№ 10 | октябрь 2024
Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования
e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ

КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№10
октябрь 2024

ПРЕВРАЩЕНИЯ ГРАФОВ

ПРИКЛЮЧЕНИЯ ХОЛЕРНОГО ВИБРИОНА

СЕРДЦЕ-ТРАНСФОРМЕР ИЗ БУМАГИ

Enter

НАГРАДЫ ЖУРНАЛА

2017 — Минобрнауки России
ПРЕМИЯ «ЗА ВЕРНОСТЬ НАУКЕ»
за лучший детский проект о науке

2021 — **БЕЛЯЕВСКАЯ ПРЕМИЯ**
за плодотворную работу
и просветительскую деятельность

2022 — Российская академия наук
ПРЕМИЯ ХУДОЖНИКАМ ЖУРНАЛА
за лучшие работы в области
популяризации науки

Журнал «Квантик» № 10, октябрь 2024 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц

Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).

Главный редактор С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Т. А. Корчемкина, Е. А. Котко, Г. А. Мерзон, М. В. Прасолов, Н. А. Солодовников
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Мария Усеинова

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»

Адрес редакции и издателя:
119002, г. Москва,
Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**

Подписка на журнал
в отделениях почтовой связи Почты России:
Каталог Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)

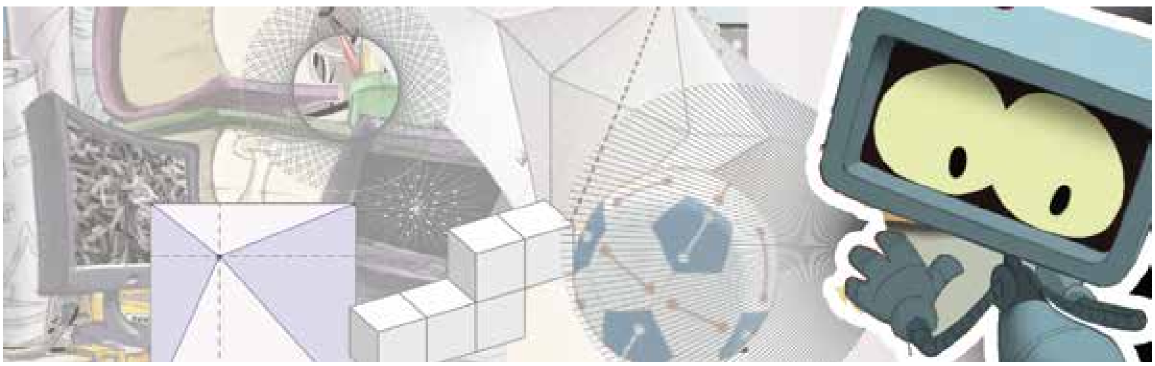
Онлайн-подписка на сайте Почты России:
podpiska.pochta.ru/press/ПМ068

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31**
и e-mail: **biblio@mccme.ru**

Формат 84х108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 27.08.2024
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831) 218-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

СОДЕРЖАНИЕ



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СЮРПРИЗЫ

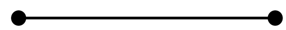
Валерия Сирота

ПРЕВРАЩЕНИЯ ГРАФОВ

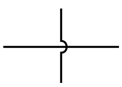
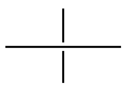
Вы, конечно, знаете, что такое графы – столько раз это в «Квантике»[1] обсуждалось, как же не знать? Если говорить просто, это точки, соединённые линиями. Точки называются *вершинами* графа, линии (не обязательно прямые) – его *рёбрами*.

Вершины графа могут быть просто-так-сами-по-себе-точки, а могут что-нибудь означать. Например, в родословных вершины графа – люди, а рёбра графа соединяют мужей с жёнами и родителей с их детьми[2]. Или вершины графа могут обозначать ребят в классе, а линии – кто с кем дружит. Нарисовать такой граф можно по-разному – важно лишь, какие вершины с какими соединены.

Поэтому граф – это удобный способ изобразить что-то, когда нам не нужны никакие «внутренние» свойства рассматриваемых объектов, а важны только их связи с другими объектами. Например, если нам неважно, какой формы и размера стрáны, а важно, с кем они граничат, – можно обозначать страны точками, а те из них, которые имеют общую сухопутную границу, соединять линией. Тогда граф стран острова Ирландия выглядит так:



Задача 1. Нарисуйте граф стран Южной Америки (а можно сразу и Южной, и Северной) без островов (карту можно найти в интернете). Если вам понравилось, можно ещё и графы стран Азии или Европы нарисовать – это немного сложнее.

Бывает, что граф можно уложить на плоскости без самопересечений: ровненько, так что ни одна линия (ребро графа) другую не пересекает (например, это получится в задаче 1). А бывает, что это сделать нельзя; тогда приходится в месте пересечения рёбер рисовать что-то такое:  или такое: 

[1] См. статьи в «Квантике»: К. Пахомова «Спичечные графы» (№8, 2015), К. Кохась «Портрет его сиятельства» (№3, 2017), «Домики и колодцы на чайной кружке» («Квантик» №8, 2020); В. Уфнаровский «Их сиятельство граф» (№8, 2021).

[2] На рёбрах ещё иногда ставят стрелки – например, чтобы показать в родословной, кто родитель, а кто ребёнок и т.п.

Ну всё, разминка кончилась, теперь держитесь! Главное – не запутаться: в одной и той же задаче у нас может встретиться многогранник со своими вершинами и рёбрами, и граф – со своими. Для ясности вместо «вершины графа» будем по старинке говорить «точки», а вместо «рёбра графа» – «линии».

Возьмём обычный кубик (рис. 1). Глядя на него, можно построить целых три графа – смотря что мы договоримся обозначать точками и линиями.

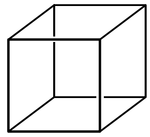


Рис. 1

Задача 2. Нарисуйте графы
а) вершин; б) граней; в) рёбер кубика.

То есть на первом графе точками будут вершины куба, а линиями нужно соединить те из них, которые на кубе соединены ребром. На втором графе точки – уже грани нашего кубика, а линии соединяют те грани, которые граничат друг с другом, то есть у которых есть общее ребро. На третьем графе точками будут рёбра куба, и те из них, что имеют общую точку (сходятся в одной вершине), нужно соединить линиями. Условие этой задачи можно записать в такую таблицу:

Задание	Вершины графа (точки)	Соединены линией, если:
а)	Вершины куба	На одном ребре куба
б)	Грани куба	Имеют общее ребро куба
в)	Рёбра куба	Имеют общую вершину куба

Проверьте, правильное ли количество «точек» получилось на ваших графах? Одинаковое ли (и правильное ли) количество линий выходит из каждой вершины («точки») графа? И не спешите сразу смотреть в ответы: сначала решите ещё хотя бы пару задачек.

Подсказка-«спойлер»: сам рисунок прозрачного кубика (такого, что на рисунке видны и передние, и задние рёбра – рис. 1) – это уже ответ на первый вопрос задачи! Каждая вершина обозначает сама себя. Только этот граф – с пересечениями. А точки и соединяющие их линии на графе можно ведь двигать: линии при этом могут растягиваться и изгибаться, как резиновые. Главное, чтобы линии не «рвались» и по-прежнему соединяли нужные пары точек. Давайте потренируемся рисовать одни и те же графы разными способами!

Задача 3. Сможете ли вы нарисовать все эти графы так, чтобы линии не пересекались?

Задача 4. Сможете ли вы нарисовать все эти графы (с пересечениями и без них) так, чтобы у них было как можно больше осей симметрии?

А ведь графы могут быть не только на плоскости, но и в пространстве! Или на сфере, например, можно их рисовать – вот хоть на поверхности мячика. Или даже на поверхности бублика. И многие графы, которые не нарисуешь без пересечений на плоскости, на бублике прекрасно помещаются.

Задача 5. Как можно более симметрично расположить наши три графа не на плоскости, а в пространстве (например, если бы вы делали их из пластилина и проволочек)? Какие симметричные пространственные фигуры (многогранники) у вас получились бы?

Подсказка. Можно прямо на изначальном кубике поставить точки в середину того, что вы хотите ими обозначить – в середину каждой грани для графа граней, в середину каждого ребра для графа рёбер… и в саму вершину для графа вершин! У вас уже получится симметричная пространственная конструкция. Дальше надо только правильно соединить эти точки отрезками.

Теперь у вас должно было получиться три симметричных пространственных многогранника. Давайте повторим ту же процедуру «делания графа» ещё раз – только уже не из кубика, а из многогранника, который мы получили из этого кубика путём построения графа.

Задача 6. Какой многогранник возникнет, если взять первый из наших трёх многогранников и сделать граф **его** вершин? А что получится из второго многогранника (графа граней), если сделать (пространственный и симметричный) граф **его** граней? И, наконец, что получится из третьего графа, если сделать граф его рёбер? В последней задачке договоримся соединять линией лишь те рёбра многогранника, которые не только соединяются в одной точке, но ещё и принадлежат одной и той же грани.

Ну и, наконец, на «заминку» –

Задача 7. Проделайте все те же упражнения с тетраэдром (рис. 2)!

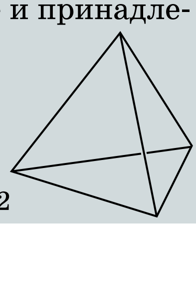


Рис. 2

Художник Алексей Вайнер

Сергей Дворянинов

КОГДА СУММА ЧАСТЕЙ БОЛЬШЕ ЦЕЛОГО, *или с какой стороны посмотреть...*

Иногда мера объединения нескольких множеств меньше суммы мер составных частей. Пятилитровое ведро гороха и такое же ведро апельсинов вполне поместятся в девятилитровое ведро. Если смешать литр спирта и литр воды, объём смеси будет меньше двух литров. А бывает и наоборот, ещё как бывает! Вот несколько примеров.

1. Петя и Вася – соседи по даче. Петя говорит, что зелёной краской окрашены 3/4 их общего забора. Вася же утверждает, что 2/3 общего забора окрашены синей краской. Как такое может быть? Ведь сумма $3/4 + 2/3$ больше 1. Не ошибаются ли мальчики?

Ответ. Не ошибаются, каждый смотрит на общий забор со своей стороны.

2. Город *N* и деревню Маниловку соединяет дорога. Горожане говорят, что 3/4 дороги из города в деревню асфальтированы. А сельчане утверждают, что та же дорога из деревни в город асфальтирована лишь наполовину. Как это возможно? Ведь $3/4 + 1/2$ больше 1...

Ответ. Из села в город и обратно добираются автобусом или машиной. Из города в направлении деревни асфальтированы 3/4 правой стороны дороги. Из деревни в направлении города асфальтирована тоже половина правой стороны – но эта сторона другая!

Художник Анна Рацкевич

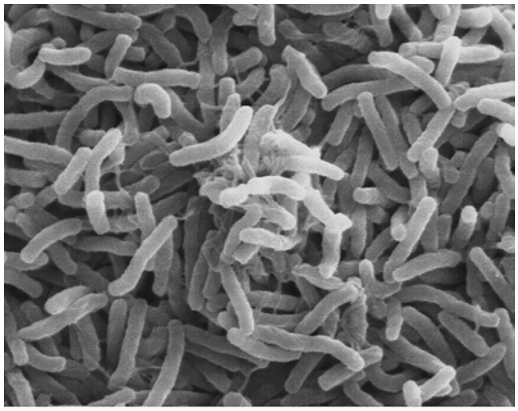
Приключения ХОЛЕРНОГО ВИБРИОНА

Григорий Идельсон

ЧТО ТАКОЕ ХОЛЕРА

Кажется, что инфекционные болезни сопровождают человечество в течение всей его истории. Но это не так: болезни появляются, распространяются и эволюционируют. Недавно мы все были свидетелями того, как распространился по планете новый вирус – ковид-19. Он унёс около 6 миллионов жизней и вроде как притих.

Одна из самых страшных болезней в истории – холера. Как и в случае многих других болезней, можно проследить, как она зародилась и распространилась. Бактерия, которая вызывает холеру, называется *холерным вибрионом*. В отличие от многих других болезнетворных бактерий, холерный вибрион может свободно жить в тёплой воде, а вовсе не обязательно в теле человека. Более того, большинство его штаммов не вызывают болезнь.



Холерные вибрионы. Фото сканирующего электронного микроскопа

Видимо, исходное место обитания холерного вибриона – дельта Ганга на востоке Индии и в Бангладеш. Чтобы вызывать болезнь, бактерия должна содержать несколько генов, из которых важнейший – *холерный токсин*.

Холерный вибрион плохо переносит кислую среду желудка. Для того, чтобы заболеть, человек должен проглотить 100 млн бактерий – тогда есть шанс, что одна или несколько из них уцелеют в желудке и доберутся до кишечника.

Холерный токсин – это белок, состоящий из двух типов субъединиц: А и В. На одну молекулу субъединицы А приходится 5 молекул субъединицы В. Они соединены между собой ковалентно, через два атома серы (это называется *дисульфидная связь*). Прелесть такой связи в том, что вне клетки она очень прочна, но внутри клетки её очень легко разорвать.

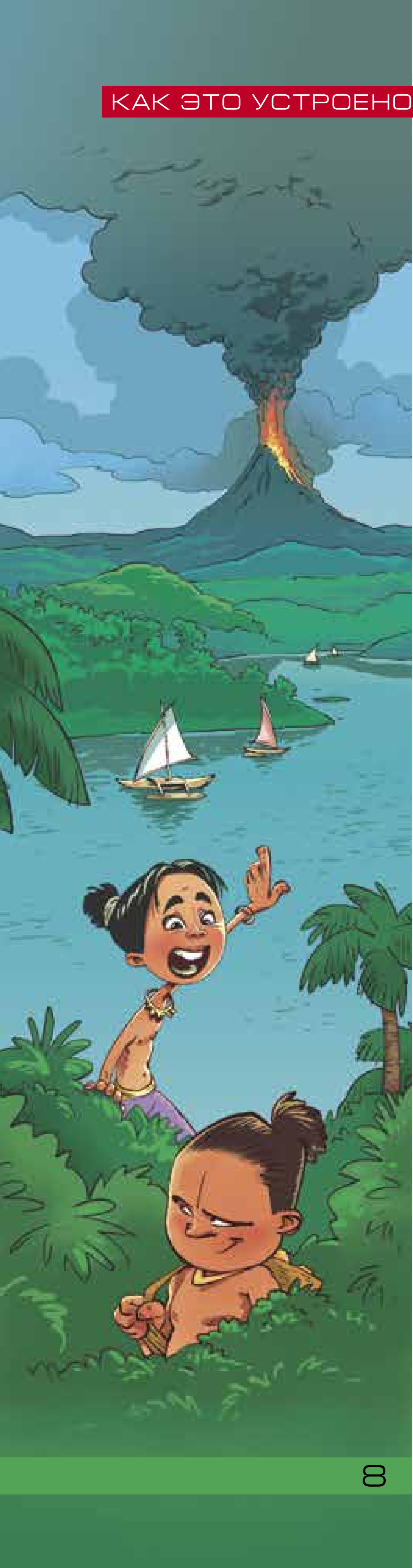
Субъединица В предназначена для того, чтобы связываться с некоторым веществом на поверхности кишечного эпителия – клеток выстилки кишечника. Связавшись, вся молекула токсина оказывается проглочена клеткой, внутри клетки дисульфидная связь разрывается и субъединица А начинает жить отдельной жизнью.

Не хочу вдаваться в биохимические детали с длинными словами, а без них можно объяснить таким образом. В клетке есть целая сеть белков, передающих сбалансированные сигналы: сколько каких веществ надо оставить в клетке, а сколько и каких вывести наружу. А-субъединица портит один из важных белков в этой системе, так что он начинает передавать постоянный сигнал, что в клетке слишком много ионов хлора. Клетка начинает от них избавляться. А вслед за хлором из-за получившегося нарушения равновесия начинают выводиться и соли, и вода. Человек страдает от страшного поноса и, если его не лечить, умирает в течение нескольких дней от обезвоживания и потери солей.

Токсины с устройством, похожим на холерный, состоящие из двух субъединиц, одна из которых нужна, чтобы связываться с клеткой, а другая – чтобы впрыскиваться в клетку и нарушать там передачу важных сигналов – встречаются и у многих других болезнетворных бактерий: дифтерии, коклюша, ботулизма. Во всех этих случаях токсины не были исходно в бактериях, а были принесены в них с помощью *бактериофагов*.

Бактериофаги – это такие вирусы, которые паразитируют на бактериях, подобно тому, как другие вирусы паразитируют на нас.

Вирус впрыскивает в бактерию свою ДНК. Для чего? В большинстве случаев он использует механизмы бактерии, чтобы размножать свою ДНК и производить вирусные белки. Но иногда, очень редко, ДНК вируса встраивается внутрь ДНК бактерии и продолжает дальше размножаться вместе с ней. Такой бактериофаг



принёс в холерный вибрион ген холерного токсина. Вероятно, он взял его из какой-то другой бактерии, но неизвестно, из какой.

КОГДА ПОЯВИЛАСЬ ХОЛЕРА

Учёные проследили, как давно появились штаммы холерного вибриона с геном холерного токсина. Оказалось, не очень давно, не раньше XVIII века. Примерно с того времени врачи в Бенгалии описывали сезонный понос, видимо, вызывавшийся холерным вибрионом. Но настоящая пандемия впервые разразилась в 1817 году. Возможно, это было связано с тем, что это был знаменитый «год без лета».

В апреле 1815 года произошло крупнейшее в письменной истории извержение вулкана Тамбора в нынешней Индонезии. Гора, до извержения имевшая высоту 4300 м, после извержения понизилась до 2800 м. По оценкам учёных, за время извержения в атмосферу было выброшено 41 км^3 вулканического пепла общим весом 10 млрд тонн. Распространение этого пепла в атмосфере привело к значительным глобальным последствиям. В 1816–17 годах по всей планете небо было закрыто желтоватой дымкой, через которую тускло просвечивало солнце.

Последовавший за извержением 1816 год принято называть «годом без лета». По обе стороны Гольф-

Картина Уильяма Тернера «Дидона строит Карфаген» была выставлена летом 1815 года, когда эффект вулканического пепла если и был, то самый минимальный.

стрима, в Европе и в Северной Америке, лето было аномально холодным. В Нью-Йорке и в Виргинии в июле и августе выпал снег и замёрзли реки. В Европе до снега дело вроде не доходило, но в Ирландии дождь лил без перерыва 40 дней, а в Швейцарии – 137 дней. Распространился слух о предсказаниях некого астронома из Болоньи, что Солнце должно окончательно погаснуть 18 июля 1816 года. Над предсказаниями смеялись, но факты говорили сами за себя: 10 – 16 июня 1816 года можно было невооруженным глазом увидеть на Солнце пятна, причём их число выросло с 5 до 8.

Сезон дождей был нарушен и в Китае, и в Индии, тоже с довольно катастрофическими последствиями. Видимо, из-за многочисленных дождей и наводнений свободноживущие вибрионы оказались в более тесном контакте с людьми, и это вызвало пандемию.

В июне 1821 года холера достигла Персии и Месопотамии, а вместе с воюющей персидской армией – северной Месопотамии и Османской империи. В сентябре 1821 года она достигла Баку, а в 1823 году – Астрахани, после чего сама собой заглохла. И английские, и русские врачи достаточно подробно описали новую болезнь, но не знали ни механизмов распространения, ни способов лечения.

Окончание в следующем номере

Картина Уильяма Тернера «Упадок Карфагенской империи» написана в 1817 году, в разгар «года без лета». Видно, что солнце на картине скрыто жёлтой дымкой.

Художник Мария Усеинова

Материал подготовил Григорий Мерзон

РАВНЫЕ ПЛОЩАДИ
В ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКАХ

Соединим точку внутри квадрата с вершинами квадрата (рис. 1). Какая из площадей больше – светлая или тёмная?

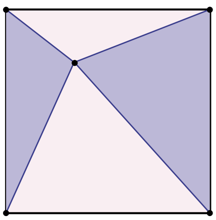


Рис. 1

Оказывается, какую бы точку мы ни взяли, суммарная площадь двух противоположных частей всегда одна и та же и равна половине площади квадрата.

Это совсем не трудно понять, если провести через нашу точку вертикальную и горизонтальную прямые (рис. 2): они разбивают квадрат на части, в каждой из которых обоих цветов поровну.

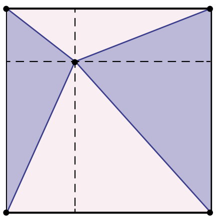


Рис. 2

Можно рассуждать и по-другому. Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту. Основание каждого из четырёх треугольников на рисунке является стороной квадрата. А сумма высот треугольников одного цвета всегда одна и та же (они как раз складываются в «высоту квадрата», рис. 3).

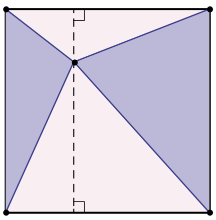


Рис. 3

Замечательно, что это утверждение можно обобщить – и даже в двух направлениях.

Во-первых, можно вместо квадрата рассматривать другие *правильные* многоугольники (у которых равны все углы и все стороны). Например, для шестиугольника получается даже два утверждения (рис. 4): можно покрасить части в шахматном порядке, а можно последовательно в три цвета – и в обоих вариантах общая площадь для каждого из цветов одна и та же, какую бы точку внутри многоугольника мы ни брали. Попробуйте, кстати, это доказать! Возможно, вам пригодится утверждение из заметки «Теорема Вивиани» в «Квантике» №9 за 2022 год.

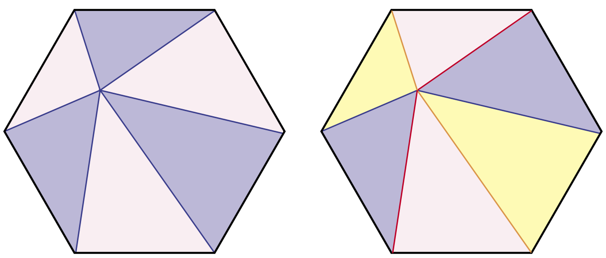


Рис. 4

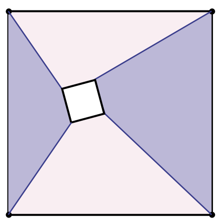


Рис. 5

Во-вторых, можно внутри правильного N-угольника выбирать не точку, а другой правильный N-угольник, и соединять соответствующие вершины. Попробуйте доказать и это утверждение. Советуем начать с квадрата (рис. 5). Если не будет получаться, подсказку можно найти в замечательной книге «Задачи на вырост» В. В. Произволова.

Художник Лиза Гожая

Александр Бердников

ВОДЯНЫЕ ЛИНЗЫ: ОТВЕТЫ

В прошлом номере мы задали несколько вопросов о ручье с пузырями и тенями (фото 1). Напомним кратко эти вопросы и попробуем на них ответить.

Фото 1

1. Почему в центрах теней от пузырьков мы видим яркое пятно?

Хотя водяная линза прямо под пузырьком вогнута и потому рассеивает свет в стороны (рис. 1), вне пузырька вода тоже изогнута (гладко сопрягаясь со стенками пузыря) и тоже преломляет свет, как на рисунке 2.

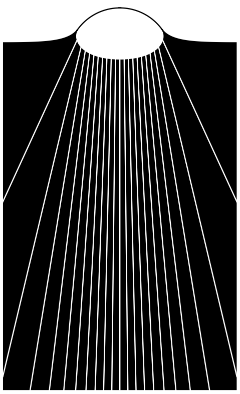


Рис. 1

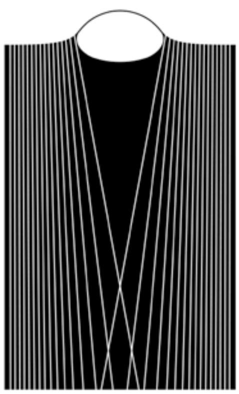


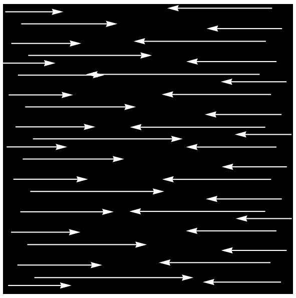
Рис. 2

Этот рисунок объясняет, откуда в центр попадает дополнительный свет. Правда, из рисунка кажется, что центр не будет ярким: лучей там мало. Так бы и было, если бы вместо круглого пузырька у нас была длинная палка, плавающая на поверхности.[1] Рисунок 2 показывал бы её поперечный срез, в котором лучи заходят в тень с боков и скрадывают её, а рисунок

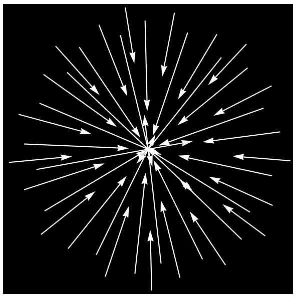
[1] Такую ситуацию мы обсуждали в задаче «Куда пропала тень?» в «Квантике» №4 за 2022 год.

За показывал бы, как эти лучи выглядят при взгляде сверху – посередине получается не особенно густо.

Но у нас не прямая палка, а круглый пузырь, и под него свет приходит не только слева и справа, но со всей округи – это и делает центр особенно ярким (рис. 3б).



а Ход лучей под палкой, вид сверху.



б Ход лучей под пузырём, вид сверху.

Рис. 3

2. Как получилась тень без яркого пятна?

Что нужно поменять в предыдущей ситуации, чтобы убрать яркое пятно из центра? Нужно убрать «внешнюю линзу», которая его создаёт, отклоняя свет в центр. То есть нужно, чтобы вода была везде «наклонена к центру» (отклоняя свет от него, как на рисунке 1) – была бы этакой ямкой на воде. Отчего поверхность ручья может быть ямкой? От небольшого вихря в потоке: в центре вихря образуется воронка, углубление. Такая линза рассеивает лучи в стороны (рис. 4); на достаточном отдалении получается (полу)тень с яркими краями, как на нашем фото. Эта тень гораздо заметнее самой воронки, поэтому наблюдать за жизнью вихрей (как они возникают, сливаются, исчезают) часто удобней именно по их теням.

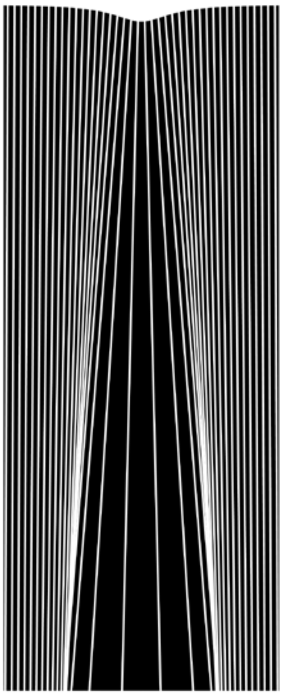


Рис. 4

Саму воронку заметить куда сложнее (она же прозрачная), но всё же можно (она же линза). Задача заметно упрощается, если знать, где воронку искать.

Зная, где на фото пузыри, а где их тени, можно прикинуть, где был бы третий пузырь, если бы третья тень была от него (фото 2). И мы видим в этом месте воронку – по тому, как она искажает текстуру дна.

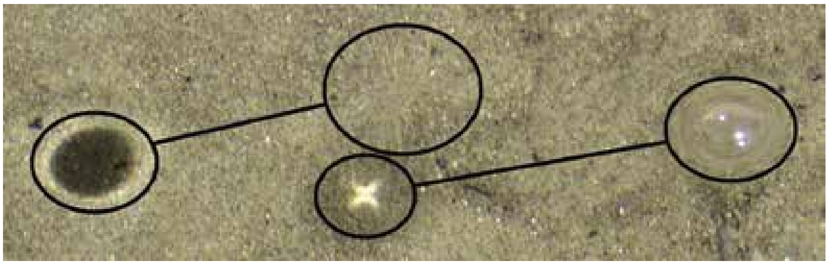


Фото 2

3. Присмотревшись к тени из предыдущей задачи, выясните, какие цвета преломляются водой сильнее – красный или синий?

Рисунок 5 показывает, что чем сильнее луч преломляется водой, тем меньше он успеет пройти на пути до дна. У нашей тени дальняя от воронки сторона рыжевата, а ближняя красновата (фото 2), поэтому есть соблазн решить, что преломляется сильнее красный. Но тень – это нехватка света, так что всё получается наоборот. На ближний край пятна упадёт «тень сильно преломлённых цветов», то есть там их не будет. А будут они у дальнего края, до которого эта тень не дотягивается. Дальний край синий – значит, синий преломляется сильнее.

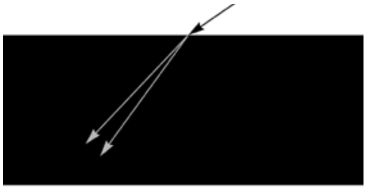


Рис. 5

Чтобы этот аргумент стал нагляднее, посмотрите на рисунок 6. Он показывает (преувеличенно), как свет должен был идти, чтобы ближний край был рыжим, а дальний – голубым. Самые красные лучи тут самые пологие, а самые синие – самые отвесные, значит они сильнее преломились. А можно ещё вместо тени посмотреть на яркое пятно (фото 2), у него окраска противоположная, и для него работает рассуждение, с которого мы начали

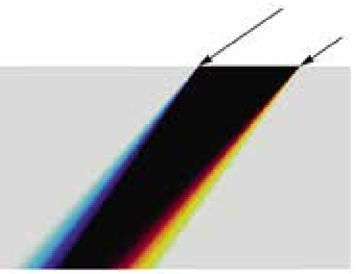


Рис. 6

(«сильнее преломлённый свет падает ближе, окрашивает ближний край пятна»).

Мы получили верный ответ, но, надо признаться, сжульничав. Мы учитывали преломление света только на входе в воду, но он преломляется и на выходе. Поэтому даже изначально неокрашенные черты дна выглядят из воздуха цветными. Например, из светлого пятна на дне разные цвета идут до глаза разными путями: синие лучи более изломлены, то есть под водой более вертикальны, чем красные (рис. 7).

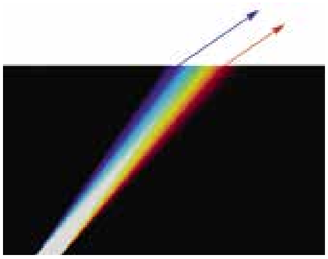


Рис. 7

Значит, это пятно будет иметь синюю каёмку дальше от наблюдателя и красную ближнюю к нему; именно это мы и видим у отдельных песчинок (фото 3).

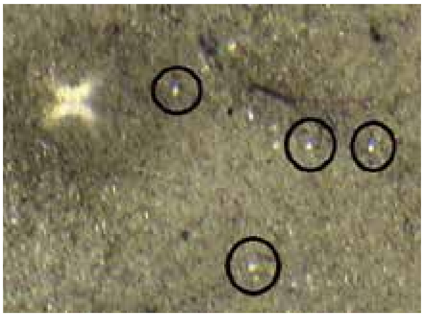


Фото 3

В результате тень в задаче раскрашивается дважды: преломлением на входе в воду, которое определит вид тени как рисунка на дне; но потом и преломлением на выходе из воды, которое определит, как мы этот рисунок извне воды увидим. Наше исходное решение не учитывает преломления на выходе, и поэтому работает, только когда его нет (то есть мы смотрим строго сверху). И то, что оно дало правильный ответ – частично удача (частично – потому что «перебороть» вторым эффектом первый не так-то просто).

4. Куда направлены оси крестообразных пятен?

Поиграв с пузырями и фонариком, можно заметить, что когда свет падает вертикально, пятна – это простые точки без усиков, а вот если наклонять свет, пятна расползаются в кресты; к тому же, куда свет наклоняется, туда направлена и ось креста[2]. Объяснение тут сложное, пока ограничимся ответом.

[2] Чтобы это совпадение было очевидно, а не как на нашем фото, смотреть на всё нужно сверху. Тогда легче сравнивать горизонтальные оси креста и довольно отвесное направление освещения.

Фото автора Художник Алексей Вайнер

Сергей Полозков

СЕРДЦЕ-ТРАНСФОРМЕР из бумаги

Начертите на клетчатом листе (клетка = 5 мм) по линейке заготовку (рис. 1) и вырежьте её. Цифры 1, 2, 3, 4 помогут понять, где какая сторона.

Сложите заготовку по зелёной оси (рис. 2). Затем, не разворачивая зелёный сгиб, сделайте красные и синие сгибы в обе стороны.

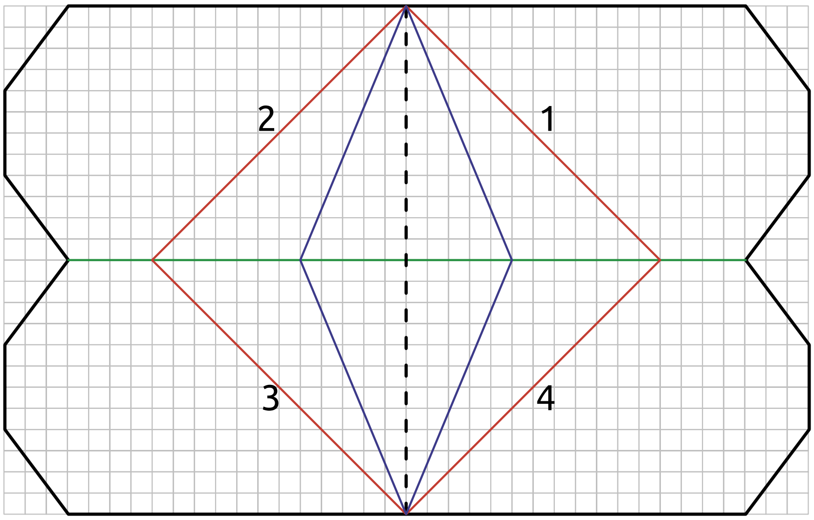


Рис. 1

Раскройте заготовку, согните её по двум правым синим линиям так, чтобы они оказались внутри (рис. 3а, 3б).

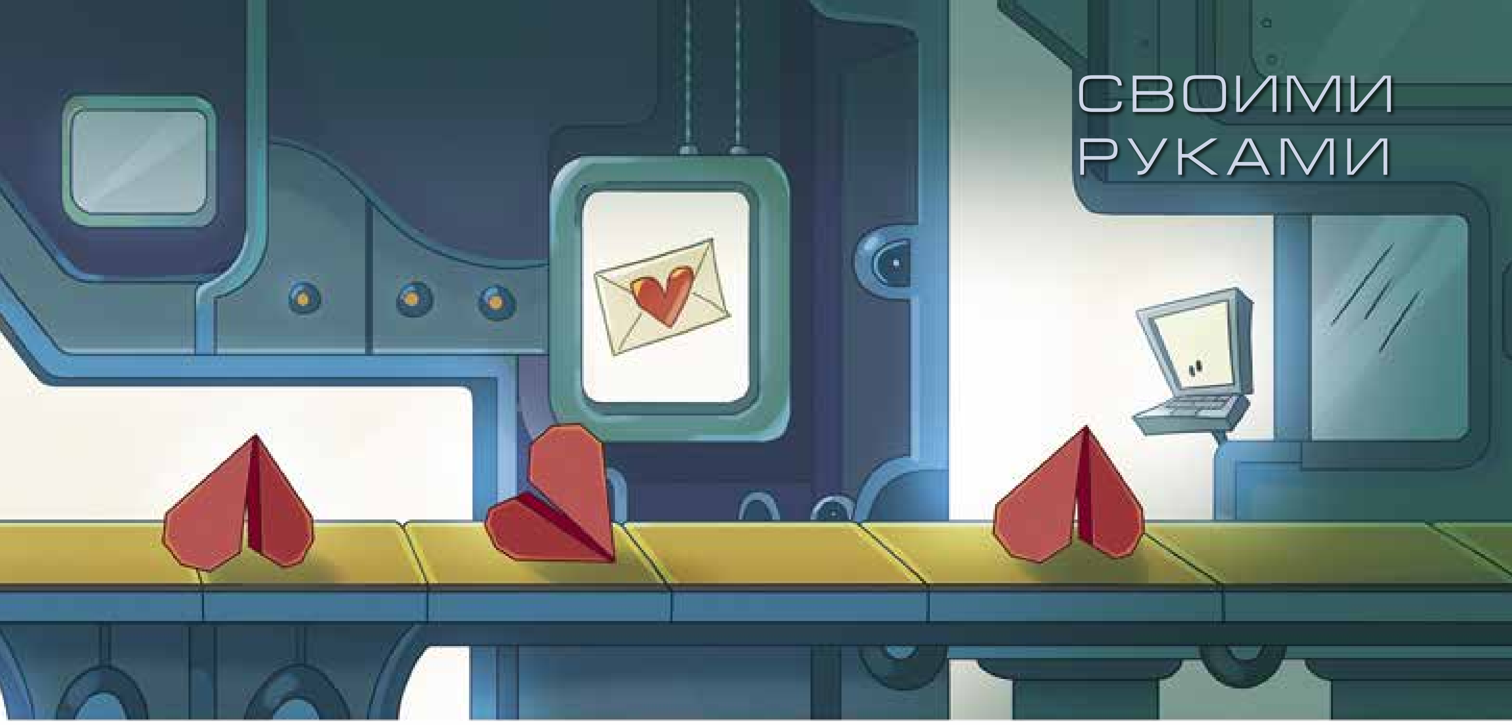
Снова раскройте заготовку и согните её по двум красным линиям так, чтобы они оказались снаружи (рис. 3в, 3г). Правая половина сердца собрана!

Разверните заготовку обратно в полоску (рис. 2) и сделайте левую половину сердца (рис. 4а, 4б).

Сложите половинки одновременно (и справа, и слева). Вы получите игрушку-трансформер.

При трансформации положение текста меняется: цифры «3» и «4» то вместе, а то раздельно (рис. 5а, 5б). На рисунке 6 показано промежуточное положение.

Сердце можно использовать как необычную визитку или открытку.



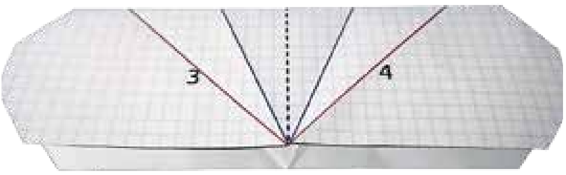
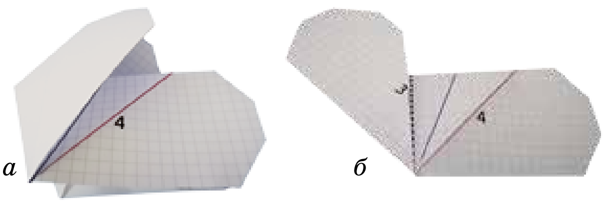
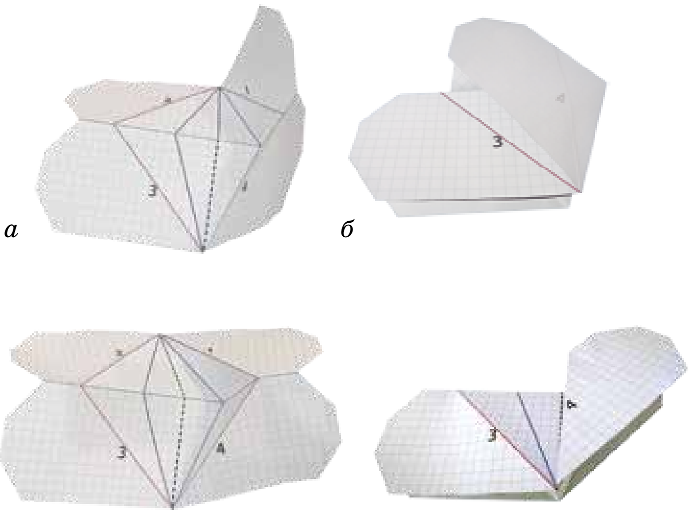


Рис. 2



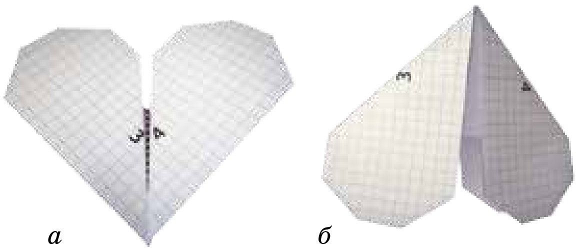
а *б*

Рис. 4



а *б* *в* *г*

Рис. 3



а *б*

Рис. 5

Рис. 6

По ссылке kvantik.com/short/heart-a4 вы найдёте схему для печати на листе А4 (для большей прочности используйте бумагу для черчения).

Художник Анна Рацкевич

Фото автора

КАК КОЛЛЕГА СПРУДЛЬ НАНИМАЛ КОШКУ

– Вот, – сказал дятел Спятел, размахивая скомканным листком бумаги, – дождались! Я же предупреждал тебя, что добром это не кончится. Это объявление коллега Спрудль повесил на дверях Заброшенного Грота!

Огрыза развернула лист бумаги.

> ОТДЕЛУ ОХРАНЫ ЗАБРОШЕННОГО ГРОТА ТРЕБУЕТСЯ
> **КОШКА!**
> В ХОРОШЕЙ СПОРТИВНОЙ ФОРМЕ, ЧЕСТНАЯ, БЕЗ ВРЕДНЫХ ПРИВЫЧЕК. ПРЕДЛАГАЕТСЯ ДОСТОЙНАЯ ЗАРПЛАТА, ПРЕМИИ И ВКУСНЯШКИ ПО ПЯТНИЦАМ.

– Доигрались... – грустно сказала мышь Огрыза.

– Не надо было уносить из Заброшенного Грота весь пармезан, – подтвердил дятел Спятел. – Нужно уметь вовремя поделиться с хозяевами!

– Какое зверство, – возмутилась Огрыза, – не мышеловка, не стрихнин, а кошка! Варварство! Хуже, чем в триасовом периоде! Что же делать, что же делать... Там еще столько запасов осталось...

– И чеснок есть? – поинтересовался дятел Спятел.

– Полнó, лучше бы его не было.

– А техническая подсобка имеется? Ну там лаки-краски всякие, ацетон-нашатырь...

– Есть. Я, правда, ход туда не прокладывала, но сквозняк иногда доносит запахи.

– Ну пораскидывай чесночку и лимонных корочек, открой банку с эмалью, в общем провоняй эту лавочку как следует, – никакая кошка туда не сунется.

– Я тогда и сама туда не сунусь.

– Ну не надо так трагично, – не согласился дятел Спятел, – запах со временем выветрится, а мы тем временем что-нибудь придумаем.

* * *

Дятел Спятел стоял на пороге Заброшенного Грота в своём лучшем галстуке и в цилиндре с блестками «алмазная пыль». Дверь открыл хозяин – коллега Спрудль. Он хотел было уже сказать какую-нибудь обычную гадость для простых посетителей, но искрящаяся поверхность цилиндра сбила это желание.

– Я пришёл к вам по поручению клана Кошек, – с мрачной серьёзностью произнёс дятел Спятел. – Ваше оскорбление замечено и не может быть оставлено просто так. Мои поручители требуют удовлетворения.

– Ка-а-акое оскорбление? – опешил коллега Спрудль. – Я никогда не имел дело с кланом Кошек!

– Это вы сможете объяснить им самим чуть позже, перед смертью, – парировал дятел Спятел. – Вы написали объявление. И я послан объявить вам о последствиях этого неразумного шага.

– Но что я такого написал? – забеспокоился коллега Спрудль. – Это всего лишь объя-а-авление о приёме на работу, бульк!

– Важно не то, что написано, а то, что остается в памяти. Вы позволили себе намекнуть, что кошки могут быть нечестными, могут иметь вредные привычки и могут НЕ быть в хорошей спортивной форме! Распространителю подобных идей не может быть прощения.

– Нет-нет, уверяю вас, это какое-то недоразумение, это не я, я не имел в виду ничего подобного, это страшная ошибка, я был в полной депрессии, когда писал это объявление, понимаете, мой лучший сыр… пармезан многолетней выдержки… его унесли мыши!

– Это не моё дело, – сурово сказал дятел Спятел, – но думаю, что спасти вас может только чудо, ну или какой-то невероятно изящный поступок!

* * *

В офисе фирмы «Математические услуги» ещё ни разу не было таких посетителей. Точнее говоря, по отдельности и коллега Спрудль, и питон Уккх уже не раз бывали клиентами фирмы, но оба сразу – такого ещё не было. Горгулий, директор фирмы, с трудом удерживал самообладание в присутствии этих двух бандитов и старался изображать полнейшую безмятежность. Получалось довольно убедительно.

– Требуется поставить та-а-акой барьер, чтоб ни одна мышь не проскочила! Но при этом, бульк, если что – персонал должен проходить беспрепятственно.

– Мы хотим установить лазерный щит! – поддакнул питон Уккх. – Из лазерной указки и усилителя я изготовил лазерную микропушку. Сто, или лучше тысяча таких микропушек остановят кого угодно!

– Ну, я вижу, вы прекрасно знаете, что вам требуется, чем же может помочь наша фирма?

– Мы знаем, что, – ответил коллега Спрудль, – но мы не знаем, как. Нам не хватает концептуальности. И красоты! Мне нужно невероятно изящное решение!

– Кажется, я понимаю... Высокоэстетические гарантированно непреодолимые барьеры... Думаю, мы разработаем для вас новейшую наихудожественнейшую парадигму непроникновения.

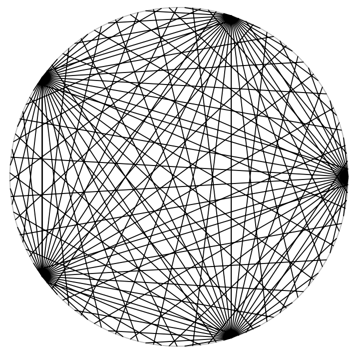
* * *

– Прежде чем обсуждать принципы модулярно-мультипликаторной непроницаемости, – сказала Бусенька, – посмотрим на опытные образцы.

Бусенька, Горгулий и оба клиента подошли к стенке, где стояло несколько образцов, скрытых занавесками.

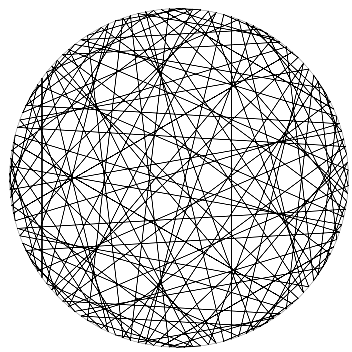
– Представляем вашему вниманию модулярно-циркулярную лазерную сетку «Антимышь-135-54»!

Бусенька откинула занавеску. За занавеской стояло большое велосипедное колесо с причудливым переплетением спиц, образующих необычный узор.



– Интере-е-есная поделка, – оценил коллега Спрудль, обойдя колесо вокруг.

– А вот, пожалуйста, другая модель – «Антимышь-135-49»!



– Ничего себе! – воскликнул питон Уккх. – Какая красотища! 135 – это количество спиц?

– Лучше сказать, количество лазерных указок, – поправил Горгулий.

– Вы хотите сказать, что это не поделки кружка «крюколапый велосипедист»? – в присущей ему манере слегка всхамил коллега Спрудль. – И что это имеет отношение к нашему заказу?

– Именно так! – Горгулий жизнерадостно улыбнулся. – Перед вами модель того, что вы заказали: непроницаемого полиморфного лазерного щита!

– Поли-какого? – переспросил Уккх.

– Полиморфного! То есть настраиваемого. Вы можете устанавливать десятки или даже сотни уникальных, изумительно красивых, невероятно изящных и совершенно непроницаемых лазерных сеток!

– В точках обода, откуда выходят спицы, – подхватила Бусенька, – мы установим лазерные указки. Указки можно поворачивать независимо друг от друга с помощью специальной программы. В образцах, которые вы осмотрели, вместо невидимых лучей мы закрепили совершенно осязаемые спицы.

– А как выбрать подходящие направления лучей?

– Гениальное всегда просто, – скромно ответил Горгулий. – С помощью обычного умножения!

– На ободе стоит N указок, – стала объяснять Бусенька. – Пронумеруем их числами от 0 до $N-1$. Чтобы построить лазерную сетку, выберем число k от 1 до N. После этого направим указки: если номер указки равен x, то направим её на указку с номером kx. А если число kx слишком большое, то есть больше $N-1$, то вместо kx возьмем остаток числа kx при делении на N.

– Как работает это правило, вы видите на наших образцах. Второе число в номере модели – это и есть k. И заметьте, вы всегда можете менять это k. Число k – это ключ, управляющий видом сетки, и вы можете каждый раз устанавливать его по своему желанию.

– И поче-е-ему же вы считаете, что мышь здесь не проскочит?

– Возьмём для примера самый скучный вариант $k=N$, – предложила Бусенька. – Как, по-вашему, будет выглядеть такая сетка?

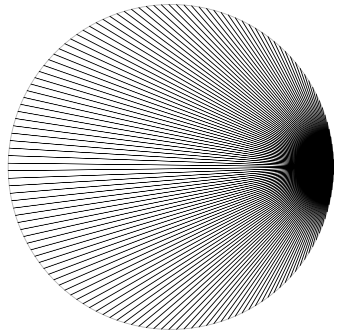
– Указку номер x направим на указку Nx, – повторил по памяти коллега Спрудль. – Если число Nx больше $N-1$...

– Естественно, оно больше, – перебил питон Уккх, – поэтому надо поделить Nx на N с остатком.

– Но Nx делится на N без оста-а-атка. Что же делать. Бульк?

– Я же говорю, это самый скучный вариант. Делится без остатка – значит остаток равен 0. Мы должны направить указку номер x в сторону нулевой указки! А нулевая указка у нас стоит в самой правой точке обода.

Получится вот такая сетка.



– Не очень зрелищно, – скривился питон Уккх.

– Но мышь не проскочит, – прагматично заметил коллега Спрудль.

– Разумеется, не проскочит, – подтвердил Горгулий. – Мы разбили круг на N частей. И хотя они разной формы, их площади так малы, что не то что мышь – таракан не сможет протиснуться, не задев луча.

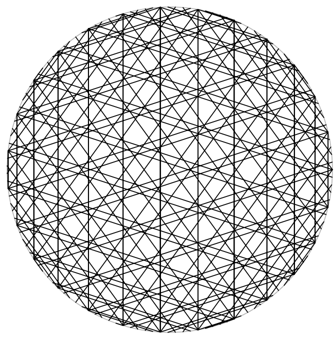
– При других k – «менее скучных», – добавила Бусенька, – лучи многократно пересекаются и количество частей существенно больше, в результате чего надежность заслона только повышается.

– Погодите, погодите, – воскликнул коллега Спрудль, – а если я возьму $k = 1$?

– Конечно, возьмёте! Это специальный ключ для персонала. При $k = 1$ каждая указка должна светить на саму себя. Но это бессмыслица, поэтому просто не будем её включать. Проход свободен.

– Неплохо. Почему же вы не сделали опытный образец с действующими лазерами?

– Сделали! – и Горгулий откинул третью занавеску. За ней стояло колесо, на обод которого было накручено много одинаковых деталек. – Вот действующая «Антимышь-135-80». Так как лазерные лучи невидимы, сама сетка показана на схеме.



Бусенька включила «Антимышь» и кинула сквозь колесо бумажный шарик. В момент пересечения плоскости колеса шарик вспыхнул. Клиенты восхищенно переглянулись.

* * *

Бусенька, Горгулий и Огрыза уселись за стол. Дверь открылась, в комнату вошла огромная коробка с тортом и направилась к столу. За коробкой можно было заметить дятла Спятла, который, между прочим, эту коробку и нёс. Водрузив коробку на стол, дятел Спятел провозгласил:

– Вечер, посвящённый внедрению системы «Антимышь», объявляю открытым.

Все зааплодировали.

– Этот прекрасный торт наш ужасный клиент коллега Спрудль попросил передать клану Кошек. Не думаю, что сладкое полезно для кошек. Такой подарок мог бы окончательно испортить их отношения. Лучше уж мы сами.

Все опять зааплодировали.

– Право поставить заключительную точку в проекте «Антимышь-135» предоставляется Бусеньке.

Бусенька скромно поклонилась.

– Как и ожидалось, – сказала она, – наши клиенты не стали ничего менять в математической схеме проекта и установили лазерные щиты нашей системы на всех хоть сколько-то значимых входах в подвал.

– Готовые решения «под ключ» – это страшная сила, – вставил словечко дятел Спятел.

– Все 135 лазеров, охраняющих проход, – продолжала Бусенька, – постоянно включены. Конфигурацию каждого щита можно поменять, введя на его пульте ключ k от 1 до 135. Отключить щит можно только с помощью ключа $k = 1$, но это могут сделать только те, у кого есть брелок административного доступа. Другие коды устанавливаются без проблем.

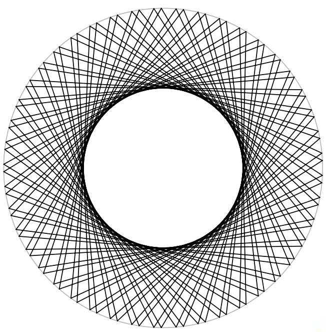
– К сожалению, – радостно сказал дятел Спятел, – мы не можем подарить нашей Грызе административный брелок. Они все на строгом учёте.

– Да-да, совсем на очень строгом, – наигранно поддакнул Горгулий.

Огрыза с недоумением посмотрела на собравшихся.

– Вместо брелка мы подарим Огрызе прекрасное число 46! – воскликнул дятел Спятел.

– При вводе ключа 46 получается такая картинка, – пояснила Бусенька. – Это, конечно, не широко распахнутая дверь, но и не узкая щелочка.



Огрыза посмотрела на картинку и вздохнула.

– Самая большая головка чеддера не пролезет!

Художник Инга Коржнева

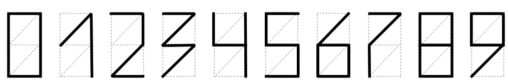
XXIX турнир математических боёв имени А.П. Савина

Избранные задачи

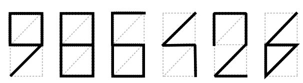
Ежегодно в конце июня школьники из многих городов съезжаются на летний турнир имени А.П. Савина. Приводим избранные задачи турнира 2024 года. После номера задачи указаны её автор и классы, в которых она предлагалась.

1. (*Л. Смирнова,* 6) Из пунктов *А* и *Б*, расстояние между которыми 24 км, одновременно навстречу друг другу вышли два туриста со скоростями 5 км/ч и 3 км/ч соответственно. В это же время из пункта *Б* вылетела муха со скоростью 10 км/ч. Долетев до первого туриста, она поворачивает и летит обратно до встречи со вторым туристом, потом снова поворачивает и летит навстречу первому и так далее, пока туристы не встретятся. По направлению из *А* в *Б* дует ветер, скорость которого 2 км/ч – он влияет на скорость мухи, но не на скорости туристов. Сколько километров пролетит муха?

2. (*Т. Корчемкина*, 5–6) Почтовый индекс состоит из шести цифр, нарисованных чёрточками – сторонами или диагоналями клеток, как показано на образце:



Таня написала индекс, но только одну цифру написала правильно, в двух цифрах сделала по одной ошибке (то есть по одной чёрточке нарисовала не в том месте), а в остальных трёх цифрах – по две ошибки (то есть по две чёрточки нарисовала не в том месте). Количество чёрточек везде верное. На рисунке показано, что у неё получилось. Какой был правильный индекс?



3. (*Т. Казицына, А. Грибалко,* 6) Петя утверждает, что вырезал из полоски шириной 2 клетки многоугольник из 24 клеток, которым полностью обернул куб $2\times2\times2$. Может ли это быть правдой?

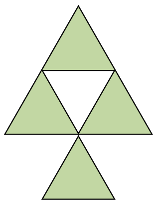
XXIX турнир математических боёв имени А.П. Савина

Избранные задачи

4. (*А. Грибалко,* 5–7) Равносторонний треугольник со стороной 10 разбит линиями, параллельными сторонам, на равносторонние треугольники со стороной 1. Фигуру, составленную из этих треугольников, назовём *полоской*, если она заключена между двумя соседними параллельными линиями. Исходный треугольник разрезали на 18 полосок. Докажите, что хотя бы одна из них состоит не менее чем из семи треугольников разбиения.

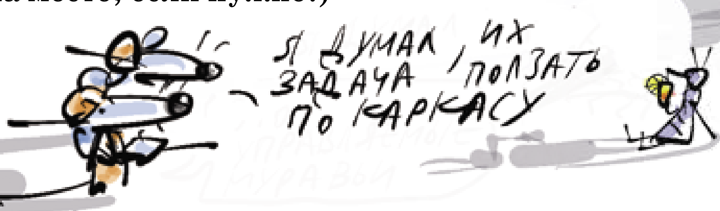
5. (*А. Шаповалов,* 7–8) Имеется девять палочек: три красных, три жёлтых, три зелёных. Известно, что можно сложить треугольник из любой тройки палочек разных цветов. Сколько треугольников из палочек одинакового цвета можно гарантированно сложить?

6. (*К. Кноп*, 5–8) Разрежьте «ёлочку», составленную из четырёх равносторонних треугольников (см. рисунок), на три равные части.



7. (*К. Кноп*, *А. Грибалко*, 6–8) Перед экспертом и судьёй лежат 20 гирек массами 10 г, 11 г, ..., 29 г. Эксперт знает массы всех гирек, а судья знает, что массы именно такие, но не знает, какая гирька сколько весит. Судья берёт по очереди каждую гирьку и кладёт её на одну из чаш весов, а эксперт в ответ должен взять какие-то две гирьки и тоже положить их на весы. Результат взвешивания фиксируется, и гирьки снимаются с весов. Может ли эксперт действовать так, чтобы после 20 взвешиваний судья узнал массы всех гирек?

8. (*Т. Голенищева-Кутузова*, 5–8) По каркасу единичного куба ползают муравьи. Они не могут находиться на расстоянии меньше 1 (по каркасу) друг от друга. При каком наибольшем количестве муравьёв каждый сможет побывать во всех вершинах куба? (Муравьи могут как угодно менять скорость и стоять на месте, если нужно.)



XXIX турнир математических боёв имени А.П. Савина

Избранные задачи

9. (*А. Пешнин*, 6–7) На доске написаны два натуральных числа: одно синее и одно красное. У Пети есть своё любимое натуральное число. Он нашёл его НОД с синим числом и его НОК с красным. Оказалось, что если к первому результату добавить красное число, а ко второму – синее, то суммы будут равны. Докажите, что красное число делится на синее.

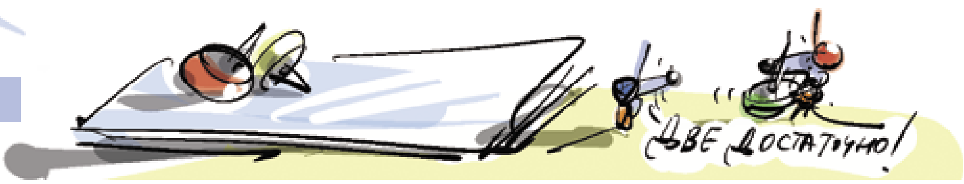
10. (*А. Грибалко,* 6–7) Вокруг поляны, в центре которой растёт баобаб, сидят 100 мудрецов. Им рассказали, что на них наденут колпаки с различными номерами от 1 до 100, и каждый будет видеть все колпаки, кроме своего собственного и колпака сидящего напротив мудреца. Затем по часовой стрелке, начиная с самого старшего, каждый должен будет назвать натуральное число от 1 до 100. Перед началом испытания мудрецы могут договориться, как им действовать. Какое наибольшее количество из них гарантированно смогут назвать номер на своём колпаке?

11. (*А. Шаповалов,* 5–6, 8) На квадратном континенте все страны прямоугольны. Две страны считаются *соседями*, если имеют общий отрезок границы. Назовём страну *влиятельной*, если у неё не менее десяти соседей. Могут ли не менее а) четверти; б) трети всех стран быть влиятельными?

12. (*А. Шаповалов,* 7–8) К левому берегу реки подошли N беглецов с номерами 1, 2, ..., N, где $N > 1$. Есть «квадратная» лодка. В ней может плыть один беглец, чей номер – точный квадрат, или два беглеца с суммой номеров, равной точному квадрату. При каком наименьшем N все беглецы могут переправиться на правый берег?

13. (*В. Дольников*, 6) На столе лежат шесть кусков бумаги. Известно, что площадь каждого куска больше половины площади стола. Докажите, что все куски можно прикрепить к столу двумя кнопками.

Материал подготовил Александр Грибалко   Художник Сергей Чуб

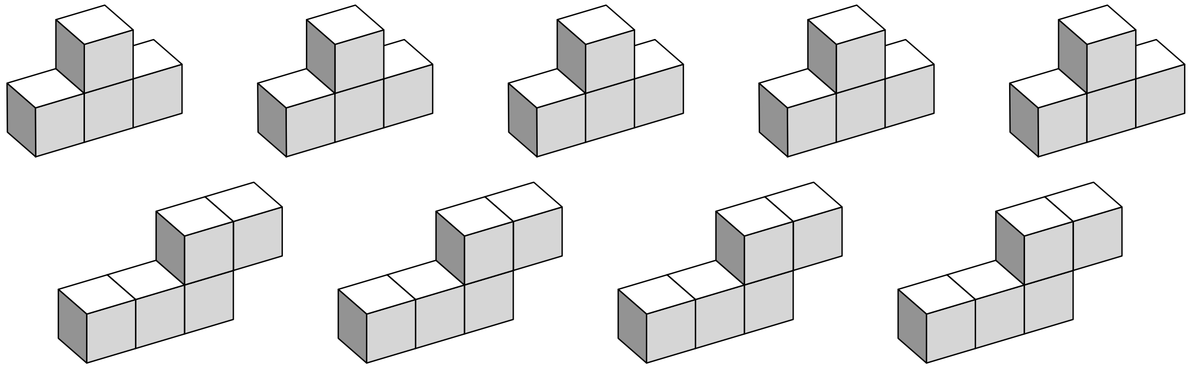


NT-БЛИЗНЕЦЫ

В головоломке всего 9 деталей, склеенных из кубиков. Пять из них – это так называемые T-тетракубики, а ещё четыре – так называемые N-пентакубики (см. рисунок).

Задача 1 (для разминки). Используя все детали, соберите параллелепипед. Решение единственное.

Задача 2 (сложная). Используя все детали, составьте одновременно две равные (одинаковые по форме и размерам) объёмные фигуры. Короче говоря, собери «то, не знаю что», но в двух одинаковых экземплярах. Автор этой головоломки (В. Красноухов) утверждает, что существует не менее четырёх различных решений. Найдите хотя бы одно из них.



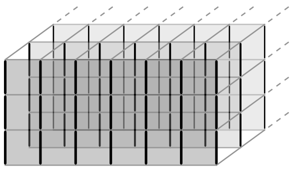
Желаем успехов!

Ответы в следующем номере

Художник Алексей Вайнер

НАШ КОНКУРС, XII тур («Квантик» № 8, 2024)

56. *Петя хочет собрать из кусочков проволоки длиной по 1 см каркас параллелепипеда 3 см × 6 см × 8 см, поделённого на кубики со стороной 1 см. Сколько кусочков ему для этого понадобится?*



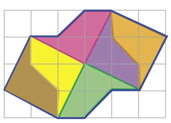
Ответ: 629. Кусочки, параллельные стороне длиной 3 см, можно разбить на группы входящих в прямоугольники 3 см × 6 см. Таких прямоугольников $8+1=9$, и в каждом $6+1=7$ столбиков по 3 кусочка, то есть, всего кусочков, параллельных стороне длиной 3 см, будет $3\cdot(8+1)\cdot(6+1)=3\cdot9\cdot7=189$. Аналогично, кусочков, параллельных стороне длиной 6 см, будет $6\cdot(3+1)\cdot(8+1)=6\cdot4\cdot9=$ $=216$, а кусочков, параллельных стороне длиной 8 см, будет $8\cdot(3+1)\cdot(6+1)=8\cdot4\cdot7=224$. Всего кусочков $189+216+224=629$.

57. *Из пунктов А и Б навстречу друг другу одновременно выехали велосипедисты Алёша и Боря. Их скорости постоянны, причём Алёша едет быстрее Бори. Доехав до пункта Б, Алёша поворачивает обратно, а Боря поворачивает обратно в пункте А. Встретившись после этого, оба разворачиваются, и Боря снова едет в пункт А, а Алёша в пункт Б. Кто из них приедет раньше?*

Ответ: Боря. Так как Алёша едет быстрее, место первой встречи ребят будет ближе к Б, чем к А. Значит, в момент, когда Боря доедет до А, Алёша уже развернётся в Б и проедет часть пути к А. То есть за время, нужное Боре, чтобы проехать расстояние между А и местом второй встречи, Алёша проедет меньше, чем расстояние от Б до места второй встречи. Значит, в момент, когда Боря вернётся в А, Алёша до Б ещё не доедет.

58. *Разрежьте фигуру на рисунке на 6 равных (и по форме, и по размеру) частей.*

Ответ: см. рисунок.



59. *Разрешается либо прибавить к натуральному числу сумму его цифр, либо отнять от него сумму его цифр. Можно ли, стартовав от числа 1, с помощью нескольких таких операций получить число: а) 101; б) 100; в) 99?*

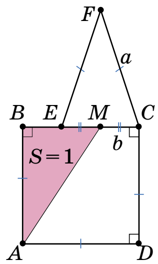
Ответ: а) можно; б) нельзя; в) можно.

а) Если всё время прибавлять сумму цифр, то получим числа 1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, 38, 49, 62, 70, 77, 91, 101, ... , поэтому 101 получить можно.

б) Мы видели, что 100 нельзя получить одними прибавлениями. Если же сделать хоть одно вычитание, результат получится кратным 9 (так как остаток при делении на 9 у числа и у суммы его цифр один и тот же). И далее мы будем складывать или вычитать только кратные 9 числа.

в) Дойдём до 101 и вычтем сумму цифр 2.

60. *Можно ли по информации на рисунке найти расстояние между какими-нибудь двумя из 7 точек, отмеченных буквами? При решении вам пригодится теорема Пифагора: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. (Равные отрезки на рисунке отмечены равным числом чёрточек, площадь красного треугольника равна 1 см².)*



Ответ: да, $BF=2$. Пусть отрезки, отмеченные риской, имеют длину a, отмеченные двумя рисками – длину b. Площадь треугольника ABM равна $\frac{1}{2}a(a-b)=1$, откуда $a(a-b)=2$.

По теореме Пифагора, $FM^2=a^2-b^2$ и $BF^2=$ $=BM^2+FM^2=(a-b)^2+a^2-b^2=2a(a-b)=2\cdot2=4$.

ОЗЕРО ЯРЧЕ СОЛНЦА («Квантик» № 9, 2024)

Свет от дорожки к нам поступает и правда с большей площади (в определённом смысле), но он и менее яркий. На фото это не очевидно, так как дорожка уже настолько яркая, насколько камера может показать. Поэтому солнце ещё более ярким показать она не может.

ПРЕВРАЩЕНИЯ ГРАФОВ

Задачи 2 – 4. а) Подойдёт рисунок 1 статьи. Этот граф имеет ось симметрии, но у него пересекаются рёбра. Эти пересечения легко убрать, и даже повысить степень симметрии при этом (рис. 1).

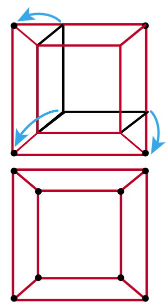


Рис. 1

б) Возьмём развёртку куба, отметим точкой середину каждой грани и соединим склеиваемые грани (рис. 2).

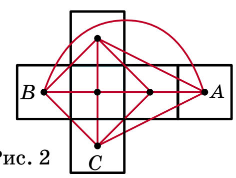


Рис. 2

У полученного графа нет самопересечений, но он несимметричен. Чтобы сделать его и непересекающимся и симметричным, можно сместить вправо нижнюю вершину графа и немного подвинуть остальные (рис. 3).

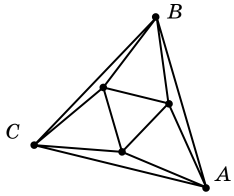


Рис. 3

Тут 3 оси симметрии. Можно сделать и 6, но ценой появления пересечений (рис. 4).

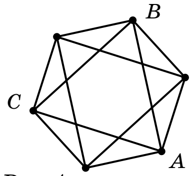


Рис. 4

в) Это задание – посложнее. Можно, например, начать с какого-нибудь угла куба и с соединяющихся в этой вершине рёбер. Удобно пронумеровать рёбра куба, то есть вершины нашего графа, и следить, кто с кем соединяется (рис. 5).

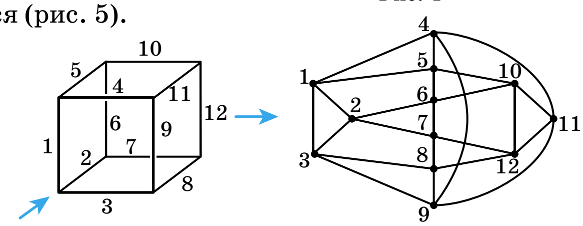


Рис. 5

А если «посмотреть на кубик сверху», можно построить граф без самопересечений и с четырьмя осями симметрии (рис. 6).

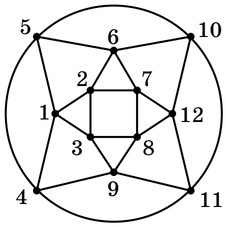


Рис. 6

Задачи 5–6. Пространственный граф вершин куба – сам куб. Сколько эту процедуру ни повторяй, будет получаться одно и то же.

Граф граней – октаэдр (рис. 7). Его легко получить, просто нарисовав точки – вершины графа – на серединах граней куба. А что будет, если опять взять середины граней? – Снова куб (рис. 8).

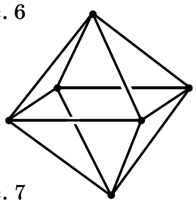


Рис. 7

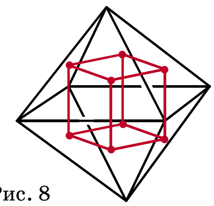


Рис. 8

Пространственный граф рёбер тоже легко построить – просто отметить точками середины рёбер и соединить нужные (рис. 9). На плоскости картинка получается не очень-то симметричной, зато в пространстве – симметричнее не сделаешь. Это многогранник из равносторонних треугольников и квадратов: «куб с отрезанными углами», называется *кубооктаэдр*. У него

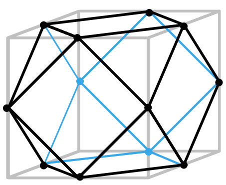


Рис. 9

12 вершин и $12 \cdot 4/2 = 24$ ребра (потому что из каждой вершины выходит 4 ребра).

Как будет выглядеть граф его рёбер? Нарисовать его «поверх» предыдущего рисунка сложновато… но можно представить, как он выглядит, или нарисовать развёртку. У него 24 вершины – столько, сколько рёбер у кубооктаэдра. Из каждой вершины выходит 4 ребра (потому что каждое ребро кубооктаэдра имеет 4 смежных по стороне ребра). Всего $24 \cdot 4/2 = 48$ рёбер. Те грани, которые у кубооктаэдра были квадратами, превратятся в квадраты, повёрнутые на 45°; грани, которые были треугольниками, снова дадут треугольники. Но появятся ещё новые квадраты: теперь вокруг каждого треугольника уже не 3, а 6 квадратов. Мы, конечно, не можем быть заранее уверены, что получится многогранник именно с квадратами, а не какими-то четырёхугольниками. Но такой многогранник существует. Это *ромбокубооктаэдр* (рис. 10).

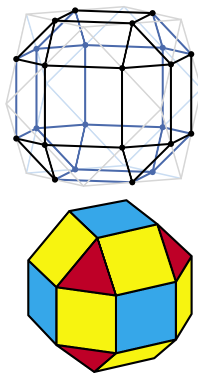


Рис. 10

Задача 7. Граф граней у тетраэдра – это снова тетраэдр. На плоскости его удобнее всего нарисовать, посмотрев на тетраэдр сверху (рис. 11).

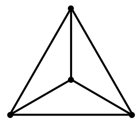


Рис. 11

Граф рёбер выглядит так, как на рисунке 12 или 13 (что то же самое). А в пространстве это – тот же самый октаэдр, что нам уже встречался в задаче 5: 6 вершин, каждая соединена с четырьмя другими. (Какие пары рёбер соответствуют на графе противоположным точкам?) Ну а «граф рёбер графа рёбер» это – о чудо! – снова кубооктаэдр, как в задаче 5.

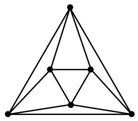


Рис. 12

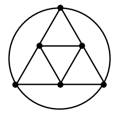


Рис. 13

XXIX ТУРНИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ БОЁВ ИМЕНИ А.П. САВИНА.

Избранные задачи

1. Ответ: 27 км. Скорость сближения туристов равна 8 км/ч, поэтому они встретятся через $24:8=3$ ч, а место их встречи находится в $3 \cdot 3 = 9$ км от *Б*. Значит, в сторону *А* муха пролетит на 9 км больше, чем в сторону *Б*. При этом её скорость в сторону пункта *А* – 8 км/ч, а обратно – 12 км/ч. На эти «лишние» 9 км муха потратит $\frac{9}{8}$ ч, за остальные $\frac{15}{8}$ ч она пролетит в обе стороны равные расстояния. Скорость мухи в одну сторону в 1,5 раза меньше, чем в обратную, поэтому в сторону A муха будет летать в 1,5 раза дольше, чем в сторону $Б$, то есть $\frac{9}{8}$ и $\frac{6}{8}$ ч соответственно. А всего она пролетит $9+8\cdot\frac{9}{8}+12\cdot\frac{6}{8}=27$ км.

2. Ответ: 580753. Составим таблицу соответствия цифры в образце с количеством чёрточек:

Цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Количество чёрточек	6	3	4	4	4	5	5	3	7	5

У Тани получилось такое количество чёрточек: 5, 7, 6, 3, 5, 4. Заметим, что семь чёрточек в образце есть только у цифры 8, поэтому вторая цифра в Танином индексе – это 8, и она написана правильно. Также только в записи цифры 0 используется шесть чёрточек, значит, третья цифра – это 0, и в ней Таня сделала одну ошибку.

Последней цифрой в индексе может быть 2, 3 или 4, но в случае цифр 2 и 4 Таня сделала бы по три ошибки. Следовательно, последняя цифра – это 3, и в ней одна ошибка. Таким образом, в оставшихся трёх цифрах сделано по две ошибки. Теперь легко проверить, что первая и пятая цифры индекса равны 5, а четвёртая – 7.

3. Ответ: может. На рисунке показан пример обёртки, вырезанной из полоски шириной 2 клетки. Буквы показывают, какую грань покрывает клетка: Ф – фронтальную, З – заднюю, П – правую, Л – левую, В – верхнюю, Н – нижнюю.

З		З	В	В	Ф		Ф	Ф		Ф	В	В	З		З
Н	Л	Л			Л	Л	Н	Н	П	П			П	П	Н

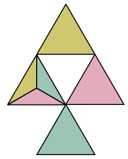
4. Раскрасим треугольники в шахматном порядке так, чтобы угловые были чёрными. Тогда чёрных треугольников 55, поэтому хотя бы четыре из них принадлежат одной полоске. В этой полоске не меньше семи треугольников.

5. Ответ: один треугольник.

Оценка. Выберем две самые короткие палочки разного цвета. Пусть это зелёная палочка a и жёлтая палочка b. Рассмотрим самую длинную красную палочку c. Так как из a, b, c можно составить треугольник, то a и b в сумме длиннее, чем c. Но каждая из двух оставшихся красных палочек не меньше, чем a и чем b, поэтому в сумме эти красные палочки тоже длиннее самой длинной красной палочки c. А это значит, что из красных палочек можно сложить треугольник.

Пример. Пусть есть три красные палочки длины 3, а жёлтые и зелёные палочки имеют длины 2, 2, 4. Тогда набор из трёх палочек разных цветов может иметь длины {2, 2, 3}, {2, 3, 4} или {3, 4, 4}. Из всех этих наборов складываются треугольники. При этом одноцветный треугольник можно сложить только из красных палочек.

6. См. рисунок.



7. Ответ: может. Когда судья выберет гирьки массами от 11 г до 19 г, эксперт выполнит следующие взвешивания (жирным шрифтом выделены гирьки, взятые судьёй): $10+\mathbf{11}=21$, $10+\mathbf{12}=22$, $10+\mathbf{13}=23$, ..., $10+\mathbf{19}=29$.

Заметим, что только гирька массой 10 г может в сумме с девятью разными гирьками давать массу какой-то ещё гирьки. Значит, результаты этих взвешиваний позволят судье узнать, какие гирьки весят 10 г и 20 г (первая была во всех взвешиваниях этой серии, а вторая не использовалась), а также разбить остальные гирьки на пары с разностью 10 г, причём в каждой паре известно, какая именно гирька легче.

При выборе судьёй гирек массами от 22 г до 29 г эксперт действует так: $10+11<\mathbf{22}$, $10+12<\mathbf{23}$, $10+13<\mathbf{24}$, ..., $10+18<\mathbf{29}$.

Эти взвешивания упорядочивают пары, полученные после первой серии, и по их результатам судья определит массы всех гирек в них. Когда судья выберет гирьки массами 10 г, 20 г и 21 г, эксперт может действовать как угодно.

8. Ответ: при 8 муравьях.

Оценка. Предположим, что муравьёв не меньше 9. Рассмотрим момент, когда один из них будет в вершине куба. Для каждой грани подсчитаем количество муравьёв, расположенных на ней, и найдём сумму этих шести чисел. Муравей в вершине попадёт в такую сумму трижды, а каждый из остальных – хотя бы дважды, поэтому сумма не меньше $3+2\cdot8=19$. Значит, на одной из граней будет находиться не менее четырёх муравьёв, а так как больше четырёх их быть не может, то их там будет ровно четыре. Они могут двигаться по грани только одновременно, оставаясь постоянно в вершинах квадрата, вписанного в эту грань. Тогда в какой-то момент они все окажутся в её вершинах. В этот момент все остальные муравьи могут быть только на противоположной грани, и их там не больше четырёх. Противоречие.

Пример. Пусть в вершинах нижней грани сидят 4 рыжих муравья, а в вершинах верхней – 4 чёрных. Сначала муравьи одного цвета могут посетить все вершины своей грани. Далее, ползая по передней и задней граням, они могут поменяться местами, после чего рыжие муравьи смогут побывать во всех вершинах верхней грани, а чёрные – во всех вершинах нижней.

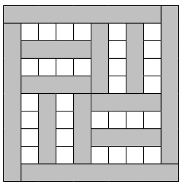
9. Обозначим синее число через x, красное – через y, а любимое число Пети – через n. Тогда условие НОД$(x, n)+y=$НОК$(y, n)+x$ равносильно тому, что НОД$(x, n)-x=$НОК$(y, n)-y$. В полученном равенстве левая часть не больше нуля, а правая – не меньше нуля. Поэтому они обе равны нулю, что возможно, только когда n делится на x, а y – на n. Значит, y делится на x.

10. Ответ: 99 мудрецов.

Оценка. Самый старший мудрец не может гарантированно назвать своё число.

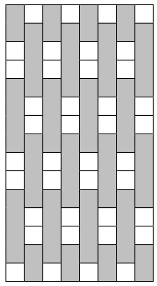
Алгоритм. Каждые два мудреца, сидящие напротив друг друга, не видят одну и ту же пару чисел. Будем называть *маленьким* того из них, у которого число меньше, а второго – *большим*. Самый старший мудрец может подсчитать, сколько маленьких людей среди 49 сидящих после него по часовой стрелке. Если это количество окажется нечётным, он назовёт меньшее из двух чисел, которые не видит, а если чётным – большее. Так как каждый из этих 49 мудрецов тоже знает, сколько маленьких среди остальных 48, он поймёт, какое число на его колпаке, и назовёт его. Мудрецы, сидящие напротив них, также назовут свои числа. А мудрец, противоположный самому старшему, может назвать то же число, которое назовёт тот, тогда ровно один из них назовёт число на своём колпаке.

11. а) Ответ: могут. Пример показан на рисунке. Влиятельные страны закрашены, их 12, а всего на континенте 44 страны.



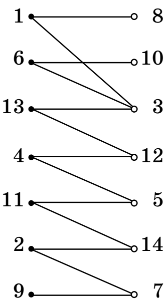
б) Ответ: не могут. Пусть всего есть n стран, из них k влиятельных. Выберем любую влиятельную страну и обойдём по кругу её контур. На нём есть не менее 10 отрезков, каждый из которых – граница с другой страной. У этих отрезков не менее 10 концов, хотя бы 6 из них не совпадают с вершинами страны, а лежат на её сторонах. К таким точкам примыкают два угла других стран, отметим их. Всего мы отметим не менее $12k$ углов, причём каждый из $4n$ углов может быть отмечен не более одного раза, а углы континента отмечены не будут. Значит, $12k<4n$, откуда $\frac{k}{n}<\frac{1}{3}$, то есть влиятельных стран меньше трети.

Замечание. На рисунке показано, как можно разбить плоскость на страны, среди которых ровно треть влиятельных. Вырезав достаточно большой квадрат, можно получить континент, на котором доля влиятельных стран будет сколь угодно близка к $\frac{1}{3}$.



12. Ответ: при $N=15$.

Оценка. При $N\leqslant 14$ построим граф, в котором вершины соответствуют беглецам, а рёбра соединяют двух беглецов, если они могут плыть вместе. Полученный граф будет двудольным. Действительно, на рисунке показан граф для $N=14$, а при меньших N получится его подграф.



Кроме того, все беглецы, чей номер – точный квадрат, попали в одну долю. Значит, в каждом рейсе должен участвовать беглец из этой доли, поэтому на правом берегу ни в какой момент не может оказаться более одного из них. Но при $N>1$ в этой доле больше одного человека, поэтому все переправиться на правый берег не смогут.

Алгоритм. При $N=15$ покажем, как переправить на правый берег двух беглецов с номерами x и y, сумма которых – точный квадрат. Вот схема переправ, где стрелки показывают направление движения: $(1, 15)\rightarrow$, $1\leftarrow$, $(6, 10)\rightarrow$, $(10, 15)\leftarrow$, $(1, 3)\rightarrow$, $(3, 6)\leftarrow$, $(x, y)\rightarrow$, $1\leftarrow$

Так можно последовательно переправить на правый берег пары (2, 14), (4, 12), (5, 11), (7, 9), (3, 13). После этого на левом берегу останутся беглецы с номерами 1, 6, 8, 10, 15, которые могут переправиться на правый берег так:
$(1, 8)\rightarrow$, $1\leftarrow$, $(6, 10)\rightarrow$, $(3, 6)\leftarrow$, $(1, 15)\rightarrow$, $(10, 15)\leftarrow$, $(6, 10)\rightarrow$, $1\leftarrow$, $(1, 3)\rightarrow$, $1\leftarrow$, $(1, 15)\rightarrow$

13. Так как сумма площадей всех кусков бумаги больше, чем площадь стола, умноженная на 3, то какая-то область покрыта хотя бы в 4 слоя. Воткнём первую кнопку в эту область. Если останется меньше двух кусков, не прикреплённых кнопкой, утверждение очевидно. А если таких кусков два, их суммарная площадь больше площади стола, поэтому они пересекаются и их можно прикрепить второй кнопкой.

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем
заочном математическом конкурсе.

Первый этап состоит из четырёх туров (с I по IV) и идёт с сентября по декабрь.

Высылайте решения задач II тура, с которыми справитесь, не позднее 5 ноября в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция находится по адресу kvantik.com/short/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, г. Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

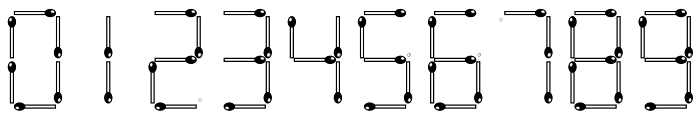
В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте www.kvantik.com. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

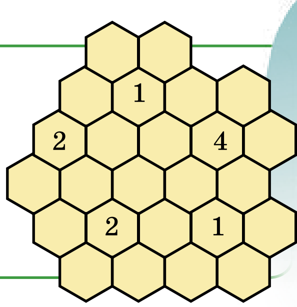
II ТУР

6. Квантик умеет выкладывать из спичек цифры по такому образцу:



Он выложил на столе перед собой некоторое число, не начинающееся и не заканчивающееся на 0. Ноутик посмотрел на это число с другой стороны стола. Могло ли оказаться, что число, которое видит Квантик, ровно в 8,5 раз больше числа, которое видит Ноутик?

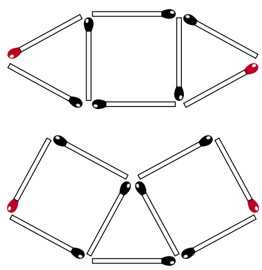
7. В некоторых пустых сотах указано, сколько соседних по стороне сот заполнено мёдом. Сколько всего сот заполнено мёдом?



Авторы задач: Михаил Евдокимов (6, 7, 10), Борис Френкин (8), Geometry Snacks (9)

8. На острове 30 жителей, каждый либо правдолюб (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжёт). Каждый знает про всех, кто есть кто. Островитяне встали в круг, и каждый сказал про соседа справа, правдолюб он или лжец, а потом сказал это про соседа слева. Может ли быть, что никто не сказал дважды одно и то же?

9. У какой из спичечных фигур расстояние между красными точками больше – у верхней или у нижней? Спички считайте одинаковыми и очень тонкими.



10. Есть шахматная доска 8×8. За один ход можно выбрать любой клетчатый квадрат 2×2, 3×3 или 4×4 и изменить цвет четырёх его угловых клеток на противоположный. Можно ли

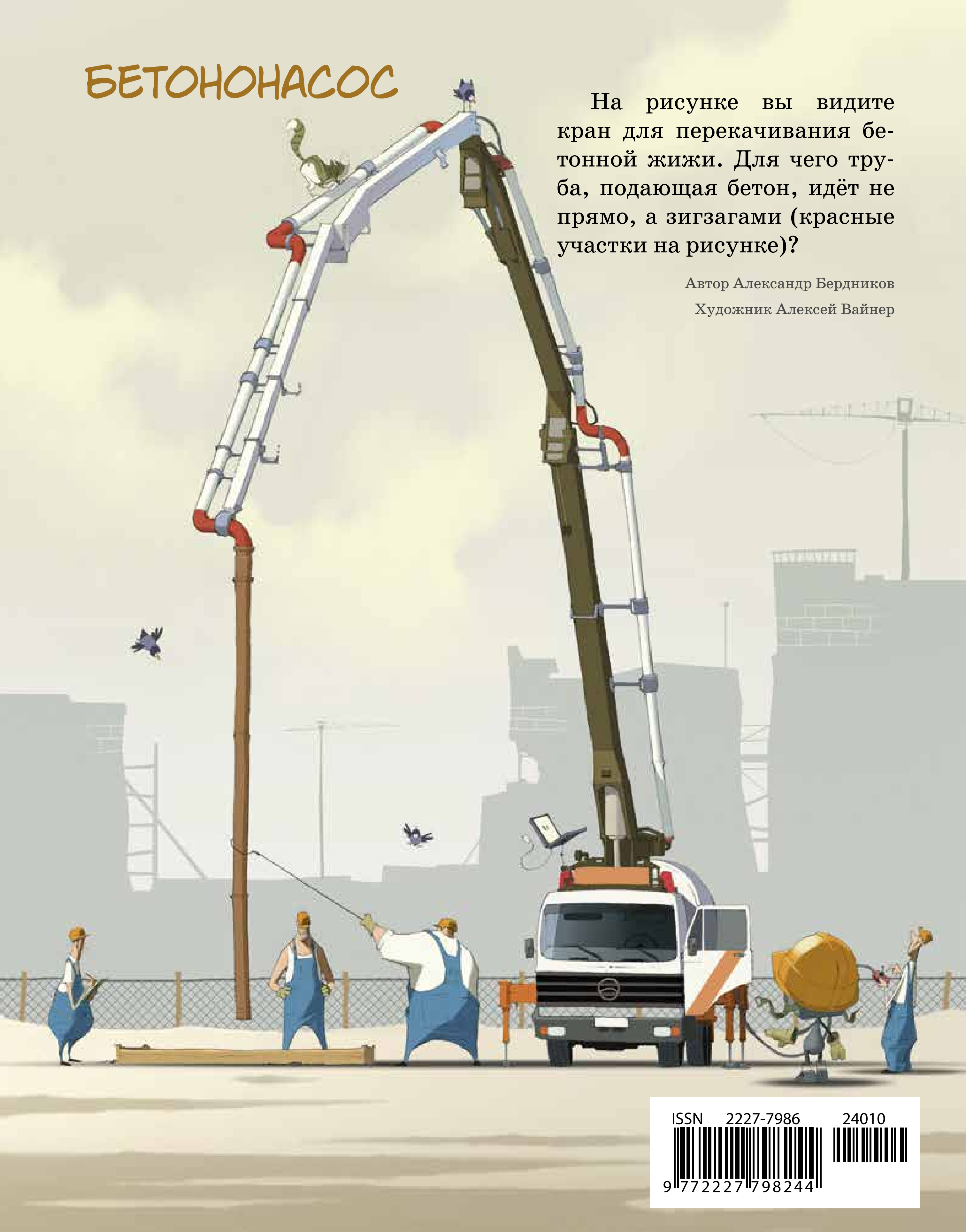
а) Сделать доску полностью белой?

б) Сделать какие-то две соседние по стороне клетки чёрными, а остальные клетки – белыми?

Приведите алгоритм действий или докажите, что такое невозможно.

Художник Николай Крутиков

БЕТОНОНАСОС



На рисунке вы видите кран для перекачивания бетонной жижи. Для чего труба, подающая бетон, идёт не прямо, а зигзагами (красные участки на рисунке)?

Автор Александр Бердников

Художник Алексей Вайнер

ISSN 2227-7986 24010

9 772227 798244