$. Тогда $t^2+t^4+t^5+t^6+t^7=t(t+t^3)+t^6+t^4(t+t^3)=t+t^4+t^6=t+t^3=1$, и, отдав одному котёнку первый кусочек, другому – второй и четвёртый, а третьему – третий и с пятого по восьмой, получим требуемое.

Замечание. Для четырёх котят тоже есть пример, а для большего числа ответ нам неизвестен.

LXXXVIII МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА.

Избранные задачи

1. Ответ: да.

Один из примеров см. на рисунке справа.

1	3	$3^3\cdot 5^2$
5	$-3^3\cdot 5$	-3
$3^4\cdot 5$	-5	-1

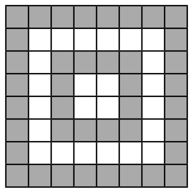
2. Ответ: 11. Рассмотрим пару участников. Если это два правдолюба, то на вопросы друг о друге оба дают ответ «да», если они знакомы, и «нет», если незнакомы. Если это два лжеца, то наоборот. Наконец, если один из знакомых участников – правдолюб, а другой – лжец, то правдолюб отвечает «да», а лжец «нет»; если же они незнакомы, то, наоборот. Значит, чтобы ответов «да» было как можно меньше, нужно, чтобы все лжецы были знакомы друг с другом, а все правдолюбы – не были. Если при этом лжецов k, а правдолюбов $12-k$, то будет $k(12-k)$ ответов «да». Наименьшее возможное значение этого выражения – 11 (при $k=1$ или 11).

3. Ответ: и то, и другое возможно. Раскрасим плоскость в 5 цветов, как показано на рисунке. Конь в каждой клетке каждого цвета бьёт 4 клетки того же цвета и по одной клетке каждого из остальных цветов. Поэтому для решения пункта а) можно взять все клетки каких-то 3 цветов, для решения пункта б) – все клетки каких-то 2 цветов. Есть и другие примеры.

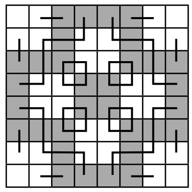
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2

4. Ответ: 5100.

Пример. Разобьём квадрат на 50 слоёв толщиной в 1 клетку и покрасим их попеременно в чёрный и белый цвета (внешний слой чёрный). Покрашено чёрным будет $99\cdot 4+95\cdot 4+\ldots+3\cdot 4=204\cdot 25=5100$ клеток. (См. также статью И. Акулича «Огородное занятие» в «Квантике» № 3 за 2019 год.)



Оценка. Отметим центры клеток и соединим отрезком центры соседних по стороне клеток разного цвета. Тогда угловые клетки не будут соединены ни с одной другой клеткой, клетки у границы будут соединены ровно с одной клеткой, клетки не у границы будут соединены ровно с двумя клетками. Значит, все клетки, кроме угловых, разобьются на цепочки, концы которых лежат на границе, и циклы.



В каждом цикле и в каждой цепочке цвета клеток чередуются, поэтому в цикле количество чёрных и белых клеток совпадает, а в цепочке – совпадает или отличается на 1. Всего цепочек $392/2=196$, поэтому чёрных клеток максимум на $196+4=200$ больше. То есть чёрных клеток не больше 5100.

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем
заочном математическом конкурсе.

Третий этап состоит из четырёх туров (с IX по XII) и идёт с мая по август.

Высылайте решения задач X тура, с которыми справитесь, не позднее 5 июля в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция находится по адресу kvantik.com/short/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, г. Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте www.kvantik.com. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

X ТУР

46. Петя и Вася родились в разные числа одного месяца. В записи обоих чисел используется одна и та же цифра, причём других цифр там нет. Если бы оба мальчика родились на день раньше, то, записав числа их рождения, мы не нашли бы там одинаковых цифр. В каком месяце родились Петя и Вася?

47. Катя высадила в ряд несколько тюльпанов, а Таня – несколько гвоздик. Катин ряд (от первого цветка до последнего) оказался в 15 раз длиннее Таниного, а цветков на нём только в 13 раз больше, чем на Танином. Расстояние между любыми соседними цветками равно 10 см. Какова длина Катиного ряда и какова длина Таниного? (Толщину цветков считайте нулевой.)

Авторы задач: Борис Френкин (46), Татьяна Казицына (47), Михаил Мурашкин (48), Константин Кноп (49), Георгий Караваев (50)

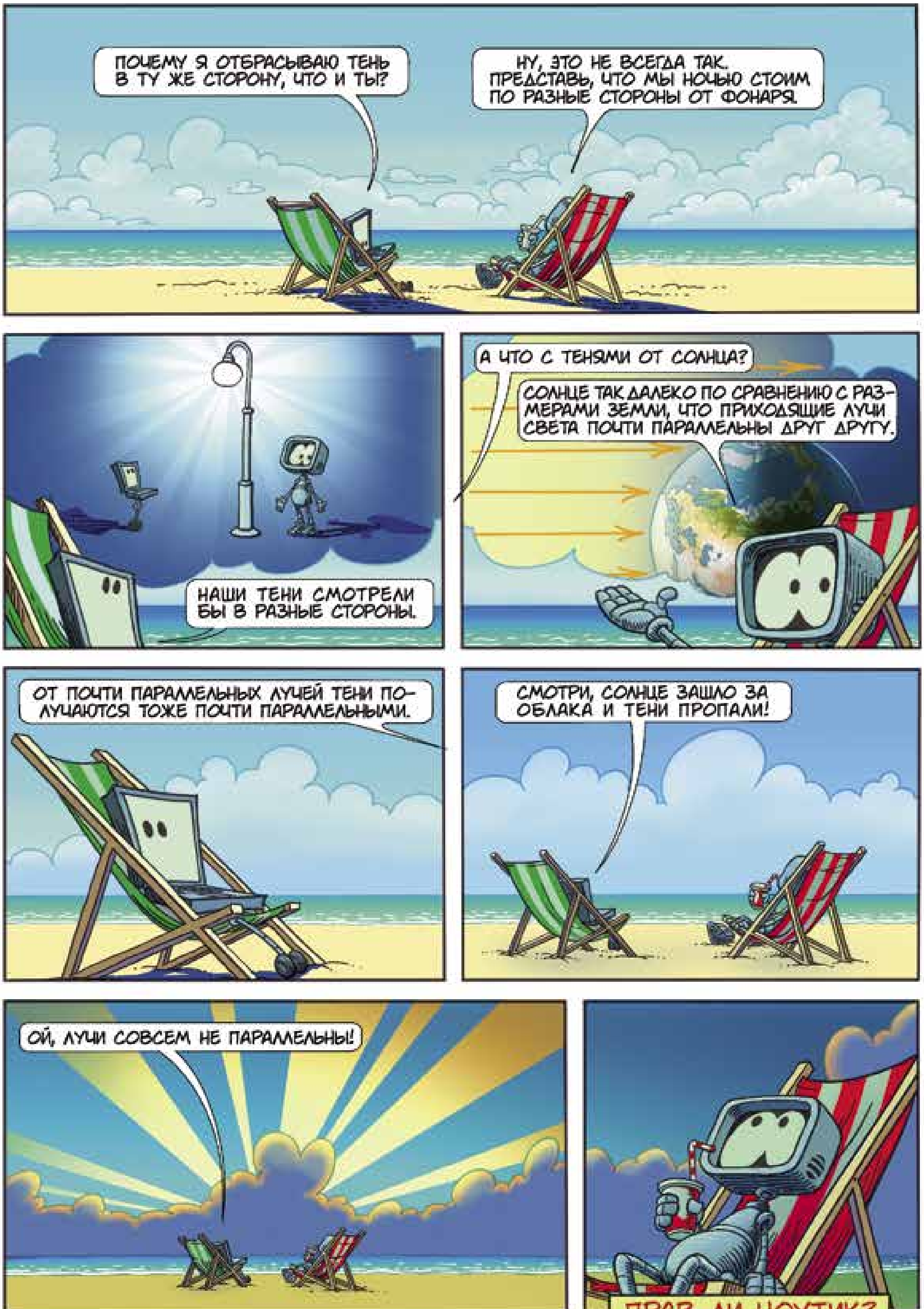
48. В поход пошли 10 туристов, каждый день дежурили двое из них, и ни одна пара не дежурила более одного раза. При этом ровно шестеро туристов дежурили с тремя другими, ровно один – с пятью другими и ровно двое – с девятью другими. Сколько дней длился поход? Укажите все возможные варианты.

49. Можно ли разрезать ромб с углами 60° и 120° на 6 равных (и по форме, и по размеру) частей так, чтобы центр ромба оказался строго внутри (не на границе) одной из этих частей?

50. У Паши есть 5 грузов, которые весят 1, 2, 3, 4 и 5 граммов (Паша это знает, но с виду грузы одинаковы), а также электронные весы: если на них поставить один или несколько грузов, они покажут их суммарный вес. У весов сломался экран, поэтому вместо любой цифры они показывают «?». Например, число 6 эти весы покажут как «?», а число 2025 – как «????». Веса каких из этих 5 грузов можно однозначно восстановить, пользуясь только этими электронными весами? (Можно делать сколько угодно взвешиваний.)

Художник Николай Крутиков

ПАРАЛЛЕЛЬНЫ ЛИ ЛУЧИ?



Авторы: Николай Андреев, Максим Прасолов Художник Yustas

ISSN 2227-7986
25006
9 772227 798251