ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 11 | ноябрь 2024

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

№ 11

ноябрь 2024

ПРИКЛЮЧЕНИЯ ХОЛЕРНОГО ВИБРИОНА

АПЕРИОДИЧЕСКАЯ ПЛИТКА

ВОЛК, МЕДВЕДЬ И ШАРИКИ

Enter

НАГРАДЫ ЖУРНАЛА

2017 Минобрнауки России
ПРЕМИЯ «ЗА ВЕРНОСТЬ НАУКЕ»
за лучший детский проект о науке

2021 БЕЛЯЕВСКАЯ ПРЕМИЯ
за плодотворную работу и просветительскую деятельность

2022 Российская академия наук
ПРЕМИЯ ХУДОЖНИКАМ ЖУРНАЛА
за лучшие работы в области популяризации науки

2024 Победитель конкурса в номинациях
ЛУЧШИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ СРЕДНЕГО ШКОЛЬНОГО ВОЗРАСТА
ЛУЧШЕЕ ДИЗАЙНЕРСКОЕ РЕШЕНИЕ

Журнал «Квантик» № 11, ноябрь 2024 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Т. А. Корчемкина, Е. А. Котко, Г. А. Мерзон, М. В. Прасолов, Н. А. Солодовников
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Алексей Вайнер

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя:
119002, г. Москва,
Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**

Подписка на журнал в отделениях почтовой связи Почты России:
Каталог Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)
Онлайн-подписка на сайте Почты России:
podpiska.pochta.ru/press/ПМ068

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 30.09.2024
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831) 218-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+

www.kvantik.com kvantik@mccme.ru vk.com/kvantik12 t.me/kvantik12

СОДЕРЖАНИЕ

Математические сюрпризы

Хайдар Нурлигареев

Апериодическая плитка

Художник Алексей Вайнер

Предположим, что в нашем распоряжении имеется некоторый многоугольник, а также копировальная машина, при помощи которой мы можем изготовить неограниченное количество его копий – такие копии мы будем называть *плитками*. Зададимся вопросом: можно ли этими плитками замостить плоскость без пробелов и наложений? И как по внешнему виду плиток понять, каким будет ответ на этот вопрос?

В простейших случаях ответ можно получить непосредственно, прикладывая плитки друг к другу. Например, треугольными плитками замостить плоскость можно, какой бы треугольник нам ни выдали. В самом деле, два треугольника можно приложить друг к другу так, чтобы они образовали параллелограмм. Из параллелограммов легко сконструировать полоску, а из полосок – искомое замощение (рис. 1).

Точно так же обстоит дело с четырёхугольниками. Действительно, два четырёхугольника складываются в шестиугольник (или четырёхугольник) с попарно параллельными равными сторонами. Из таких шестиугольников, опять же, мы сначала образовываем полоску, а потом и замощение целиком (рис. 2).

А вот только шестиугольными плитками, изображёнными на рисунке 3, обойтись не получится: по клеточкам видно, что в «вырезанный» угол просто не влезет полностью никакая часть такого шестиугольника.

А как быть, если наш многоугольник более сложной формы? Хочется применить тот же метод, что сработал для треугольников и четырёхугольников: сложить из нескольких плиток некоторый кластер сродни параллелограмму, из которого сначала собрать полоску, а затем – распространить эту полоску на всю плоскость. Например, для тетрамино в форме буквы Т такой кластер состоит всего из одной плитки (рис. 4, слева), для пентамино в форме буквы П – из двух плиток (рис. 4, по центру), а для пятиугольника, который можно получить, разрезав правильный шестиугольник на три равные части, – из трёх (рис. 4, справа).

Так получаются периодические замощения. Более точно, замощение называют *периодическим*, если найдутся хотя бы два таких направления, что замощение можно совместить с самим собой, сдвинув в этом направлении. В примерах выше мы образовываем полоску из кластера, сдвигая его в од-

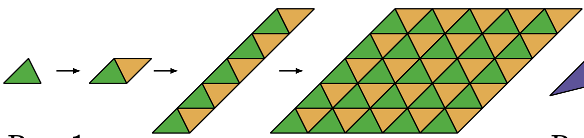


Рис. 1

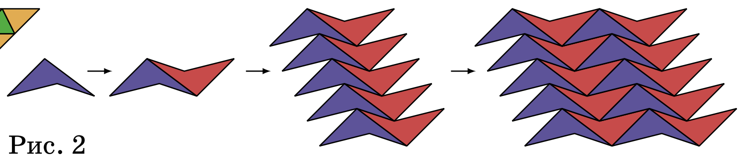


Рис. 2

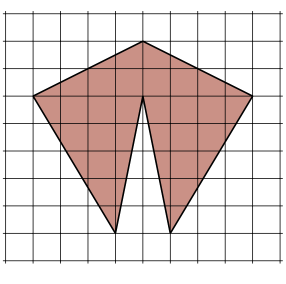


Рис. 3

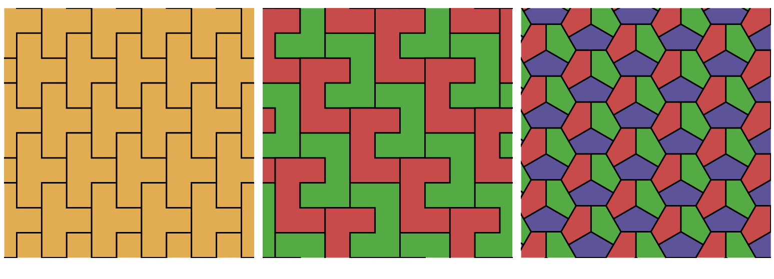


Рис. 4

ном из таких направлений. А сдвигая полоску уже в другом направлении, получаем всё замощение целиком.

Как искать кластер, который бы периодическим образом продолжился до замощения всей плоскости? Можно действовать следующим образом. Поместим первую плитку в центр. Затем попробуем обложить её другими плитками со всех сторон всеми возможными способами, на каждом шагу проверяя, не получился ли уже у нас искомый кластер. Если сформировать первый слой удалось, но кластер ещё не найден – окружим начальную плитку вторым слоем, и так далее. Скорее всего, этот процесс вскоре закончится: либо мы найдём периодическое замощение, либо на каком-то числе слоёв всё застопорится. На сегодняшний день не придумано плиток, для которых второй случай реализуется с числом слоёв, большим шести.[1]

А может ли случиться так, что мы можем обложить плитку сколь угодно большим числом слоёв, но не существует кластера, который бы продолжался до периодического замощения? Это бы означало, хотя мы и не будем обосновывать этот факт строго, что данными плитками замостить плоскость можно, но ни одно из замощений не является периодическим. Плитки, обладающие таким свойством, как и любое замощение ими, называют *апериодическими*.

До недавнего времени существование апериодических плиток было под вопросом. При этом апериодические наборы плиток, то есть когда в копировальную машину можно положить не один многоугольник, а несколько, известны уже довольно давно. Так, ещё в 1971 году Рафаэль Робинсон обнаружил апериодический набор из 6 многоугольников, копиями которых можно замостить плоскость, но только непериодическим образом (этот набор изображён на рисунке 5, а одно из возможных замощений – на рисунке 6).[2]

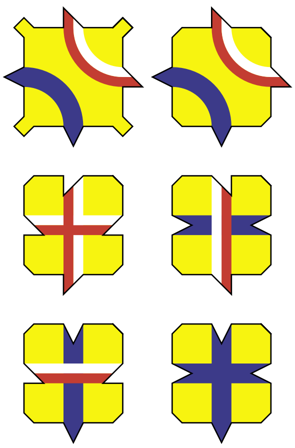


Рис. 5.
Плитки Робинсона

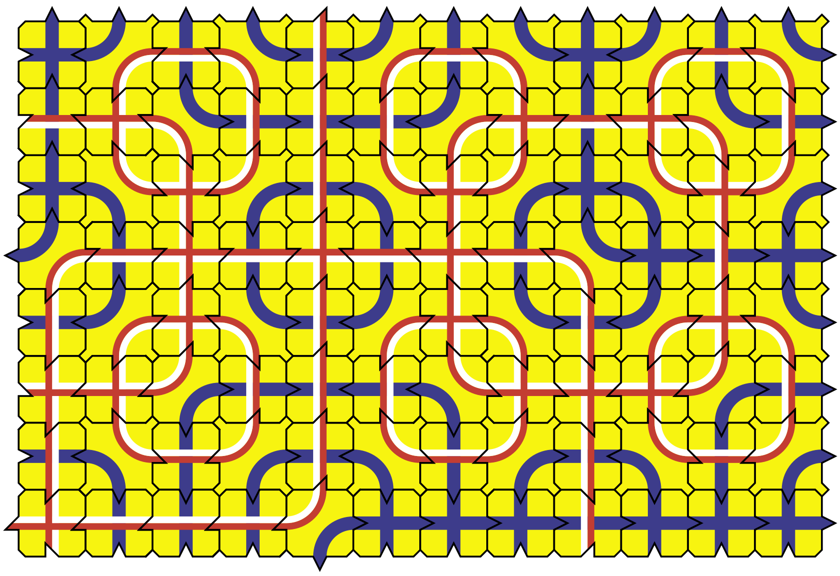


Рис. 6

[1] См. статью Х. Нурлигареева «Плитки и числа Хееша» в «Квантике» № 10, 2019.
[2] См. статью Х. Нурлигареева «Мозаика Робинсона» в «Квантике» №10, 2020.

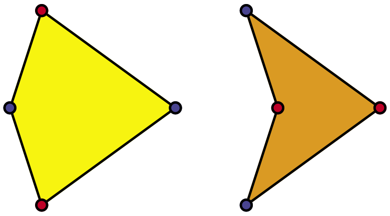


Рис. 7. Плитки Пенроуза прикладываются друг к другу таким образом, чтобы синие вершины совмещались с синими, а красные с красными

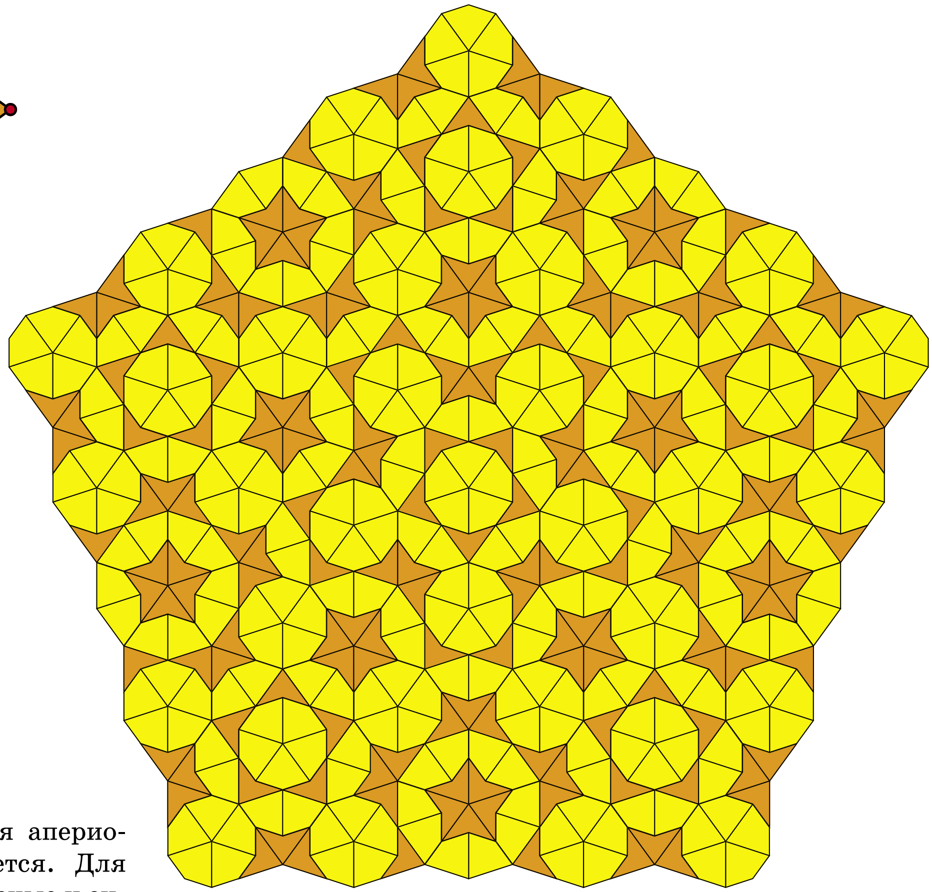


Рис. 8. Вот такая красивая апериодическая мозаика получается. Для упрощения восприятия красные и синие вершины тут не обозначены

А в 1974 году Роджер Пенроуз предложил апериодический набор из 2 плиток (рис. 7 и 8).

В течение последующих четырёх десятилетий учёные безуспешно пытались найти апериодическую плитку, пока, наконец, в марте 2023 года Дэвид Смит, Джозеф Майерс, Крейг Каплан и Хаим Гудман-Штраус не представили на суд математической общественности пример многоугольника, который допускает исключительно апериодические замощения. Это 13-угольник, составленный из восьми одинаковых четырёхугольников, каждый из которых получается разрезанием равностороннего треугольника на три одинаковые части (рис. 9), – за характерную форму его сразу же окрестили «шляпой».

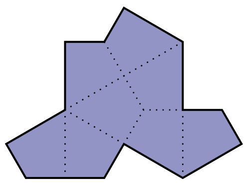


Рис. 9

Фрагмент замощения «шляпами» представлен на рисунке 10.

Если присмотреться к рисунку, станет ясно, что плитки в этом замощении ориентированы по-разному: серые, белые и голубые плитки можно совместить друг с другом не переворачивая, а вот синие необходимо пере-

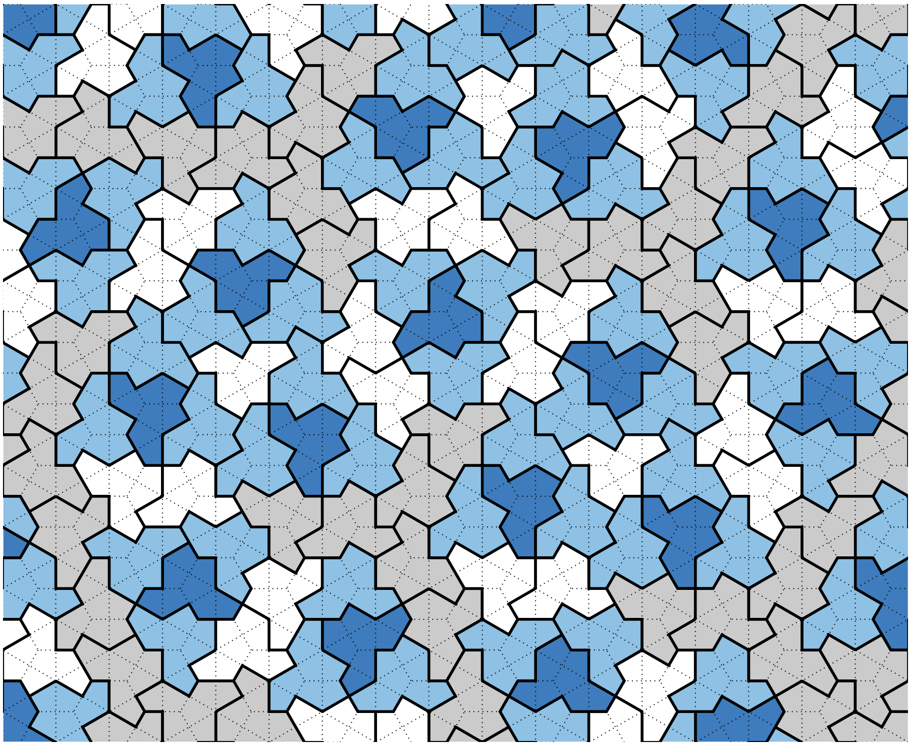


Рис. 10

вернуть, чтобы они в точности накладывались на остальные плитки. Как выясняется, из «шляп» невозможно составить замощение, не переворачивая часть плиток, как ни пытайся. Фигуру, которая лишена этого недостатка, придумать можно: всё тот же коллектив авторов привёл пример такой фигуры, названной «привидением», в конце мая 2023 года (рис. 11).

Своими очертаниями «привидение» смутно напоминает «шляпу», и это не случайно. Оно было получено из «шляпы» некоторой деформацией, которая позволила Смиту, Майерсу, Каплану и Гудману-Штраусу создать бесконечное семейство фигур, копиями каждой из которых можно замостить плоскость только непериодически.

Границы «привидения» представляют собой дуги окружностей, но при желании их можно было бы заменить ломаными линиями, чтобы «привидение» было «честным» многоугольником. Выбор дуг в качестве границ продиктован, прежде всего, эстетическими соображениями.

В заключение этой статьи хотелось бы показать, как апериодические замощения нашли себя в искусстве. Так, Роберт Фэтхауэр, продолжатель традиций Маурица Корнелиса Эшера, замостил плоскость рубашками (рис. 12). А Йошиаки Араки даже сделал сайт www.t3puzzle.com/a/, где любой желающий может создать свой собственный рисунок на плитке типа «шляпы» или её деформированных версий, которые также являются апериодическими плитками. В качестве примеров, которые получаются из деформаций «шляпы», Йошиаки приводит изображения птицы, черепахи и пингвина.

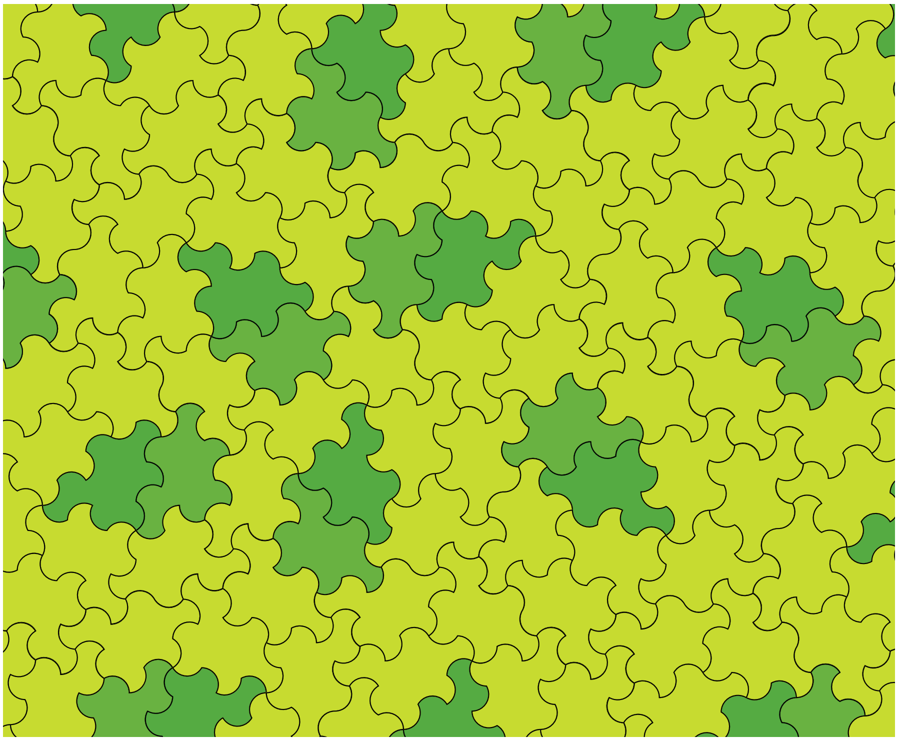


Рис. 11

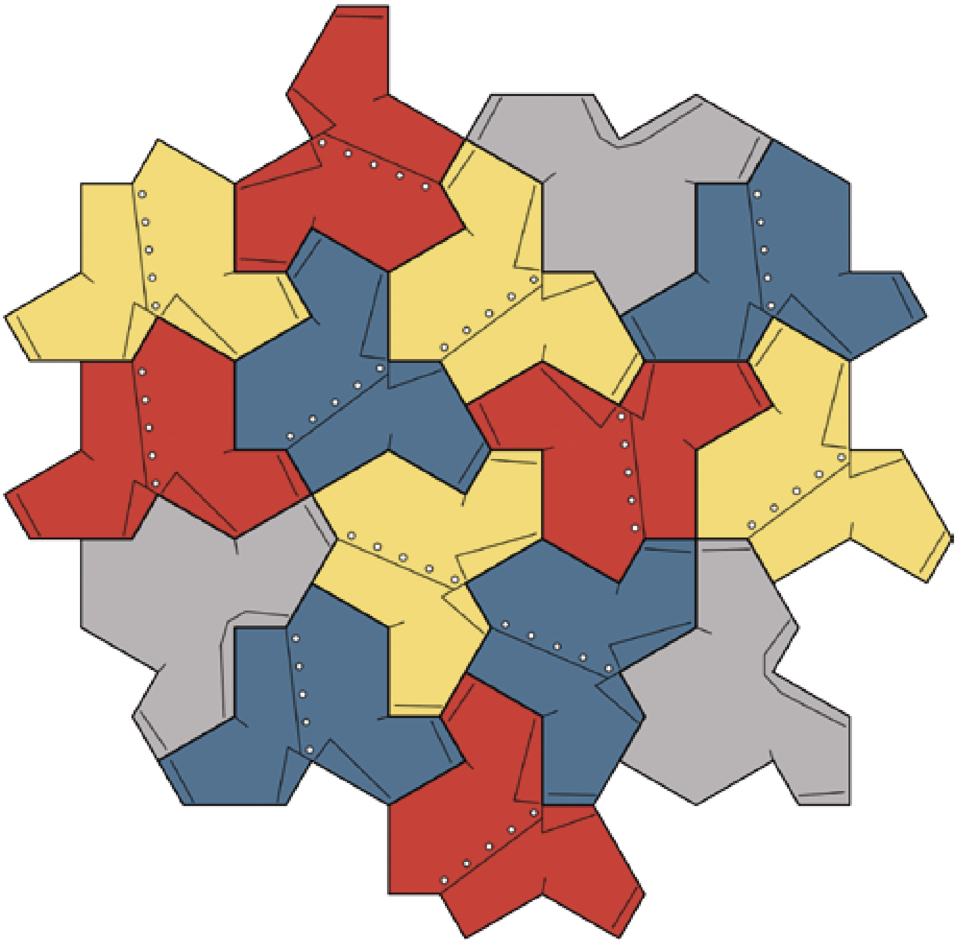


Рис. 12

Игорь Акулич

ВОЛК, МЕДВЕДЬ И ШАРИКИ

Немало шума понаделал в своё время многосерийный мультфильм «Ну, погоди!». Более полувека назад его с упоением созерцали и взрослые, и дети, да и сейчас многие не прочь пересмотреть. Отлично помню эпизод из 2-го выпуска: волк исполняет на гитаре что-то вроде «Очи чёрные», и тут мимо проходит заяц с барабаном и тремя воздушными шариками.

Такого безобразия хищник, естественно, вытерпеть не мог. Он ловко направил зайца в глухой закоулок, после чего для начала расправился с шариками: два из них лопнул с помощью папиросы, а третий... по случайности проглотил! И тут же поплатился за своё хулиганство – под действием подъёмной силы взмыл в воздух.

Дальнейшая судьба агрессора незавидна: сильно пострадал, да ещё и гитару сломал. Поделом!

Но, помню, после просмотра фильма один мой сверстник искренне возмутился:

– Как это так? Три шарика не могли поднять маленького зайчишку, а потом лишь один из них поднял целого волка!

Мы с ним подробно обсудили сей вопрос и пришли к единственно возможному, на наш взгляд, объяснению: барабан у зайца был чугунный! Так что ушастый оказался изрядно тяжелее зубастого, потому и не взлетел. Всё вроде бы стало на свои места, но... не тут-то было! Гораздо более весомая (или, правильней сказать, *невесомая*) несуразность крылась в другом. В чём же? Давайте разберёмся.

Чтобы шарик поднял волка, нужно, чтобы волк вместе с шариком был легче воздуха. То есть чтобы суммарная масса волка с шариком была меньше массы воздуха, который занимает тот же объём. Оценим его. Этот объём воздуха должен перевесить волка, поэтому объём воздуха должен превосходить объём волка хотя бы во столько раз, во сколько раз *плотность* волка больше плотности воздуха (плотность – это масса вещества в единице объёма). Волк (как и человек, и прочие млекопитающие) в основном состоит из воды, так что и плотности их близки (что подтверждается их способностью как плавать, так и тонуть). Плотность воздуха почти в тысячу раз меньше плотности воды, что можно посмотреть в справочнике. Значит, искомый объём воздуха в тысячу раз больше объёма волка.

Таким образом, чтобы шарик был способен поднять волка, его объём должен почти в тысячу раз превосходить объём волка. Попробуй проглоти!

А теперь давайте перенесёмся в другой мультфильм, вышедший примерно в те же годы, – «Винни-Пух». Во время охоты за мёдом главный герой также использовал воздушный шарик, чтобы добраться до логова *очень подозрительных* (и даже, как предположил медведь, *неправильных*) пчёл. Выглядело это примерно так, как на рисунке справа.

Вооруженные результатами наших предыдущих исследований, мы можем сделать аналогичный вывод: объём шара должен во много-много-много раз превосходить объём пассажира, чего в данном случае никак не наблюдается. Конечно, можно вспомнить, что Винни-Пух был *плюшевый*, и его плотность должна быть ниже плотности воды – где-нибудь вдвое. Однако и тогда соотношение объёмов шара и медведя всё-таки достигает сотен раз – не спасает!

Впрочем, в случае с медведем имеется ещё более вопиющий и противоречивый факт, подтверждающий невозможность показанной ситуации. Какой? Пересмотрите мультфильм и обнаружьте его. А если не сумеете – ознакомьтесь с ответом.

Художник Анна Рацкевич

Григорий Идельсон

Приключения ХОЛЕРНОГО ВИБРИОНА

Окончание. Начало в № 10

ХОЛЕРА В РОССИИ И В ЕВРОПЕ

Вторая пандемия началась в Бенгалии в 1829 году. В Россию она пришла через Тифлис, Баку и Астрахань – чему, вероятно, способствовало возвращение русской армии после русско-турецкой войны.

Из Астрахани болезнь быстро распространялась вверх по Волге со скоростью движения бурлаков: 7 августа 1830 года – Саратов, 25 августа – Самара, 7 сентября – Казань, а 15 сентября болезнь пришла в Москву. Власти закрыли Макарьевскую ярмарку. По словам Пушкина:

На дороге встретил я Макарьевскую ярманку, прогнанную холерой. Бедная ярманка! она бежала, как пойманная воровка, разбросав половину своих товаров, не успев пересчитать свои барыши!

Пушкина холера застала в Болдино, и он очень стремился в Москву, беспокоясь о своей невесте. Карантины поначалу были не очень строгими, как описывает Пушкин:

Несколько мужиков с дубинами охраняли переправу через какую-то речку. Я стал расспрашивать их. Ни они, ни я хорошенько не понимали, зачем они стояли тут с дубинами и с повелением никого не пускать. Я доказывал им, что, вероятно, где-нибудь да учрежден карантин, что я не сегодня, так завтра на него наеду, и в доказательство предложил им серебряный рубль. Мужики со мной согласились, перевезли меня и пожелали многие лета.

Но постепенно меры усилились, того же Пушкина на въезде в Москву развернули и отправили обратно в Болдино.

Новая никому не знакомая болезнь, в сочетании со строгими карантинными мерами и совершенно бессмысленными медицинскими рекомендациями, вызвала большое брожение умов в народе. Народ толковал об отравителях.

Несмотря на строгие карантины, весной 1831 года холера возобновилась. В мае 1831 года она появилась в Ярославле. К этому моменту власти поняли, что надо позаботиться и о водных путях, но не успели: 14 июня холера пришла в Петербург: выявили двух больных рабочих, прибывших на судах из Вытегры. 22 июня в Петербурге произошел холерный бунт. Народ разгромил холерную больницу, повыкидывал из окон врачей. Бунт был усмирён, даже без кровопролития, благодаря смелому вмешательству царя Николая Павловича.

Николай I усмиряет холерный бунт на Сенной площади.

В общей сложности в России переболело холерой около 500 тысяч человек, около 200 тысяч из них умерли.

Во время польского восстания 1830–31 годах холера вместе с русской армией пришла и в Польшу. 29 мая в Пултуске умер от холеры главнокомандующий русской армии Иван Дибич, а 15 июня в Витебске – наместник Польши великий князь Константин Павлович.

С польскими беженцами холера пришла в Пруссию. Прусские власти прекрасно знали об опасности, но не смогли защитить границу.

В июне холера пришла в Венгрию (250 тысяч больных, 100 тысяч умерших), в августе – в Берлин, в октябре – в Гамбург, Лондон и Париж. После чего спокойно заглохла сама собой до следующей пандемии в 1848 году.

КАК НАУЧИЛИСЬ БОРОТЬСЯ С ХОЛЕРОЙ

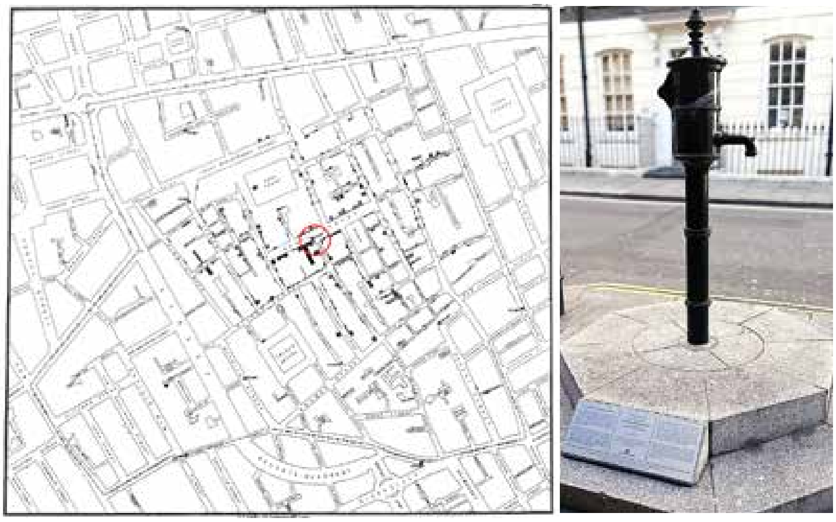
В 1831 году 22-летний ирландский врач Уильям Брук О'Шонесси исследовал состав мочи и крови у холерных больных и предположил, что, если вводить человеку воду и соли, это может помочь. Он впервые попробовал внутривенно ввести солевой раствор собаке.

Вскоре после этого доктор Томас Латта решился применить рекомендации О'Шонесси для спасения умирающих больных. Вот как он описывает свой первый опыт:

Первым объектом эксперимента стала пожилая женщина. Она, по-видимому, достигла последних мгновений своего земного существования, и теперь ничто не могло ей повредить – более того, она была настолько слаба, что я боялся, что она умрёт до того, как я подготовлю свой аппарат. Вставив трубку в подкожную вену, я с волнением внимательно наблюдал за эффектом; унция за унцией вводилась, но видимых изменений не наблюдалось. Постепенно я заметил, что дыхание стало менее тяжёлым, а вскоре и заостренные черты лица, и запавшие глаза, и отвисшая челюсть, бледность и холодность, несущие на себе явную печать смерти, сменились более живыми красками; давно утихший пульс вернулся на запястье; сначала маленький и быстрый, постепенно он становился все отчётливее… и за короткий промежуток времени в полчаса, когда было впрыснуто шесть пинт [почти 3,5 л], женщина твёрдым голосом заявила, что не чувствует беспокойства, стала шутить и полагала, что всё, что ей нужно, это немного поспать.

Доктору Латте повезло: первый опыт был удачным, но последующие вовсе не всегда были столь же удачны. Никто не знал точных пропорций солевого раствора, который надо вводить, а ведь при неверных пропорциях эффект будет разрушительным. Доктор Латта вскоре умер, не успев довести исследование до конца, эпидемия холеры закончилась, чтобы вернуться в Англию через 15 лет, и его опыты были забыты до начала XX века. Только тогда пропорции солей в солевом растворе были хорошо изучены, и введение воды и солей стало общепринятым методом лечения холеры.

Эпидемия холеры возобновилась в 1846 году и волнами продолжалась до 1854 года. На этот раз, судя по всему, она распространилась через паломников в Мекку. По-прежнему не было ясно, каким образом болезнь передается. Существовали две конкурирующие теории. По одной, она передавалась через «миазмы», то есть через ядовитые испарения. А по другой – через «зародыши», то есть через воду и пищу. Слово «зародыши» не означало «бактерии»: о том, что болезни переносятся микроорганизмами, тогда никто не знал.



Слева – карта вспышки холеры в лондонском районе Сохо. Чёрными столбиками обозначены случаи заболевания. В центре поражённого квартала находится заражённая колонка (обозначена на карте красным). В память об открытии Сноу, колонка до сих пор стоит на том же месте (фотография справа)

В 1854 году вспышка холеры поразила лондонский район Сохо. Доктор Джон Сноу нарисовал карту, на которой отметил, где жили заболевшие люди. Оказалось, большинство их жило в одном определённом квартале, а в центре квартала находилась водоразборная колонка, откуда местные жители брали воду. Тогдашние колонки были подсоединены не к централизованному водопроводу, а представляли собой насосы, которыми качали колодезную воду. В кирпичных стенках

Художник Мария Усеинова

резервуара колодезной воды были трещины, и туда просачивалось содержимое выгребных ям. Несмотря на убедительные доказательства, идеи Сноу о том, что холера передается через недостаточно чистую сырую воду, были признаны только через 12 лет.

ХОЛЕРА В НАШИ ДНИ

В наше время в развитых странах холера редко представляет такую опасность, как раньше: из водопровода течёт очищенная вода; большинство людей, если есть опасность заражения, пьют только кипячёную воду; если даже человек заболеет, ему легко могут ввести в больнице необходимое количество жидкостей. В 1965 году разработали специальную жидкость, содержащую, помимо воды, необходимые соли и глюкозу. Такой жидкостью можно поить больного, даже если поблизости нет больницы и нет возможности вводить жидкость прямо в кровь.

Но в неразвитых странах иногда происходят вспышки холеры. В 2010 году была настоящая эпидемия в Гаити. Переболело холерой 700 тыс. человек, умерло около 10 тысяч. Это очень много, но всё же это составляет 1,4% заболевших, а не 40%, как было в XIX веке. Как выяснилось, болезнь принесли войска миротворцев ООН из Непала. Они нарушали все санитарные правила и выливали свои сточные воды в реку Артибонит. Они сами приехали из района, где холерный вибрион живёт в воде, были адаптированы к таким количествам вибриона и не болели, но жители Гаити, никогда до того не встречавшиеся с холерой и пившие воду из реки, заразились.

Фото: Lahiny Pierre

На фотографии: войска ООН, вопреки всем правилам, выливают сточные воды в реку

УЛИТКА ТУРБО И МОНСТРЫ

Приводим задачу с недавно прошедшей 65-й Международной математической олимпиады (автор Chu Cheuk Hei из Гонконга). Попробуйте свои силы!

Улитка Турбо играет на доске, имеющей 2024 строки и 2023 столбца.

В 2022 клетках доски прячутся монстры. Изначально Турбо ни про одного из них не знает, где тот находится, но она знает, что в каждой строке, кроме первой и последней, есть ровно один монстр и что в каждом столбце не более одного монстра.

Турбо делает серию попыток, чтобы пройти из первой строки в последнюю. При каждой попытке она может выбрать в качестве начальной любую клетку в первой строке, а затем совершает серию перемещений из клетки в соседнюю клетку, имеющую общую сторону. (Ей разрешается возвращаться в ранее посещённые клетки.) Если она посещает клетку с монстром, то её попытка завершается, и она переносится обратно в первую строку, чтобы начать новую попытку. Монстры не двигаются, а Турбо запоминает, есть ли в каждой посещённой ею клетке монстр. Если она достигнет любой клетки в последней строке, её попытка завершается и игра оканчивается.

Определите такое наименьшее n, что у Турбо есть стратегия, которая, независимо от местонахождений монстров, гарантирует достижение последней строки за n попыток или раньше.

Художник Алексей Вайнер

Станислав Кикоть

ПРОВЕРКА ПО ШИРИНЕ

Это была вторая демонстрация взаимодействия беспилотного легкового автомобиля с пешеходами. На первой на дорогу ставили манекен, машина его распознавала как человека и перед ним останавливалась. Теперь нужно было показать что-то более впечатляющее.

Наш автомобиль предназначался для того, чтобы ездить по небольшим дорогам на частной территории (такой, как больница или завод с несколькими корпусами), где иногда ходят люди. К этому времени мы уже научились и пропускать пешеходов, и объезжать неподвижные препятствия, и только-только начинали осознавать необходимость модуля, принимающего решение «пропустить или объехать».

Действительно, если человек переходит дорогу, то автомобиль должен не крутить рулём, а остановиться и ждать, пока человек пройдёт. А вот если человек идёт по краю дороги, то его можно попытаться объехать.

Для движения по пустой дороге мы реализовали один из классических алгоритмов, который по границам дороги и положению автомобиля постоянно уточнял траекторию движения и мог при необходимости учитывать неподвижные препятствия. Он работал неплохо, но имел недостаток: в небольшом числе «мёртвых точек» алгоритм не успевал найти корректную траекторию за разумное время. Поэтому в логику работы беспилотника добавили правило: если на каком-то шаге не получается быстро «обновить» траекторию, то нужно двигаться «как и ехал», по последней корректно подсчитанной траектории. Автомобиль стал передвигаться стабильнее. Задача движения по пустой дороге была решена, и мы начали работать над взаимодействием с другими участниками движения.

За несколько дней перед демонстрацией руководитель нашей команды предложил решать вопрос «пропустить

или объехать» с помощи проверки по ширине. Пусть на проезжей части находится препятствие. Измеряем расстояние от него до левой и правой границ дороги и сравниваем с шириной машины. Если по ширине машина может проехать хотя бы с одной стороны с небольшим запасом, то шлём ей траекторию объезда, иначе – траекторию остановки. И молодой человек собственноручно написал этот кусочек кода.

Демонстрация прошла на ура. Ставили манекен на край дороги – машина его объезжала. Ставили посередине – машина останавливалась. Все были опьянены успехом. Руководителя носили на руках. Ещё бы: казалось, что за пару дней он полностью решил проблему взаимодействия с пешеходом.

А на следующий день наступило разочарование. Сначала беспилотник несколько раз попытался объехать переходящих дорогу людей. А потом он всем на удивление поехал в беседующую посередине дороги пару. Каждого из людей по отдельности ширина дороги позволяла объехать, а траекторию объезда обоих беспилотник построить не смог, и сработало правило движения по последней удачно рассчитанной траектории.

С тех пор много воды утекло, было написано много нового кода и переписано старого, и беспилотник больше не едет в толпу. А проверка по ширине временно отключена, но её код не удалён. Вдруг пригодится?

Вопросы.

1. Какие изменения в код вы бы внесли для корректной реакции на группы объектов?

2. Как правильно принимать решение, пропускать или объезжать идущего пешехода? Попробуйте придумать алгоритм, использующий положение, направление движения и скорость пешехода. Как по этим данным понять, идёт ли пешеход вдоль дороги или переходит её?

Художник Мария Усеинова

Никита Солодовников

КУБИК И ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ

Сложим строчку из трёх чисел 1 2 1 с такой же строкой, но только сдвинув числа на один шаг вправо:

1	2	1	
	1	2	1
1	**3**	**3**	**1**

Сложив числа в каждом столбике, мы из строки 1 2 1 получили строку 1 3 3 1. Повторим операцию с новой строкой

1	3	3	1	
	1	3	3	1
1	**4**	**6**	**4**	**1**

С каждым следующим шагом длина строки увеличивается на 1. Нетрудно сделать по этому правилу и шаг назад: строке **1 2 1** должна предшествовать строка **1 1**, а ей, в свою очередь, строчка из одной **1**. Если расположить эти строки одна под другой, получится начальная часть *треугольника Паскаля*[1]:

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1

Обычно треугольник Паскаля строят так: по краям треугольника ставят единицы, а дальше по очереди заполняют строки: каждое число получают как сумму двух его верхних соседей, левого и правого.

Задача 1. Сложите числа в первых нескольких строках треугольника Паскаля. Как связаны между собой суммы в соседних строках?

Соответствие кубикам

Подвесим квадрат за одну из вершин. Его вершины окажутся на трёх различных высотах. Посчитаем, сколько вершин оказалось на какой высоте (рис. 1). Проделаем то же самое с кубиком (рис. 2).

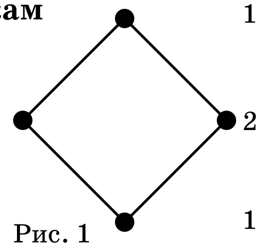


Рис. 1

Для квадрата получилась строка 1 2 1, а для куба 1 3 3 1, точно как в треугольнике Паскаля. Сложение строк, показанное выше, можно увидеть и в переходе от квадрата к кубику. Для этого рассмотрим противопо-

[1] О треугольнике Паскаля было рассказано в статье Г. А. Мерзона «Математическая черепаха и числа сочетаний» («Квантик» № 9, 2022).

ложные грани кубика как два квадрата, соединённые четырьмя параллельным рёбрами. На рисунке 3 зелёная грань противоположна красной, обе они – квадраты, поэтому каждая даёт строчку 1 2 1. Но зелёный квадрат расположен ниже красного. Спуск вниз от красных вершин к соответствующим зелёным по синему ребру соответствует сдвигу строчки 1 2 1 на одну позицию.

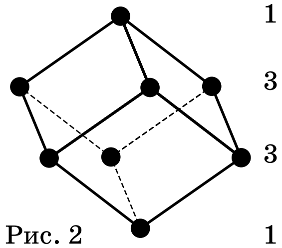


Рис. 2

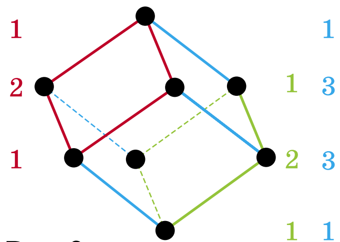


Рис. 3

Легко построить геометрическое соответствие и первым строчкам. Строка 1 1 геометрически означает, что есть два этажа по одной вершине в каждом – это отрезок. А строка 1 – это просто точка. Теперь мы можем нарисовать весь ряд (рис. 4).

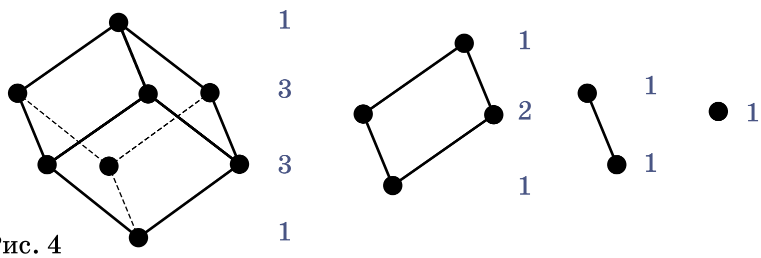


Рис. 4

Строки треугольника Паскаля, расположенные ниже строки 1 3 3 1, соответствуют кубам размерности 4, 5 и выше.[2] А квадрат, отрезок и точка – это двумерный, одномерный и нульмерный «кубики». Чтобы нарисовать кубик следующей размерности, мы берём две копии кубика меньшей размерности и соединяем соответствующие вершины рёбрами. Число вершин кубика поэтому удваивается с каждым шагом.

Задача 2. Попробуйте нарисовать вершины и рёбра четырёхмерного куба.

Задача 3. Если вы знаете, что числа в треугольнике Паскаля – это *числа сочетаний*, попробуйте объяснить, как они связаны с количеством вершин на «этажах» кубика, подвешенного за вершину.

[2] Больше о многомерных кубах читайте в брошюре Г.А. Гальперина «Многомерный куб» (выпуск 39 библиотеки «Математического просвещения»), вот ссылка: mccme.ru/free-books/mmmf-lectures/book.39.pdf

Художник Екатерина Ладатко

Математический кружок

Александр Блинков

от японских головоломок до олимпиадных задач

Привет из Японии

Геометрические головоломки Menseki Meiro (в переводе: «путаница с площадями») придуманы в Японии. Их создателем считается наш современник Наоки Инаба. Условия даются в виде схематических рисунков из прямоугольников, с указанием некоторых площадей или длин (в одних и тех же согласованных единицах измерения).

При решении нельзя получать нецелые числа и составлять уравнения с буквами, но можно использовать формулу площади прямоугольника. Вот несколько примеров (найти надо площадь, отмеченную знаком вопроса, или длину, отмеченную буквой x).

Задача 1. См. рисунок 1.

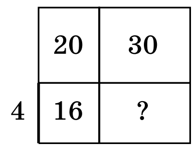


Рис. 1

Решение. Горизонтальная сторона левого нижнего прямоугольника равна $16:4=4$. У левого верхнего она такая же, поэтому его вертикальная сторона равна $20:4=5$. Значит, горизонтальная сторона правого верхнего прямоугольника равна $30:5=6$, а искомая площадь равна $4\cdot6=24$. **Ответ:** 24.

Задача 2. См. рисунок 2а.

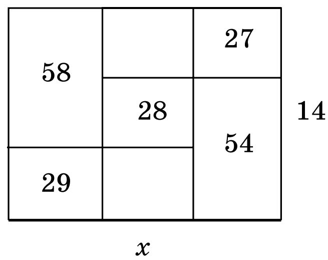


Рис. 2а

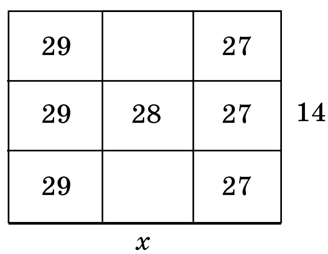


Рис. 2б

Решение. Проведя горизонтальный отрезок, разобьём на две равные части левый верхний прямоугольник, так же поступим с правым нижним (рис. 2б). Так как слева и справа получатся по три одинаковых прямоугольника, горизонтальные линии разбиений будут на одном уровне. Тогда и в центральной вертикальной полосе также имеются три одинаковых прямоугольника. Значит, площадь большого прямоугольника равна $(29 + 28 + 27)\cdot 3 = 252$, поэтому $x = 252 : 14 = 18$. **Ответ:** 18.

Задача 3. См. рисунок 3а.

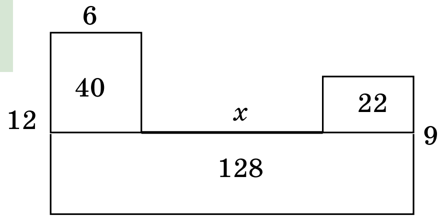


Рис. 3а

Решение. Продлим вниз правую сторону левого верхнего прямоугольника так, чтобы она разбила нижний на два прямоугольника (рис. 3б). Площадь левого из них равна $12 \cdot 6 - 40 = 32$, поэтому площадь правого равна $128 - 32 = 96$ – в три раза больше. Но высоты у образовавшихся прямоугольников одинаковые, поэтому нижняя сторона правого в три раза больше нижней стороны левого, то есть равна 18.

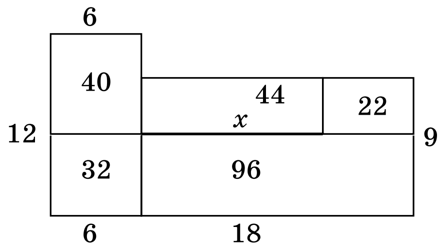


Рис. 3б

Теперь продлим влево верхнюю сторону правого верхнего прямоугольника, чтобы образовался прямоугольник со сторонами 9 и 18. Площадь прямоугольника со стороной x равна тогда $9 \cdot 18 - 22 - 96 = 44$. Так как его площадь в $44 : 22 = 2$ раза больше площади соседнего справа, то и его горизонтальная сторона в два раза больше, то есть $x = 18 : 3 \cdot 2 = 12$. **Ответ:** 12.

Не только головоломки

Возможно, благодаря этим головоломкам появились похожие геометрические задачи для младших школьников. Использовать нецелые числа и уравнения уже разрешается, но по-прежнему из всех формул хватает формулы площади прямоугольника.

Прежде чем к ним перейти, обобщим рассуждение из решения задачи 3. Пусть два прямоугольника имеют общую сторону (рис. 4). Тогда их площади пропорциональны другим их сторонам: $S_1 = ac$, $S_2 = bc$, поэтому $S_1 : S_2 = a : b$.

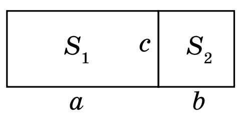
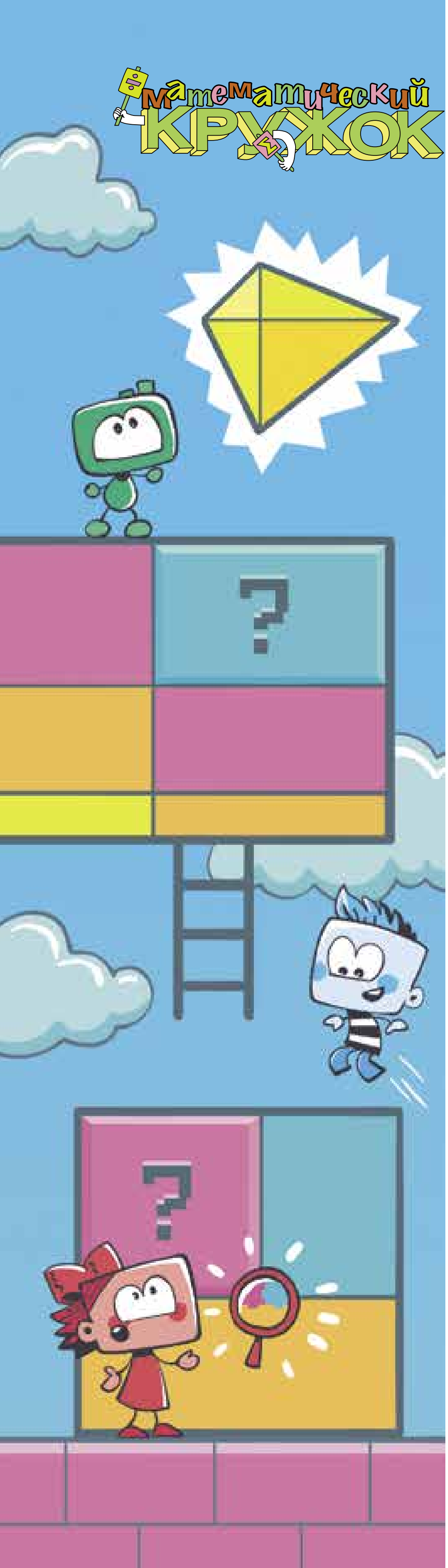


Рис. 4

Теперь понятно, что на рисунке 1 есть лишнее условие о стороне длины 4. Ведь отношение площадей верхних прямоугольников и отношение площадей нижних равно отношению их горизонтальных сторон. Поэтому искомая площадь равна $16 \cdot 30 : 20 = 24$.



Задача 4. (*Окружная олимпиада в Москве, 2011 год, 6 класс*) См. рисунок 5.

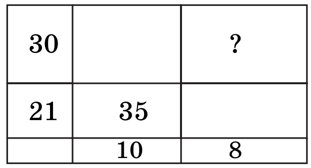


Рис. 5

Решение. Пусть x – площадь среднего верхнего прямоугольника, тогда $x:30=35:21$, откуда $x=30\cdot 35:21=50$. Аналогично, если z – искомая площадь, то $z:50=8:10$, откуда $z=50\cdot 8:10=40$. **Ответ:** 40.

Задача 5. Квадрат разбит на два прямоугольника с площадями 21 и 12 и меньший квадрат (рис. 6а). Найдите сторону исходного квадрата.

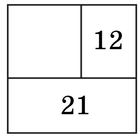


Рис. 6а

Решение. Из рисунка 6б видно, что отношение площади правого прямоугольника к маленькому квадрату такое же, как отношение площади нижнего прямоугольника к оставшейся части. Пусть S – площадь маленького квадрата. Тогда получаем, что $12:S=21:(S+12)$, откуда находим $S=16$. Значит, площадь исходного квадрата равна $16+12+$ $+21=49$, а его сторона равна 7. **Ответ:** 7.

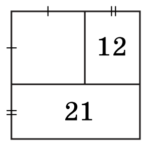


Рис. 6б

Задача 6. Площади прямоугольных граней коробки равны 84 см^2, 70 см^2 и 30 см^2. Найдите её объём.

Решение. Обозначив длины сторон коробки через a, b и c, получим систему из трёх уравнений: $ab=84$, $ac=70$, $bc=30$. Так как объём прямоугольной коробки вычисляется по формуле $V=abc$, имеет смысл перемножить уравнения почленно: $a^2b^2c^2=84\cdot 70\cdot 30$. Тогда $(abc)^2=10^2\cdot 7^2\cdot 6^2$, откуда $abc=420$. **Ответ:** 420 см^3.

Не только прямоугольники

Вернёмся опять к отношению площадей прямоугольников с общей стороной. Оказывается, его можно использовать не только для прямоугольников.

Задача 7. Четырёхугольник, диагонали которого перпендикулярны, разбит диагоналями на четыре треугольника. Площади трёх из них известны (рис. 7а). Найдите площадь четвёртого.

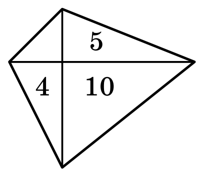


Рис. 7а

Решение. Через каждую вершину четырёхугольника проведём прямую, параллельную одной из диагоналей. Точки их попарного пересечения будут вершинами прямоугольника (рис. 7б). Он разбит на четыре прямоугольника, площадь каждого вдвое больше площади соответствующего треугольника, поэтому $x:5=4:10$, откуда $x=2$. **Ответ:** 2.

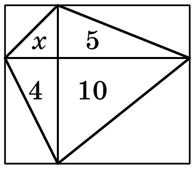


Рис. 7б

Те, кто уже знает, что площадь любого треугольника равна половине произведения его стороны и проведённой к ней высоты, заметят: если треугольники имеют общую высоту, то отношение их площадей равно отношению сторон, к которым проведены высоты. Поэтому, если даже убрать в задаче 7 условие перпендикулярности диагоналей, пропорция, записанная выше, останется верной! Получаем обобщение:

Лемма. Если диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, то

$$S_{AOB}\cdot S_{COD}=S_{BOC}\cdot S_{DOA}.$$

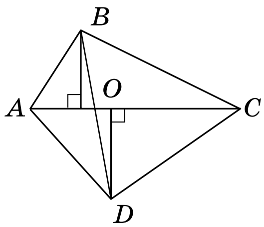


Рис. 7в

В заключение – красивая задача, которая могла бы занять достойное место среди японских головоломок и решается по их правилам. Она встретилась на Турнире Ломоносова в 2020 году (автор – Т. Корчемкина), а придумана была по мотивам абстрактных картин нидерландского художника Пита Мондриана.

Задача 8. Пит М. на квадратном холсте нарисовал композицию из прямоугольников. Даны площади нескольких прямоугольников, в том числе синего и красного квадратов (рис. 9). Чему равна сумма площадей двух серых прямоугольников?

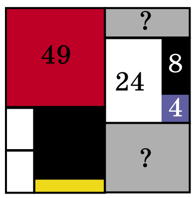


Рис.8

Решение. Сторона синего квадрата равна 2, тогда стороны чёрного прямоугольника равны 2 и 4. Площадь бело-чёрно-синего прямоугольника равна 36, а его вертикальная сторона $2+4=6$. Значит, это квадрат, и его горизонтальная сторона тоже 6. Сторона красного квадрата равна 7, а у всего холста равна $6+7=13$. Площадь серых прямоугольников – это разность площадей правой «половины» холста и бело-чёрно-синего квадрата: $6\cdot 13-36=42$. **Ответ:** 42.

Задачи для самостоятельного решения

Задачи 9 – 11 являются японскими головоломками и решаются по их правилам.

9.

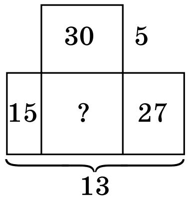


Рис. 9

10.

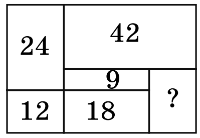


Рис. 10

11.

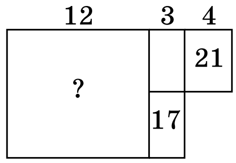


Рис. 11

12. (*Окружная олимпиада в Москве, 2012 год, 5 класс*) Одну сторону прямоугольника увеличили в 3 раза, а другую уменьшили в 2 раза и получили квадрат. Чему равна сторона квадрата, если площадь прямоугольника 54?

13. Прямоугольник разбит на девять прямоугольников. Площади пяти из них указаны на рисунке 12. Найдите площадь исходного прямоугольника.

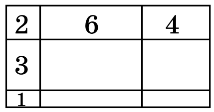


Рис. 12

14. Прямоугольник, меньшая сторона которого равна 3, разбит на пять одинаковых прямоугольников так, как показано на рисунке 13. Найдите его площадь.

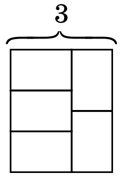


Рис. 13

15. (*И. Раскина, турнир имени А.П. Савина,* 2011 *год,* 6 *класс*) Каждую сторону прямоугольника увеличили на 3 см, тогда его площадь увеличилась на 60 см^2. А как изменится его площадь, если каждую сторону уменьшить на 2 см?

16. Прямоугольник разбили на 4 прямоугольника. Периметры трёх из них указаны на рисунке 14. Найдите периметр четвёртого.

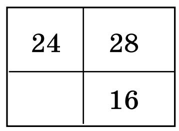


Рис. 14

17. Прямоугольник двумя вертикальными линиями разбит на три прямоугольника. Известны площади крайних из них, а также длины двух отрезков (рис. 15). Найдите площадь среднего прямоугольника.

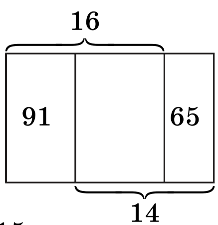


Рис. 15

Художник Мария Усеинова

БОБРОВЫЕ ПНИ

Бобры валят деревья, чтобы питаться корой и ветками, строить плотины... В лесу около реки можно найти пеньки от деревьев, поваленных бобром. Но иногда эти пеньки бывают высотой полтора метра. Как бобры оказываются так высоко?

Автор Никита Солодовников

Художник Анна Рацкевич

олимпиады КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ

Решения VI тура отправляйте по адресу ruskonkurs@kvantik.org не позднее **20 декабря**. В письме укажите ваши имя, фамилию, город, школу и класс, где вы учитесь. Победителей ждут призы, предусмотрены премии за лучшее решение отдельных туров. Желаем успеха!

Предлагайте задачи собственного сочинения: лучшие будут опубликованы. Так, автор задачи 26 – семиклассник Вадим Авраменко.

VI ТУР

26. Хулиган Вовочка в кои-то веки сделал домашнее задание по русскому языку и попросил маму его проверить. Дойдя до словосочетания «______ лица», мама остановилась:

– Вовочка, здесь ошибка!

– Но почему?! – изумился мальчик. – Проверочное слово – «____», синоним к слову «лицо»!

Мама не выдержала и расхохоталась.

Заполните пропуски.

В. Н. Авраменко

27. ааадзч
Ккнорсу
авикорфш

Всё понятно? Тогда прочитайте:

аекст
клноу

О. А. Горбачёва

28. Скорее всего, ОНА получила своё название за способность стремительно менять форму поверхности, в том числе выгибаться вверх. Назовите ЕЁ.

И. Б. Иткин

29. Этими мини-версиями не копают и не черпают: две из них расположены сзади, а одна – спереди. Назовите эти мини-версии.

О. А. Кузнецова

30. – Как всё сложно, – вздохнула Настя. – Вроде бы слово X_2 получается, если добавить приставку к слову X_1. Но разве они связаны между собой? Слово X_2 означает «судьба», а слово X_1 – совсем другое...

– Конечно, связаны, – отозвалась отличница Маша. – Вот, например, слово Y может быть синонимом и к слову X_1, и к слову X_2.

Какие слова мы заменили на X_1, X_2 и Y?

С. И. Переверзева

Художник Николай Крутиков

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ, V тур («Квантик» № 9, 2024)

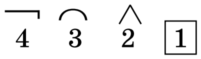
21. *По мнению одного кота, ОНА предназначена для того, чтобы он мог на НЕЙ лежать и получать удовольствие от хозяйских ласк. Назовите ЕЁ двумя словами.*

Это **гладильная доска**. Предназначена она, конечно, для того, чтобы гладить рубашки, носовые платки или свитера, но попробуйте объяснить это коту!

22. *X в плащ намного приятнее, чем Y в нём. Глаголы X и Y отличаются друг от друга только третьей буквой. Напишите эти глаголы.*

Искомые глаголы – ***закутаться*** и ***запутаться***. Вариант *кутаться* и *купаться* (а может быть, *кусаться*?) подходит существенно хуже: речь явно идёт о какой-то неприятности, случающейся с человеком помимо его воли. Купаться в плаще действительно странно, так вроде никто и не заставляет…

23.



Что это за часть тела?

Эта часть тела – **переносица**. Как ни удивительно, другие подходящие варианты пока не обнаружены.

24. *Эти два математических термина на 5/7 состоят из одних и тех же букв. Оставшиеся 2/7 у одного из этих терминов – ТР. А у второго?*

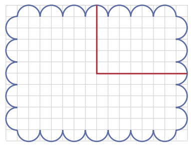
Нетрудно догадаться, что один из этих терминов – *диаметр*. Переставляя первые пять букв слова *диаметр*, находим ещё одно важное геометрическое понятие – *медиана*. Оставшиеся 2/7 у слова *медиана* – **НА**. Любопытно, что такие «похожие» слова – не только не однокоренные, но даже происходят из разных языков: *диаметр* – из древнегреческого, *медиана* – из латыни.

25. *Однажды, гуляя по Невскому проспекту, Дима увидел вывеску: X Y. «Интересно, – подумал Дима, – а X – это прилагательное или существительное? И что здесь продают – суп или посуду?» Что было написано на вывеске?*

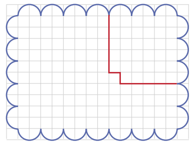
На вывесках часто опускают кавычки. Поэтому, увидев надпись **СТОЛОВАЯ ЛОЖКА**, Дима задумался: имеется в виду «СТОЛОВАЯ ЛОЖКА» – магазин по продаже посуды (в этом названии *столовая* – прилагательное) или «Столовая "ЛОЖКА"» – заведение, где можно хорошенько подкрепиться супом (*столовая* здесь – существительное)?

НАШ КОНКУРС, I тур («Квантик» № 9, 2024)

1. *На рисунке вы видите печенье и пример, как сделать разрез по линиям сетки, чтобы отделить четверть (по площади). Можно ли от такого же печенья отрезать четверть (по площади) иначе – так, чтобы разрез шёл по линиям сетки и оказался короче, чем в примере?*

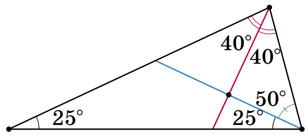


Ответ: можно, см. рисунок.



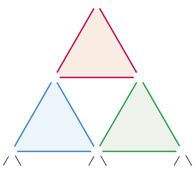
2. *Дан треугольник, два угла которого равны 25° и 80°. Докажите, что в нём биссектриса какого-то угла и одна из трисектрис какого-то угла перпендикулярны друг другу. (Напоминание: биссектриса делит угол пополам, трисектриса отрезает треть угла; сумма углов любого треугольника равна 180°.)*

Третий угол данного треугольника равен $180° - 80° - 25° = 75°$. Проведём биссектрису угла 80° и трисектрису угла 75°, как на рисунке: они отделяют треугольник, два угла которого равны 40° и 50°, а значит, третий угол равен $180° - 40° - 50° = 90°$.



3. *Фокусник взял две колоды по 52 карты в каждой и построил на столе треугольный карточный домик с наибольшим числом этажей. Сколько карт у него осталось на руках? На рисунке для примера показаны карточные домики в 2 этажа (из 7 карт) и в 3 этажа (из 15 карт).*

Ответ: 4. Добавим домику «фундамент» – положим в основание нижнего этажа горизонтальные карты, как на других этажах. Занумеруем этажи, начиная с верхнего – тогда этаж с номером n составлен из n треугольников, состоящих каждый из двух наклонных карт и одной горизонтальной.



Итак, 1-й этаж составлен из 3 карт, 1-й и 2-й – из $3 + 6 = 9$ карт, если добавим 3-й этаж – будет $9 + 9 = 18$ карт, и так далее: на четырёхэтажный домик с фундаментом нужно $18 + 12 = 30$ карт, на пятиэтажный $30 + 15 = 45$ карт, на шестиэтажный $45 + 18 = 63$ карты, на семиэтажный $63 + 21 = 84$ карты, на восьмиэтажный $84 +$

$+24=108$ карт и на девятиэтажный домик с фундаментом $108+27=135$ карт. В фундаменте домика лежит столько же карт, сколько в домике этажей – то есть на обычный карточный домик из 8 этажей нужно всего $108-8=100$ карт (у фокусника останется $52\cdot2-100=4$ карты), а вот на домик из 9 этажей понадобилось бы $135-9=$ $=126$ карт, то есть на него карт уже не хватит.

4. *Даны целые числа a, b, c. Известно, что каждое из чисел $2a-1$, $3b-1$, $6c-1$ делится на 1001. Обязательно ли $a+b+c-1$ делится на 1001?*

Ответ: да. Умножим первое число на 3, второе на 2 и сложим с третьим числом. Получим

$$6a-3+6b-2+6c-1=6(a+b+c-1).$$

Поскольку мы сложили три числа, кратных 1001, то и их сумма $6(a+b+c-1)$ делится на 1001, а так как 6 и 1001 не имеют общих делителей, то на 1001 делится именно $a+b+c-1$.

5. *У Пети есть набор из трёх белых гирек массами 101 г, 102 г и 103 г, и такой же набор из трёх чёрных гирек. Массы на гирьках не написаны, а на вид нельзя понять, какая гирька какой тяжелее. Петя хочет разбить гирьки на пары одинаковых по массе. Как ему сделать это за два взвешивания на чашечных весах со стрелкой, показывающих, какая чаша перевесила и на сколько грамм?*

Белые гири обозначим буквами A, B, C, а чёрные – буквами a, b, c. Первым взвешиванием сравним A и a. Возможны три варианта.

I. Гири равны по весу. Тогда они дают нужную пару. Взвесим теперь B и b. Если и они равны, то это вторая пара, а C и c – третья; иначе B и c – вторая пара, b и C – третья.

II. Одна из гирь тяжелее на 2 г. Пусть тяжелее, например, белая гиря. Тогда у A масса 103 г, у a масса 101 г. Положим теперь на одну чашу гири A и B, а на вторую – C и b. Составим табличку возможных масс этих гирь и найдём разность между чашами (считаем её положительной, если перевесила левая чаша, и отрицательной, если правая):

A	B	C	b	Разность
103	101	102	102	0
103	101	102	103	–1
103	102	101	102	2
103	102	101	103	1

Видим, что разность позволяет однозначно восстановить массы гирь B, C, b, но тогда мы определим все гири и распределим их по парам.

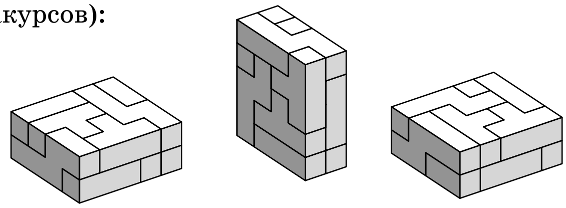
III. Одна из гирь тяжелее на 1 г. Пусть тяжелее, например, белая гиря. Тогда либо $A=103$ и $a=102$, либо $A=102$ и $a=101$. Положим на одну чашу гири A и a, на вторую – B и b и снова посмотрим на возможные разности:

A	a	B	b	Разность
103	102	101	101	3
103	102	101	103	1
103	102	102	101	2
103	102	102	103	0
102	101	101	102	0
102	101	101	103	–1
102	101	103	102	–2
102	101	103	103	–3

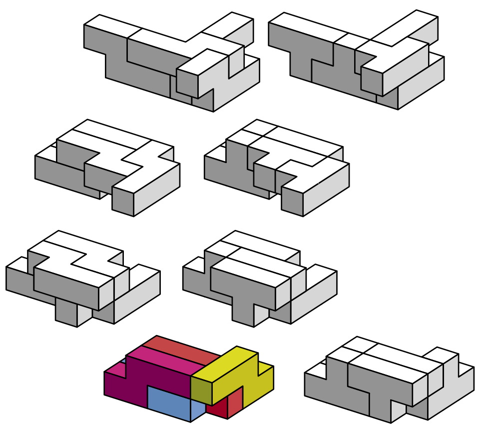
Разность одинакова в двух случаях, но при этом $A=b$, $B=a$ (значит, и $C=c$) – гири по парам распределяются одинаково. В остальных случаях веса всех гирь снова определяются однозначно, и мы сможем разбить их на пары.

NT-БЛИЗНЕЦЫ («Квантик» № 10, 2024)

1. Построение параллелепипеда (вид с трёх ракурсов):

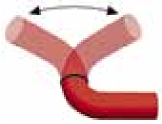


2. Приводим 4 решения, остальные 4 найдите самостоятельно.



БЕТОНОНАСОС («Квантик» № 10, 2024)

Чтобы кран мог подавать бетон на несколько этажей вверх, в котлован или на далёкое расстояние, его мачта должна раскладываться из компактного состояния в длинную «руку». Вместе с мачтой изгибаться придётся и трубе, по которой течёт бетон. Труба жёсткая, так что ей тоже нужно сделать «суставы» (красные участки на картинке). Проще всего соединить соседние секции трубы стыком, концы которого могут независимо вращаться (см. рисунок).



ВОЛК, МЕДВЕДЬ И ШАРИКИ

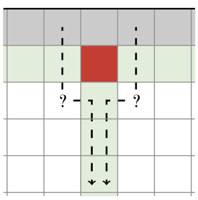
По сюжету мультфильма Винни-Пух *сам надул* шар, не используя каких-либо баллонов с гелием либо водородом. А значит, внутри шара – выдыхаемый им воздух, который по химическому составу близок к атмосферному (и даже чуть плотнее вследствие замены части кислорода более тяжёлым углекислым газом). Такой шарик *даже сам по себе* в воздух не поднимется, а уж с подвешенным к нему медведем – тем более.

УЛИТКА ТУРБО И МОНСТРЫ

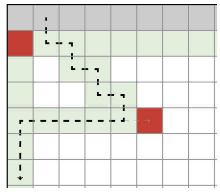
Ответ: $n=3$. Покажем, что меньшего числа попыток может не хватить. Действительно, выползая из первой строки во вторую, улитка может сразу столкнуться с монстром, поэтому одной попытки недостаточно. Во время второй попытки Турбо нужно будет выползти в третью строку, причём не в том же столбце, в котором был встреченный ранее монстр – значит, в третьей строке улитка снова может наткнуться на монстра. Таким образом, двух попыток точно не хватит.

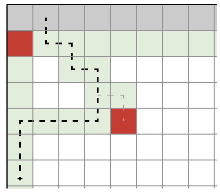
Покажем теперь, как нужно действовать улитке, чтобы за три попытки гарантированно доползти до последнего ряда. Пусть за первую попытку Турбо проползёт всю вторую строку, начиная с самой левой клетки – так улитка узнает, где во второй строке находится монстр. Есть два варианта развития событий: либо монстр в одной из крайних клеток строки, либо в одной из внутренних.

Если монстр оказался в одной из внутренних клеток второй строки, то остальные клетки этой строки и соответствующего столбца безопасны. Попробуем тогда обойти клетку с уже известным нам монстром слева или справа и ползти вниз до конца доски по столбцу под монстром. Если улитка наткнётся на монстра в одной из клеток, отмеченных на рисунке знаком вопроса, то другая такая клетка уже точно будет безопасной. Поэтому Турбо доползёт до конца либо со второй, либо с третьей попытки.



Если во второй строке монстр оказался в одной из крайних клеток, можно считать, что онв самой левой клетке второй строки. Будем ползти по «лесенке», начиная со второй клетки второй строки и сдвигаясь поочерёдно на одну клетку вправо и на одну клетку вниз. Закончится такая лесенка как раз в самой правой клетке предпоследней строки, откуда Турбо и переползёт в последний ряд, если так и не встретит монстра.



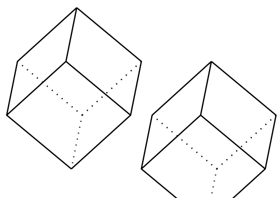


Если же на лесенке попадётся монстр – вторая попытка закончится, но зато теперь Турбо знает, что клетки слева от этого монстра безопасны! Тогда улитка может добраться по лесенке до клетки слева-сверху от монстра, найденного на второй попытке, затем спуститься в строку с монстром, пойти по ней налево до первого столбца и спуститься по уже заведомо безопасным клеткам первого столбца.

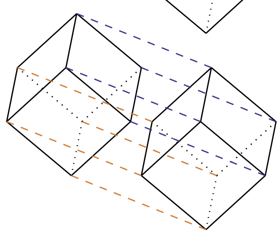
КУБИК И ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ

1. Получаются степени двойки: 1, $1+1=2$, $1+2+1=4$, и далее 8, 16, ... Это ясно из того, что каждая следующая строка получена как сумма двух экземпляров предыдущей строки.

2. Разместим два трёхмерных кубика один на этаж ниже другого, подобно квадратам.



Теперь соединим соответствующие вершины рёбрами, которые идут в четвёртом измерении (а сами трёхмерные кубики лежат в параллельных трёхмерных плоскостях). На картинке ниже добавленные синие и оранжевые рёбра. Обратите внимание: теперь любая грань верхнего левого кубика образует новый куб в паре с соответствующей ей гранью нижнего правого кубика.



3. Подвесим кубик за вершину. К ней примыкают три грани (назовём их верхними), а ещё три грани примыкают к нижней вершине (назовём их нижними). На верхнем этаже у нас одна вершина – общая для трёх верхних граней, на следующем – вершины, общие для каких-то двух верхних граней и одной нижней, на следующем этаже – вершины, общие для каких-то двух нижних граней и одной верхней, и в самом низу – одна вершина (общая для трёх нижних граней). То есть мы на каждом этаже выбираем какое-то количество верхних граней (от 0 до трёх), и число способов такого выбора даёт количество точек на этаже. Но это и есть число сочетаний.

ОТ ЯПОНСКИХ ГОЛОВОЛОМОК ДО ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ

9. Ответ: 36. Общая горизонтальная сторона верхнего и нижнего среднего прямоугольников равна $30:5=6$, тогда сумма горизонтальных сторон крайних нижних прямоугольников равна $13-6=7$ (рис. 1). Сумма площадей этих прямоугольников равна $15+27=42$, поэтому вертикальная сторона всех нижних прямоугольников равна $42:7=6$, а искомая площадь равна $6 \cdot 6=36$.

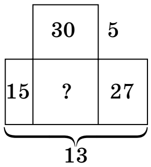


Рис. 1

10. Ответ: 15. Разобьём прямоугольник площади 24 на два прямоугольника, продлив горизонтальную линию (рис. 2). Площадь нижнего из образовавшихся прямоугольников равна $12 \cdot 9:18=6$. Тогда эта же горизонтальная линия разбивает весь левый прямоугольник на два прямоугольника площади 18. Значит, продолжение этой линии разбивает оставшийся прямоугольник на два прямоугольника площади 42. Искомая площадь равна $42-(9+18)=15$.

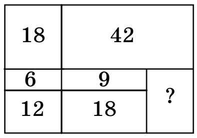


Рис. 2

11. Ответ: 131. Продлив горизонтальную линию, разобьём прямоугольник со стороной 12 на два прямоугольника. Так как $12=3 \cdot 4$, верхний прямоугольник можно разбить на три прямоугольника площади 21, а нижний – на четыре площади 17 (рис. 3). Значит, искомая площадь равна $3 \cdot 21+4 \cdot 17=131$.

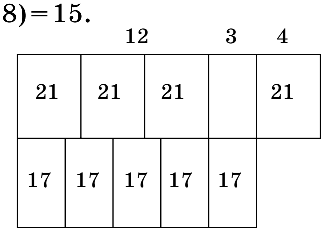


Рис. 3

12. Ответ: 9. Уменьшим сторону данного прямоугольника в два раза. Тогда площадь получившегося прямоугольника будет равна 27. Затем увеличим другую сторону в три раза. Площадь получившейся фигуры станет равной $27 \cdot 3=81$. Так как это квадрат, его сторона равна 9.

13. Ответ: 36. Обозначим площади остальных прямоугольников (рис. 4). Используя пропорциональность площадей прямоугольников, последовательно получим: $2:6=3:x$, откуда $x=9$; $6:4=9:y$, откуда $y=6$; $3:9=1:z$, откуда $z=3$; $9:6=3:t$, откуда $t=2$. Значит, площадь исходного прямоугольника равна $2+6+4+$ $+3+9+6+1+3+2=36$.

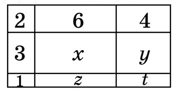


Рис. 4

14. Ответ: 10,8. Пусть меньшая сторона малого прямоугольника равна x, тогда его большая сторона равна $3-x$ (рис. 5). Площадь каждого из этих прямоугольников равна $x(3-x)$, а площадь исходного равна $3 \cdot 3x = 9x$. По условию: $5x(3-x)=9x$, откуда $x=1{,}2$, а искомая площадь равна $9 \cdot 1{,}2=10{,}8$.

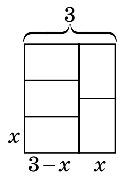


Рис. 5

15. Ответ: уменьшится на 30 см². Пусть a и b – длины сторон прямоугольника, тогда его площадь равна ab. После увеличения сторон на 3 см она станет равна $(a+3)(b+3)$. По условию $(a+3)(b+3)-ab=60$, то есть $3(a+b)+9=60$, откуда $a+b=17$. При уменьшении сторон на 2 см площадь прямоугольника будет равна $(a-2)(b-2)$. Тогда $ab-(a-2)(b-2)=2(a+b)-4=30$.

Также можно найти периметр исходного прямоугольника. Он равен $2(a+b) = 34$ см.

16. Ответ: 28. См. рис. 6. Выразим полупериметры трёх прямоугольников: $a+c=12$, $a+d=$ $=14$, $b+d=8$. Сложим 1-е и 3-е равенства и вычтем 2-е, получим: $b+c=12+8-14=6$. Тогда искомый периметр равен $2(b+c)=12$.

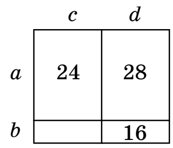


Рис. 6

Также можно найти периметр большого прямоугольника, достаточно сложить полупериметры четырёх прямоугольников: $2(a+b+$ $+c+d)=56$.

17. Пусть a – вертикальная сторона исходного прямоугольника, а b – горизонтальная сторона среднего (рис. 7). Тогда $\frac{16-b}{14-b}=\frac{91}{65}$, откуда $b=9$. Значит, $a=65:(14-9)=$ $=13$, а площадь среднего прямоугольника равна $13 \cdot 9=117$. **Ответ:** 117.

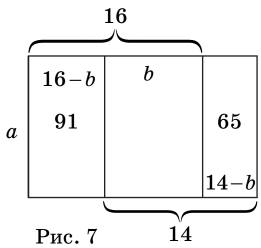


Рис. 7

БОБРОВЫЕ ПНИ

Бобры иногда валят деревья зимой, если им недостаёт заготовленных с осени веток. Весной, когда снег стает, пни оказываются высокими, потому что бобёр грыз дерево, стоя на снегу.

наш КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Первый этап состоит из четырёх туров (с I по IV) и идёт с сентября по декабрь.

Высылайте решения задач III тура, с которыми справитесь, не позднее 5 декабря в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция находится по адресу kvantik.com/short/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, г. Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

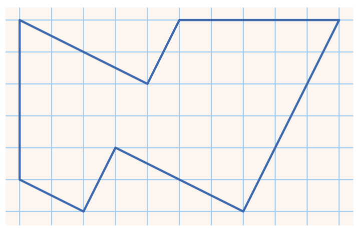
В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте www.kvantik.com. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

III ТУР

11. Разрежьте фигуру на рисунке на 2 равные (и по форме, и по размеру) части.



12. Квадрат 3×3 сложен из квадратных фишек 1×1, пронумерованных числами от 1 до 9. Изначально фишки лежат так, как на рисунке слева. Любые четыре фишки, образующие квадрат 2×2, можно поворачивать вокруг его центра на угол, кратный 90°. Можно ли с помощью нескольких таких поворотов получить расположение, в котором фишки расположены так, как на рисунке справа?

1	2	3
4	5	6.
7	9.	8

1	2	3
4	5	6.
7	8	9.

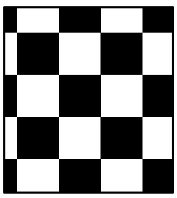
наш КОНКУРС

олимпиады

Авторы задач: Михаил Леляков (11), Николай Авилов (12), Игорь Акулич (13), Георгий Караваев (14), Михаил Евдокимов (15)

13. Квадраты последовательных натуральных чисел 13 и 14 записываются одними и теми же цифрами, но в разном порядке: 169 и 196. Существуют ли три последовательных натуральных числа, обладающих тем же свойством?

14. Из клетчатой скатерти со стороной клетки 1 вырезали прямоугольник со сторонами, параллельными сторонам клеток, как на рисунке.



Суммарная площадь белой части прямоугольника равна 10. Найдите его периметр.

15. Миша смотрел «Что? Где? Когда?» и выписывал счёт, начиная с 0:0 и до конца игры (в каждом раунде разыгрывается одно очко; игра заканчивается, когда зрители или знатоки наберут 6 очков). Если у зрителей было больше очков, Миша делал запись синей ручкой, если очков было больше у знатоков – красной ручкой, а если была ничья – зелёной. Могло ли оказаться, что красных, синих и зелёных записей было поровну?

ПОЗДРАВЛЯЕМ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ ТРЕТЬЕГО ЭТАПА НАШЕГО КОНКУРСА!

Победители: Авдонин Максим, Босенко Иван, Бычков Валерий, Ганичев Филипп, Голенищева Мария, Гончаров Арнольд, Дайловская Дарья, Ермолаева Анна, Калугин Иван, Махмудов Шероз, Мелиханов Назар, Мирошников Валерий, Николаев Михаил (Санкт-Петербург), Николаев Михаил (Москва), Николаевский Иван, Селютин Степан, Терехова Наталья, Токарева Дарина, Феофилов Серафим, Ханмагомедова Зумруд, Ханмагомедова Мелек, а также кружки «По стопам Лобачевского», и «Школа юных математиков».

Призёры: Авраменко Вадим, Алтайская Антонина, Батенкова Арина, Голятин Артём, Гришина Елена, Кувшинова Анастасия, Лизогубов Яромир, Марченко Ярослав, Мурин Константин, Никитин Андрей, Пастухова София, Скивко Тимур, Слясская Диана, Соломина Марина, Тимошкова Дарья, Федотова Дарья, Фиалковский Максим, а также кружки «МАГ» и «Озарчата».

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ В НОВОМ КОНКУРСЕ!

Художник Николай Крутиков

СЕРП ВЕНЕРЫ

Серп бывает не только у Луны. В телескоп можно наблюдать Венеру в виде серпа. Открыл это ещё Галилей. По легенде, однажды великий немецкий математик и астроном Гаусс показал в телескоп серп Венеры своей матери. Фрау Гаусс, обладавшая невероятно острым зрением, сказала, что она и так может видеть этот серп, вот только...

Чему могла бы удивиться фрау Гаусс, посмотрев в телескоп, если и вправду видела серп Венеры и без него? И почему серп Венеры наблюдать можно, а серп, например, Марса – нет?

Автор Дмитрий Житницкий

Художник Мария Усеинова

ISSN 2227-7986
24011
9 772227 798244