№ 6 | июнь 2024

ЖУРНАЛ КВАНТИК
ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

№6
ИЮНЬ 2024

ЭКСПЕРИМЕНТАТОР ЭДМ МАРИОТТ

ЗИМОРОДОК: ИЗУМРУДНЫЙ РЫБАК

ТРЕУГОЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ПАРЫ ПРЕДМЕТОВ

Enter

e-mail: kvantik@mccme.ru

НАГРАДЫ ЖУРНАЛА

2017 — Минобрнауки России
ПРЕМИЯ «ЗА ВЕРНОСТЬ НАУКЕ»
за лучший детский проект о науке

2021 — **БЕЛЯЕВСКАЯ ПРЕМИЯ**
за плодотворную работу
и просветительскую деятельность

2022 — Российская академия наук
ПРЕМИЯ ХУДОЖНИКАМ ЖУРНАЛА
за лучшие работы в области
популяризации науки

Журнал «Квантик» № 6, июнь 2024 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С.А. Дориченко
Редакция: В.Г. Асташкина, Т.А. Корчемкина, Е.А. Котко, Г.А. Мерзон, М.В. Прасолов, Н.А. Солодовников
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р.К. Шагеева, И.Х. Гумерова
Обложка: художник Алексей Вайнер

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя:
119002, г. Москва,
Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**

Подписка на журнал
в отделениях почтовой связи Почты России:
Каталог Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)
Онлайн-подписка на сайте Почты России:
podpiska.pochta.ru/press/ПМ068

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84x108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 06.05.2024
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831) 218-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

СОДЕРЖАНИЕ

ЗИМОРОДОК: ИЗУМРУДНЫЙ РЫБАК

Если затаиться возле быстрой неглубокой речки с обрывистыми берегами и запастись терпением, то (если повезёт!) можно увидеть, как пронесётся, словно пуля, мелкая отливающая голубым птичка, коснётся воды – и взлетит обратно на ветку-присаду с рыбкой в клюве. Это – обыкновенный зимородок, одна из самых ярких птиц умеренной зоны Евразии.

Выглядит эта крошечная (чуть больше воробья!) птичка как будто непропорционально: большая голова и длинный клюв – а четырёхпалые ноги и хвост маленькие. Окрашена она необычно ярко для наших краёв: на спине перья сине-голубые с примесью зелёного, на нижней части тела – рыжие. Эта сине-голубая окраска не пигментная (дело не в красящих веществах в пере – эти красители у зимородка рыжие), а структурная, вызванная оптическими эффектами в микроструктуре пера. Причём точный механизм был изучен нидерландскими материаловедами только в 2011 году! Оказалось, что дело в губчатой структуре, которая рассеивает свет одних цветов (то есть длин волн) больше, чем других.

Почему зимородок так называется? Казалось бы, название говорит само за себя – наверное, его птенцы вылупляются зимой? Причём такое или похожее название есть и во многих других славянских языках. Но зимородки прилетают к нам не раньше апреля, когда уже сошёл лёд с рек. А птенцы вылупляются в конце весны и иногда ещё во второй половине лета. Почему же тогда «зимородок»? Есть версия, что это искажённое «землеродок» – «рождённый в земле», потому как эта птица откладывает яйца в горизонтально расположенных норах в отвесных берегах рек. Эта этимология хорошо прослеживается в болгарском названии птицы: *земеродно рибарче* дословно означает «землеродный рыбачок».

Итак, зимородок-«землеродок» – птица норная! Взрослые птицы сами выкапывают себе «гнёзда» глубиной (или, скорее, длиной) до полутора метров. В эти норы взрослые птицы приносят добычу для птенцов – в итоге к концу сезона размножения в этой норе скапливается много рыбных остатков, издающих соответствующий «аромат», из-за чего зимородкам приходится часто мыться, благо образ жизни позволяет. Но эти рыбные остатки – не просто мусор, они служат выстилкой гнезда!

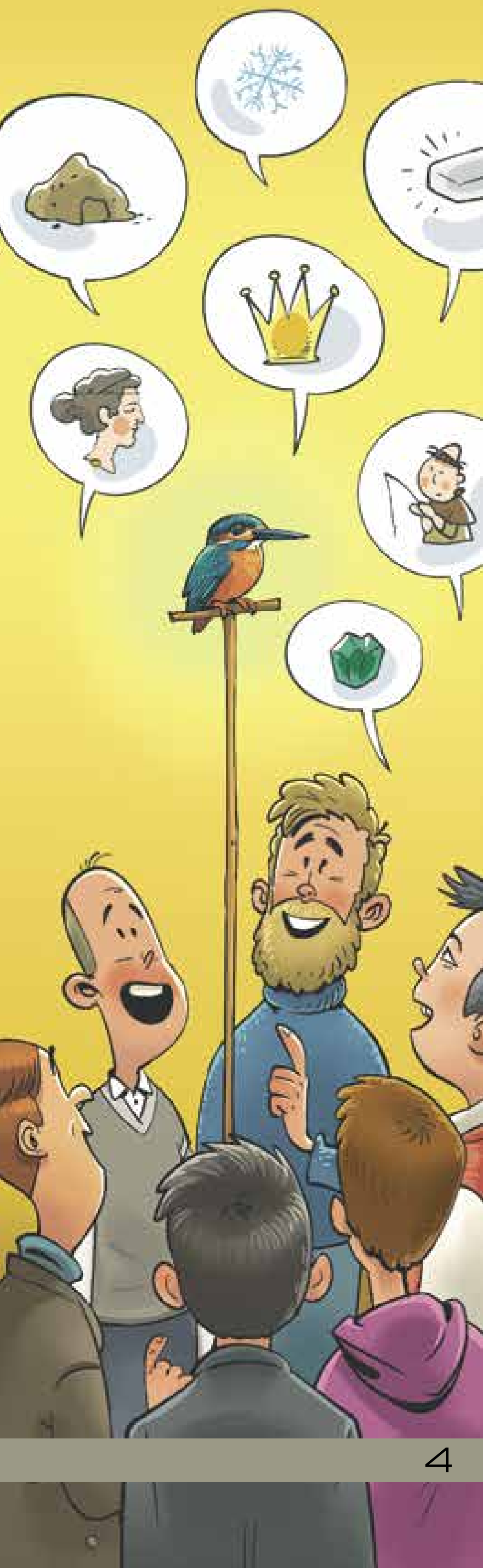
Питается зимородок рыбой, что тоже отметили многие языки – помимо уже упомянутого болгарского, это английский и некоторые скандинавские языки, называющие его «королевским рыбаком»: английское kingfisher, шведское kungsfiskare – и даже географически близкий, но неродственный этим языкам финский с его kuningaskalastaja. Романские языки называют эту птицу «рыбаком святого Мартина» (французское martin pêcheur, португальское martim-pescador и т.д.). Некоторые славянские языки тоже подчёркивают эти особенности питания зимородка: украинское *рибалочка* или словакское rybárik. И даже далёкие от них тюркские языки: например, башкирское *балыксы турғай*, якутское *балыксыт чыычаах* означают дословно «птичка-рыбак».

Но только ли рыбой питается этот рыбак? Нет, его добычей могут становиться и головастики, и водные насекомые, и раки. Впрочем, как установили чешские орнитологи, 14 лет изучавшие погадки (отрыгнутые остатки пищи) этих птиц, рыбы составляют около 99% его рациона, так что название «рыбак» вполне подходит зимородку. Находили в погадках и остатки сухопутных насекомых – бабочек и кузнечиков. Неужели он охотится и на суше? Наверное, всё же нет – скорее по ошибке подбирает упавших в воду насекомых (случаются у него броски даже на плывущие по речке листья!). В день одному взрослому зимородку для собственного прокорма нужно около дюжины рыбок – при выкармливании птенцов, естественно, больше.

С описания охоты мы и начали наш рассказ. Зимородок сидит на ветке-присаде и зорко высматривает плывущую в воде рыбу. Завидев добычу, он срывается с места – со скоростью до 8 м/с – и возвращается с жертвой на присаду, где и проглатывает её – или же относит в нору-гнездо своим птенцам. Так как добычу этот хищник выслеживает глазами, он селится только на реках с чистой прозрачной водой. Птицы эти тер-

риториальные. Пара зимородков прогоняет возможных конкурентов со своего большого участка: расстояние между соседними гнёздами этих маленьких птичек может быть до километра!

Но вернёмся к названиям зимородка. Итак, какие-то языки называют зимородка в честь особенностей его гнездования, другие – в честь его пищевых предпочтений. А как насчет его яркого оперения? И такие тоже найдутся! Так, в китайском зимородка называют *цуйняо* – «изумрудная птица», а в хакасском *кöк обаа* – «зелёный/синий истукан». Последнее название, видимо, произошло из-за неподвижной позы, которую принимает зимородок, поджидающий добычу. Немецкое название зимородка – Eisvogel – дословно вроде бы значит «ледяная птица», что снова наводит на зимние мысли, однако этимологи (лингвисты, изучающие происхождение слов) выводят это название из старонемецкого глагола eisan со значением «сиять/блестеть» (вспомним его яркое оперение!) или же от существительного Eisen «железо» (голубой сверху, как блестящая сталь, и рыжий, словно ржавый, внизу). Возможно, что и распространённое в романских языках название «рыбак святого Мартина» происходит от окраски зимородка: давший ему имя святой часто изображается в синем плаще. Существует также гипотеза, что и название «зимородок» на самом деле связано не с зимой и не с землёй, а с изумрудом – то есть тоже происходит от окраски птицы!



Ну а что же с научным названием зимородка? Происходит оно от героини греческих мифов Алкиóны (Альционы, или Гальционы) – дочери бога ветра Эóла и жены царя Кеика. После гибели супруга в кораблекрушении безутешная вдова бросилась в море – но боги превратили их в зимородков. Как и многие мифы, этот существует в нескольких версиях: по одной из них, Алкиона и Кéик были превращены в птиц в наказание за гордыню, так как называли себя в честь божественной четы Зевсом и Герой; по другой – в зимородка была превращена только Алкиона, а Кеик – в чайку. Так или иначе, именно от этих мифологических персонажей произошли научные латинские названия нескольких родов семейства зимородковые:

собственно Зимородки *Alcedo* (к нему относится и единственный европейский вид *Alcedo atthis*), Зимородки-альционы *Halcyon* (живут в тропической Африке и в Азии) и Трёхпалые зимородки, также известные как Лесные зимородки *Ceyx* (названы в честь Кеика, живут в Юго-Восточной Азии и Океании). Кстати, именно от греческого названия зимородка «алкион» происходит имя мифической птицы Алконо́ст из русских легенд: оно появилось в начале второго тысячелетия нашей эры при неверном переписывании фразы «алкуонъ есть морская птица» как «алкуонесть морская птица». Интересно, что древние греки считали, что зимородки живут у моря и высиживают яйца в районе зимнего солнцестояния – и на это время (известное как «алкионовы дни») бог Эол велит ветрам утихнуть, чтобы его дочь могла высидеть яйца. Получается, что у древних греков зимородки тоже были «рождающимися зимой»! Может быть, оттуда и славяне заимствовали название этой малозаметной птицы, потом уже переосмыслив её в «землеродящуюся»? Точного ответа этимологи пока не нашли...

Иллюстрирующая эту статью фотография сделана на притоке Оки Мы́шеге в Алексинском районе Тульской области. Эта речка отвечает всем приметам местообитания зимородка: неглубокая, прозрачная, с отвесным левым берегом. Конечно, не каждое из подобных мест заселено зимородками – вспомним и обширность занимаемых ими участков! Всё это делает саму птицу редкой, из-за чего она внесена в Красные книги многих регионов.

Фото: Наталья Рятова

Художник Мария Усеинова

Леонид Свистов

ЭКСПЕРИМЕНТАТОР ЭДМ МАРИОТТ

Научные интересы настоятеля бургундского монастыря Св. Мартина Эдма Мариотта (1620–1684) были разнообразными. Его волновала природа упругости воздуха, причина ветров, тайны человеческого зрения. При проектировании фонтанов в парке Версаля он интересовался проблемами течения воды по прямым и изогнутым трубам. Чем определяется прочность труб с водой и без неё? Чем определяется высота подъёма воды в фонтане? Какой «насос» поднимает в деревьях воду к верхним ветвям? Можно ли путешественнику определять высоту подъёма на гору, измеряя давление воздуха? Все вопросы должны решаться с помощью экспериментов, считал Эдм Мариотт.

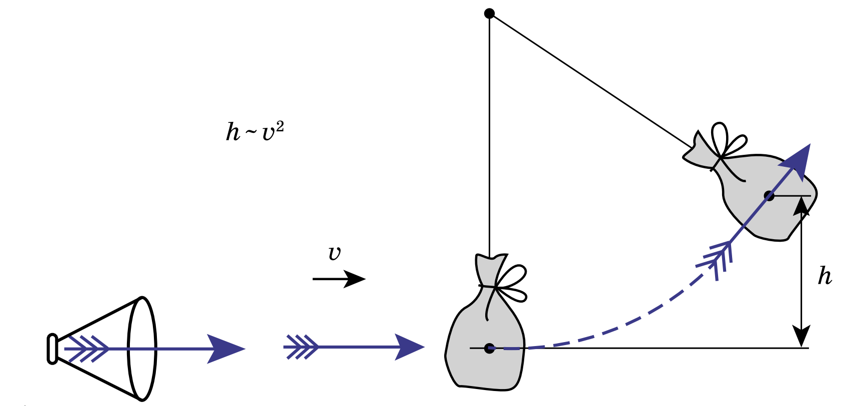


Рис. 1

Мариотт решил задачу определения больших скоростей летящих предметов. Для своих экспериментов он использовал метательную установку (баллисту) и маятник, названный баллистическим (рис.1). Скорость снаряда баллисты определялась по высоте подъёма маятника. Высота подъёма оказалась пропорциональной квадрату скорости снаряда. Наука о движении снарядов с 1644 года называется баллистикой.

На результаты экспериментов Мариотта по соударению шаров ссылался сэр Исаак Ньютон (1642–1727),

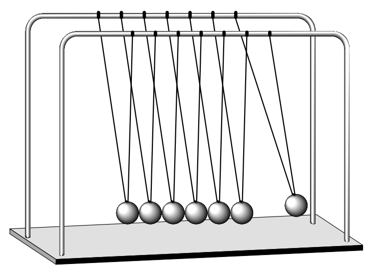


Рис. 2

основатель современной механики. Недаром самый популярный эксперимент Мариотта ныне называется «колыбель Ньютона» (рис. 2).

Эдм Мариотт не считал научную работу забавой и поэтому результаты своих работ он обсуждал в обширной переписке с коллегами из разных стран. Чтобы научное общение было проще и работы учёных не забывались, во Франции в 1666 году с участием Э. Мариотта была организована французская академия наук, благодаря которой сохранились учёные записки многих великих исследователей за последние 350 лет.

ПРИБОР, НАЗВАННЫЙ В ЧЕСТЬ МАРИОТТА

На рисунке 3 изображена схема *сосуда Мариотта*, описанного в книжке Я. И. Перельмана «Занимательная физика». Скорость вытекающей из такого сосуда жидкости определяется высотой водяного столба от нижнего конца трубочки, находящегося в воде, до отверстия, и поэтому не меняется по мере вытекания воды. Когда я прочитал про этот прибор, я тут же представил монахов с кружками в руках перед бочкой с квасом, настроение которых ухудшается по мере понижения уровня в бочке.

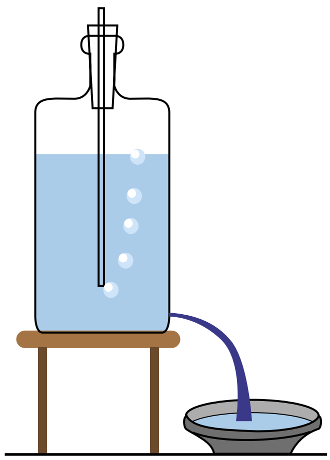


Рис. 3

Задача, которую решал прибор Мариотта, показалась мне смешной и надуманной. Но, конечно, это не так! Равномерная подача жидкости или газа требуется в самых разных областях нашей современной жизни: например, при устройстве водопровода в домах и полях, при дозировке жидкости на автоматических линиях, при подаче лекарств с помощью капельницы из бутылки к больному или подаче чернил от баллончика с чернилами перьевой ручки к бумаге. В каждом случае эта задача решается по-своему, но если присмотреться более внимательно, все эти приборы обеспечивают постоянство перепада давления

жидкости внутри и снаружи отверстия, из которого вытекает жидкость.

Чтобы ощутить красоту прибора Мариотта, давайте сделаем его сами. Для этого потребуется пустая стеклянная бутылка, пробка, стеклянная трубочка или соломинка для коктейля и шуруповёрт со свёрлами. Чтобы просверлить бутылку, воспользуемся сверлом для керамической плитки – попросите взрослых вам помочь! Будьте аккуратны: сверло может соскальзывать с бутылки. Чтобы сделать первую ямку, удобно воспользоваться скотчем, который можно отклеить, когда небольшая лунка в стекле будет просверлена. Обычное сверло по металлу или дереву нам потребуется, чтобы просверлить пробку. Диаметр сверла должен быть такой же, как и у трубки.

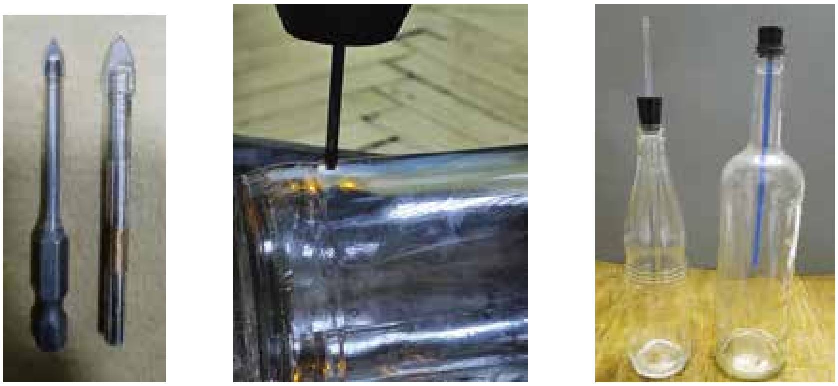


Рис. 4. На фото: свёрла для стекла и керамики; процесс сверления; два готовых сосуда Мариотта. Диаметры отверстий в боковых стенках бутылок были 5 мм и 3 мм. Внутренние диаметры трубок были примерно 5 мм.

Предлагаем читателю изучить работоспособность сделанного прибора. Вероятно, для этого вам потребуется мерный стаканчик и секундомер. Если оказалось, что расход воды зависит от её уровня, попробуйте заткнуть трубочку пальцем. Если прибор исправный, вода должна перестать вытекать из бутылки. Если вода всё же вытекает, то, по всей видимости, детали прибора (бутылка-пробка-трубочка) собраны негерметично. Если собрать прибор герметично не удаётся, можно уплотнить соединения с помощью термоклеевого пистолета или хорошо размятого пластилина. Удачи!

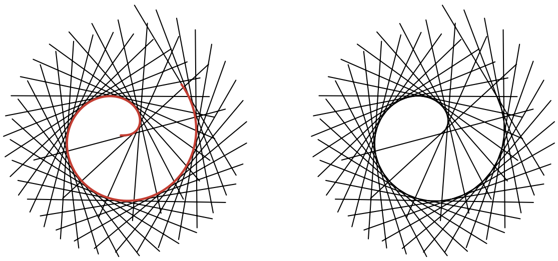
Окончание в следующем номере

Фото автора
Художник Алексей Вайнер

ИЗОБРАЗИТЕЛЬНАЯ НИТЬ: ФИЗИКА

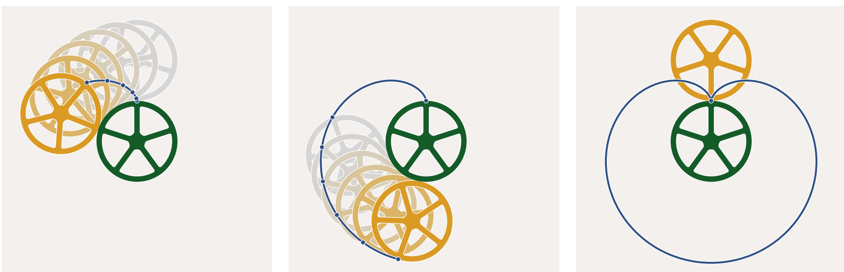
От проекта «Математические этюды»

В статье «Изобразительная нить: математика» («Квантик» №5 за 2024 год) рассказывалось, как с помощью техники нитяной графики можно изобразить гладкую кривую, не рисуя самой кривой, а рисуя только прямые линии – касательные к кривой.

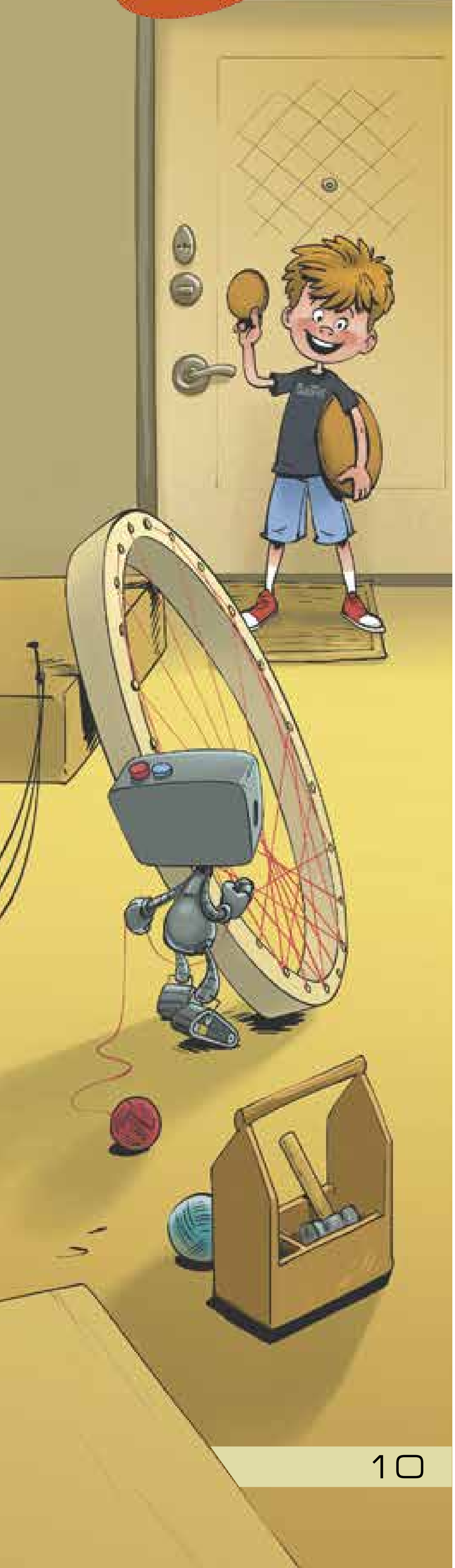


Перегибая листочек бумаги, мы научились изображать конические сечения – эллипс, гиперболу и параболу.

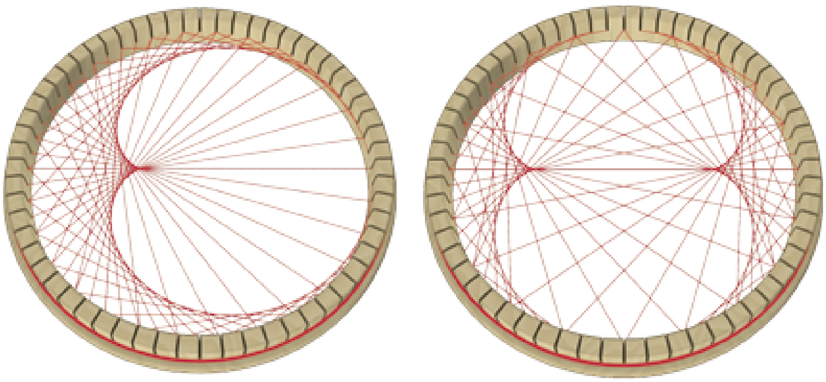
Рассмотрим ещё две кривые, теперь уже относящиеся к семейству циклоид, а точнее, эпициклоид. *Кардиóида* (др.-греч. καρδία – сердце, εἶδος – вид) – кривая, которая описывается фиксированной точкой окружности, катящейся без проскальзывания по внешней стороне неподвижной окружности такого же радиуса. Так как длины окружностей совпадают, то у кардиоиды одна негладкая, «острая» точка.



Если катящаяся окружность будет иметь радиус в два раза меньше радиуса неподвижной, то получится *нефрóида* (др.-греч. νεφρός – почка, εἶδος – вид). Так как длина маленькой окружности в два раза меньше длины неподвижной окружности, то и негладких точек теперь две.

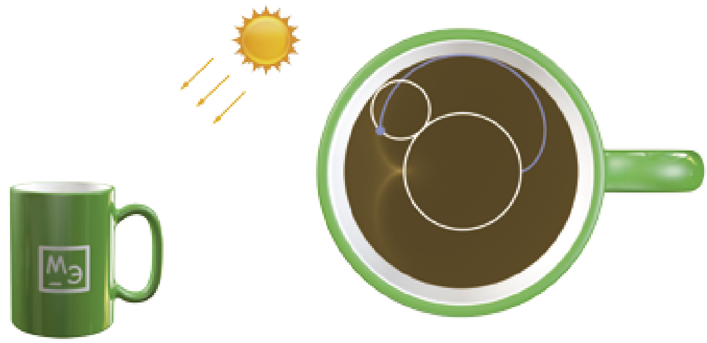


Эти кривые, за исключением нескольких точек, – гладкие, и их тоже можно увидеть как огибающие семейства касательных. Для этого расставим равномерно на окружности N точек. Чтобы «сплести» кардиоиду, для каждого k натянем ниточку от точки с номером k до точки с номером $2k$. (Так как мы «живём» на окружности, то эту операцию надо делать «по модулю N»: если число $2k$ оказалось больше N, то делим его на N с остатком и рассматриваем этот остаток.) Для получения нефроиды закон соединения следует поменять на $k \to 3k$. В интернете по ссылке etudes.ru/models/cardioid-nephroid/ можно интерактивно менять количество линий.

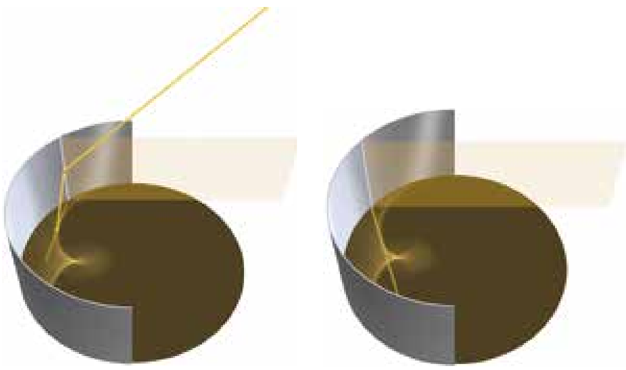


Доказательство того, что при таком натягивании ниточек получаются именно указанные кривые, опирается на теорему о двух кругах (её можно найти, например, в книге: *Васильев Н. Б.*, *Гутенмахер В. Л.* «Прямые и кривые», § 7 «Вращения и траектории», см. также etudes.ru/etudes/two-circles-theorem/). А сейчас визуализация огибающей с помощью касательных позволит нам понять интересное физическое явление.

После отражения света от какого-то предмета или когда свет преломляется в прозрачной посуде, иногда можно наблюдать ярко освещённые кривые или области, называемые *ка́устиками* (др.-греч. καυστικός – жгучий). Рассмотрим случай отражения. Если параллельные лучи Солнца попадают на внутреннюю поверхность цилиндрической чашки с кофе, эмалированной цилиндрической кастрюли или освещают металлическое цилиндрическое кольцо, то можно наблюдать каустику в виде нефроиды.

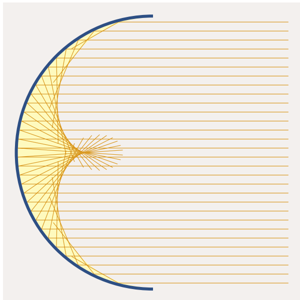


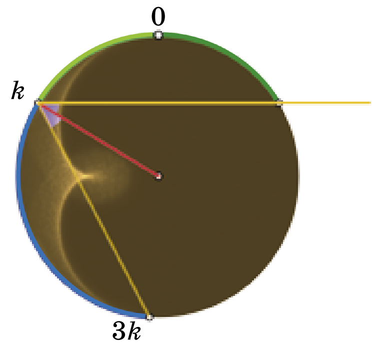
Луч, приходящий сверху от Солнца, отражается от внутренней поверхности цилиндра, идёт вниз и, «ударяясь» о кофе, освещает на его поверхности точку. Лучи, отражающиеся от одной образующей цилиндра, то есть лежащие в вертикальной плоскости, проходящей через образующую и луч, подсвечивают на кофе отрезок прямой. Все такие плоскости параллельны и пересекают поверхность кофе по параллельным хордам.



Если посмотреть сверху, мы увидим картинку, появившуюся ещё в конце XVII века в труде Христиана Гюйгенса «Трактат о свете» (рисунок вверху с. 12). Разберём подробнее отражение лучей из одной плоскости. Зелёная и салатовая дуги в сумме равны синей, а значит, синяя дуга в два раза больше салато-

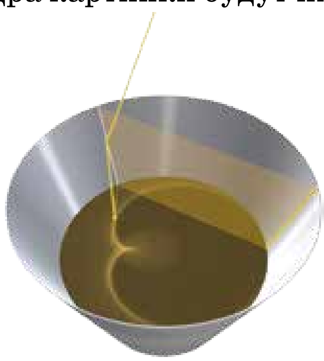
вой. Считая от неподвижного конца салатовой дуги (точка 0), получаем закон, описанный выше для касательных к нефроиде, – из точки с номером k (точка отражения) на кофе выходит подсвеченный отрезок, направленный в точку с номером $3k$.

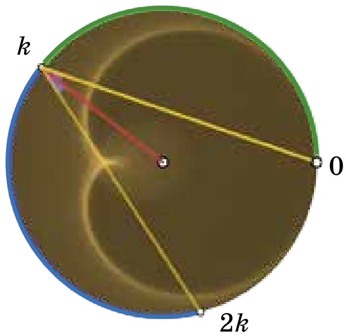




Семейство подсвеченных на поверхности кофе отрезков вырисовывает яркую линию. В математических терминах, как мы уже знаем, – огибающую, а в физических терминах – *каустику*.

Увидеть каустику в виде кардиоиды позволит коническая чашка. Надо только поймать момент, когда лучи Солнца параллельны её стенке (одной из образующих конуса). В этом случае разобранные для цилиндра картинки будут иметь следующий вид.

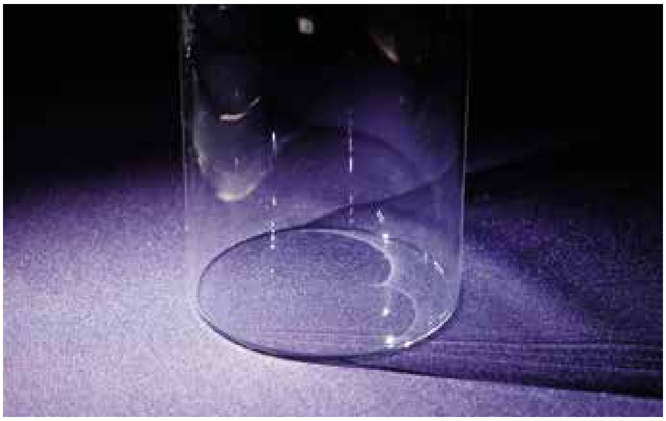




Плоскость лучей, дающих на поверхности кофе касательную к каустике, проходит через образующую, параллельную солнечным лучам, и образующую, от которой лучи отражаются. Если считать от образующей, направленной на Солнце, то на виде сверху все лучи из этой плоскости после отражения от конуса подсвечивают точки на хорде, направленной от точки k к точке $2k$.

На сайте «Математические этюды» по ссылке etudes.ru/etudes/caustic-nephroid-cardioid/ можно найти больше подробностей о каустиках и о том, как они образуются. А заинтересовавшийся читатель может провести подобные эксперименты и сам. На природе лучше – и для здоровья полезнее, и можно считать, что лучи от Солнца параллельны друг другу. Но хорошее приближение к описанным каустикам можно увидеть и в домашних условиях, используя, например, фонарик телефона. Проверить, что касательные к каустикам отвечают указанным законам, можно, распечатав хорды $k \to 2k$ или $k \to 3k$ на бумаге и положив вырезанный круг внутрь конуса или цилиндра.

Изобразительную нить использует сама Природа. Попробуйте и вы нарисовать свою картину!



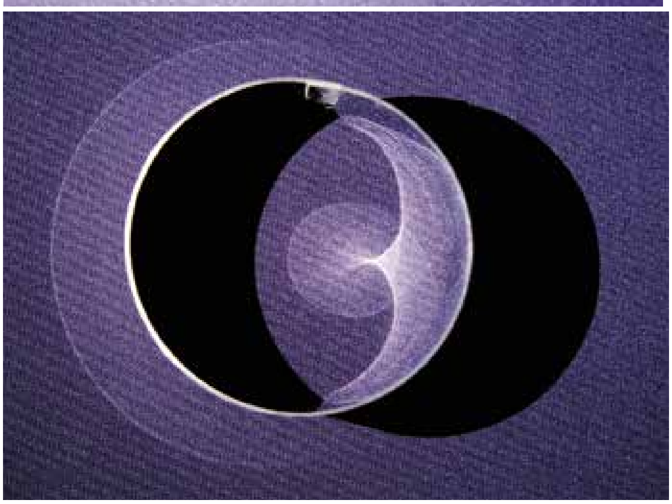


Фото: Антон Фонарёв

Художник Мария Усеинова

Ольга Кузнецова

ПАРОСЛОВ с ВАГОНЧИКАМИ

Из пункта А в пункт Б отправились колоброд с бутербродом, волопас с ватерпасом и водохлёб с хлеборобом. Кто из них мог двигаться самостоятельно?

Увы, у этой задачи нет логического решения. Чтобы ответить, нужно знать значения и историю слов. *Колоброд* действительно *бродит*, но *бутербродный* хлеб (нем. *Butterbrot* «хлеб с маслом») в обычной ситуации сам по себе никуда не отправится. *Волопас* дословно *пасёт волов* (есть ещё такое созвездие), а *ватерпас* – это прибор, который показывает угол наклона поверхности, измеряя его при помощи жидкости (голл. *water* «вода» и *pas* «измерить»). *Водохлёб* с *хлеборобом* оба одушевлённые, хотя один пьёт много *воды*, а другой *работает*, чтобы вырастить хлеб. В сумме 4 человека.

Догадаться о смысле составного слова по его корням иногда можно. Но не всегда получается предсказать, как складываются значения его корней. Почему *ледоруб* – инструмент, а *лесоруб* – человек? Почему кошку не называют *мышеловкой*, а кот *мышеловом* вполне может быть? *Крановоз*, очевидно, возит *краны*. А кто едет на *троллейвозе*? Как правило, это не тролли. Сейчас он почти не используется, но в прошлом веке перевозил грузы. Облик этого слова говорит нам не о пассажирах, а о способе движения: перемещение вдоль троллея, по которому идёт ток.

Как вы думаете, чем управлялся *пароконный* механизм (например, плуг)? Не *паром* и конями, а всего лишь *парой* лошадей. Зато старинную паровую карусель на круглой платформе, да и многие другие безлошадные механизмы, называли *самокатом*.

В русском языке довольно много слов с несколькими корнями, так что можно «цеплять» их друг за друга, как вагоны: *Черномор – мореход – ходомер*. *Лежебока – бокоплав – плавсостав*. Попробуйте сами! Подобный «паровоз» с двумя вагончиками собрать довольно легко.

Громоотвод – водолей – лейкопластырь... что здесь не так? В первой

паре корни совпадают, хотя и не являются родственными. Питьевая *водá* и *вóда* в какой-нибудь игре – омонимы, точнее даже омографы. Но такой вариант ещё можно принять, раз корни выглядят одинаково. А вот первая часть слова *лейкопластырь* – не *лей*, а λευκός (др.-греч.). Корень означает «светлый, белый» и не имеет ничего общего с лейками и поливом, да и такой пластырь обычно не пропитан лекарством, а только закрывает ранку.

Снегокат – катафот – фотоблог: сможете самостоятельно найти вагончики с несовпадающими корнями?

Корни, особенно в иностранных словах, бывают очень коварны. Кого лучше сцепить с *бойкотом* – *ковбоя* или *маслобоя*? Никого, потому что *бойкот* происходит от фамилии *Бойкотт*, а значит, не делится и не связан ни с котами, ни со словом *бой* (или англ. *boy* «мальчик»). Нелегко бывает разобраться с *носами*, которых немало в русском языке. Кто из них что-то несёт: *веслонос*, *медонос* или *альбинос*?

Медоносами называют растения. Сами они, правда, никуда не ходят, но являются хранителями, «носителями» нектара, который собирают пчёлы. *Веслоносы* – это рыбы с необычной формой носа. *Альбинос* же связан с белым цветом и не имеет второго корня (от лат. *albus* «белый» через франц. *albinos*). Получается, что *веслонос* основательно держится за *носоглотку*, *медонос* условно сцепляется с ней (раз уж корни омонимичны), а вот *альбиноса* никак не прикрепить. Зато замечательные слова *лизоблюд* и *зубоскал* могут сцепляться почти что сами с собой!

Прежде чем на всех парах сцеплять вагончики, ответьте на вопросы.

Горлодёр, *губошлёп*, *зубоскал*, *небозём*, *ротозей*: как вы думаете, какое из слов не относится к частям тела?

Домкрат, *мажордом*, *царедворец*: выберите слово, действительно связанное со зданием.

Чернозём – землероб – робокар – каротин: какой вагончик держится хуже всех?

Художник Алексей Вайнер

ПО РЕКЕ НА БАЙДАРКЕ

Авторы: Александр Бердников (3, 4),
Сергей Дориченко и Сергей Шашков (1, 2)

1. Плывя на байдарке, иногда надо повернуть или обойти препятствие. Для этого можно по-разному грести веслом с одной стороны от байдарки (скажем, слева): обычным образом, двигая весло назад, или «табанить» – опуская весло в воду, двигать его вперёд. Куда повернёт лодка в каждом из случаев?

2. Иногда плывущая вперёд байдарка не успевает разминуться с торчащим из воды встречным камнем и, развёрнутая боком, наезжает на него. В какую сторону надо наклониться гребцам, чтобы не перевернуться, – на камень или от камня?

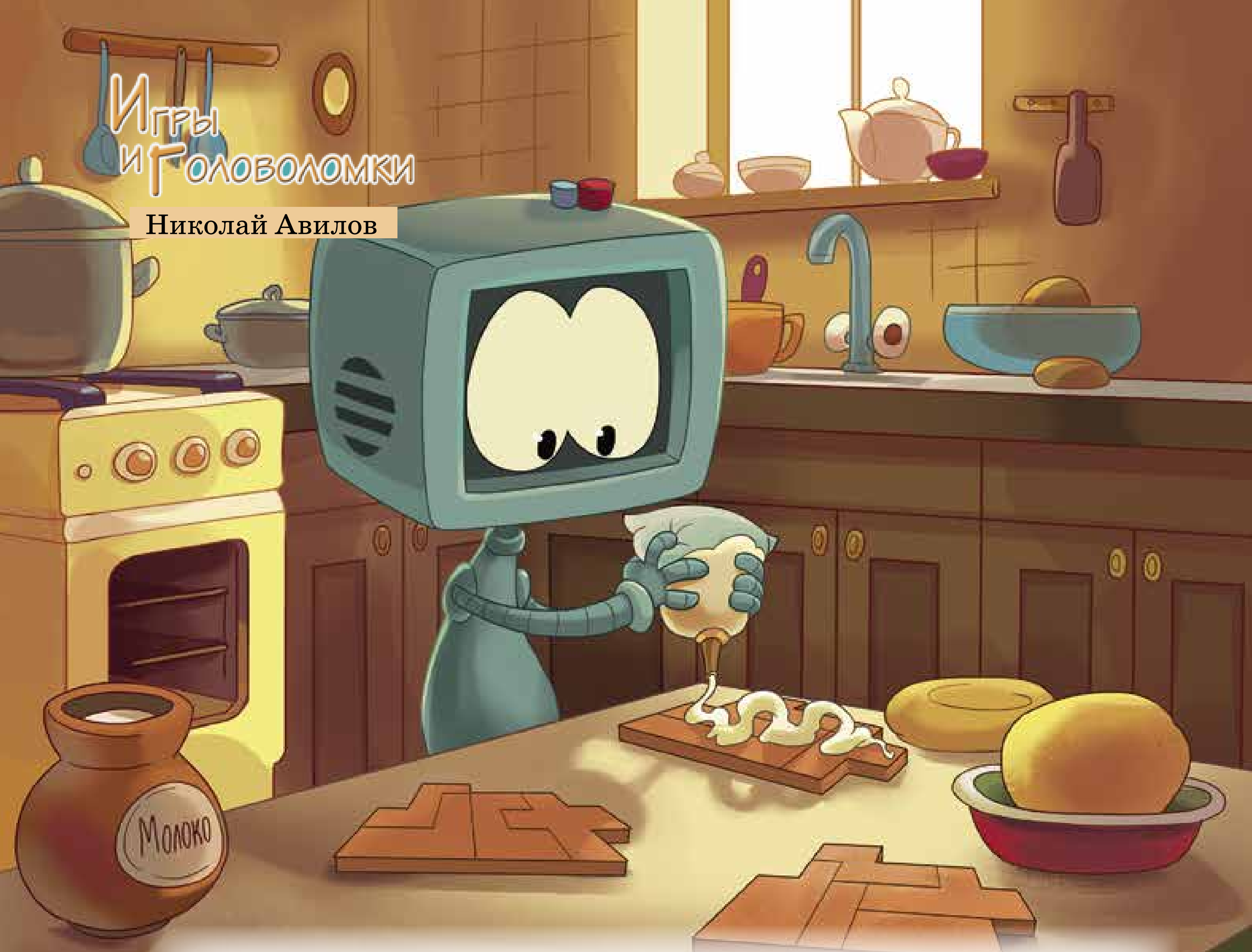
3. На достаточно бурных реках вода не просто волнуется, но даже появляются такие бурунчики, как на фото. В какую сторону на этом фото течёт река – вправо или влево? На этот вопрос легко ответить неправильно, будьте внимательны!

4. На фото воронка на поверхности реки (за столбом моста). В какую сторону вращается вода в воронке? В какую сторону движутся волны, которые на фото образуют спирали, заходящие в воронку?

Художник Мария Усеинова

Ответы в следующем номере

Николай Авилов

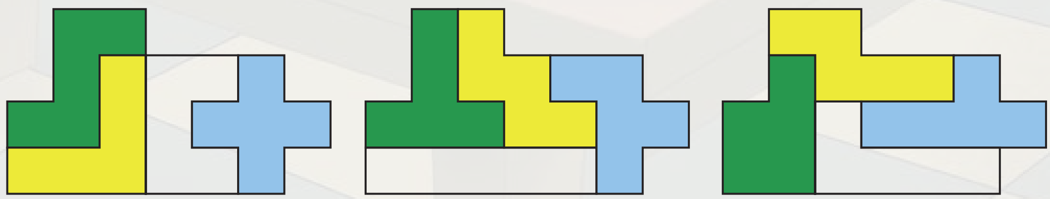


ТРЁХСЛОЙНЫЙ ПИРОГ

Известна задача Мартина Гарднера[1]:

Разбейте двенадцать пентамино на три группы по четыре элемента в каждой. Затем найдите фигуру площадью 20 квадратиков, которую можно сложить из элементов каждой группы.

Одно из возможных решений изображено на рисунке:



Решите эту задачу для *симметричной* фигуры площади 20 квадратиков.

Художник Анна Рацкевич

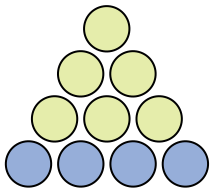
[1] М. Гарднер «Математические головоломки и развлечения». М.: Мир, 1971 г., с. 481 – 483, рис. 237.

Материал подготовил
Григорий Мерзон

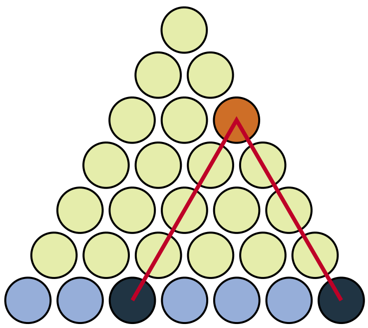
ТРЕУГОЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ПАРЫ ПРЕДМЕТОВ

1, 3, 6, 10, 15... – так начинается последовательность треугольных чисел. Первое число в ней равно 1, чтобы получить второе число – надо прибавить к предыдущему 2, чтобы получить третье – прибавить 3, и так далее.

А можно эти числа нарисовать: например, 3-е треугольное число – это количество монет, которое требуется, чтобы сложить «треугольник со стороной 3». Чтобы получить треугольник на единицу большего размера, нужно добавить ещё один ряд монет (в данном случае, из 4 монет) – так что получается та же последовательность, о которой шла речь в начале.

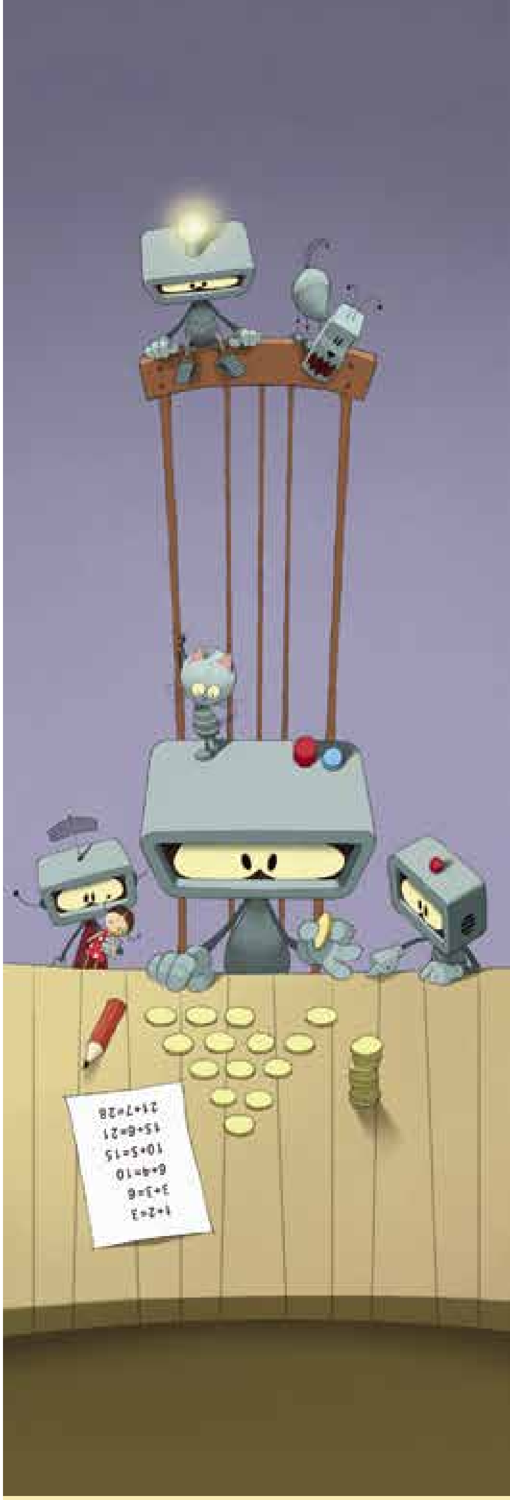


Как быстро посчитать, например, 100-е треугольное число? Тут помогает замечательная связь между треугольными числами и способами выбирать пару предметов из нескольких. Чтобы эту связь увидеть, добавим под треугольником из монет мысленно ещё один ряд, как на рисунке. Тогда каждая из настоящих монет «указывает» на какую-то пару из добавленных монет (и на каждую пару указывает только одна монета!).



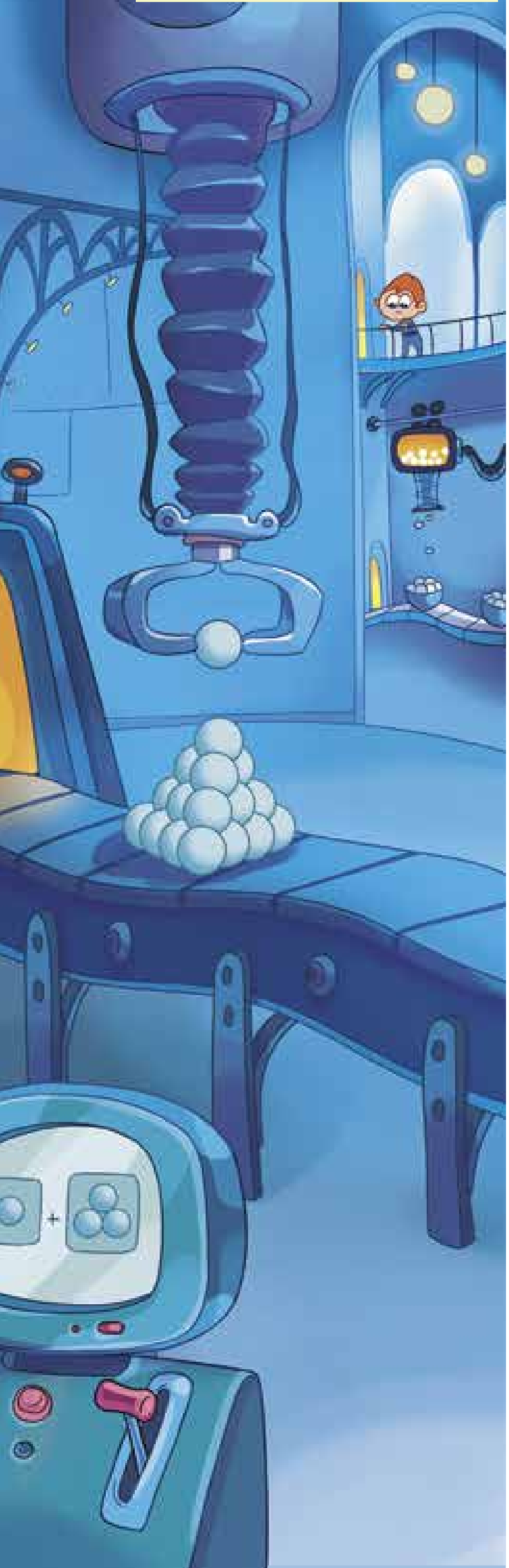
А такие пары сосчитать уже несложно: можно сначала выбрать одну монету 101 способом, а потом вторую 100 способами – и каждую пару мы посчитаем при этом два раза (когда сначала выберем левую из монет и когда сначала выберем правую). То есть 100-е треугольное число равно $\frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$. И вообще, N-е треугольное число равно $\frac{N \cdot (N+1)}{2}$.

Замечательно, что очень похожая формула есть и для пирамидальных чисел (об этом рассказывается в статье А. Заславского в этом номере), но аналогичный геометрический аргумент придумать уже не получается... может быть, у читателей получится?



Художник Алексей Вайнер

Алексей Заславский



Удивительное число 2024

Для начала разберём задачу, предлагавшуюся в «Нашем конкурсе» в «Квантике» №4 за 2024 год:

Задача 1. Что больше:

$1\cdot 22+2\cdot 21+3\cdot 20+\ldots+22\cdot 1$

или

$2^2+4^2+6^2+\ldots+22^2$?

Ответ: обе суммы равны.

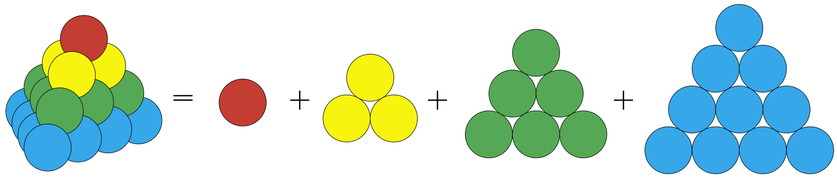
Конечно, не так уж трудно просто посчитать эти суммы (интересно, что обе они равны 2024). Однако убедиться в их равенстве можно, вообще не производя вычислений. В первой сумме первое слагаемое – это 22 единицы, второе – 21 двойка, третье – 20 троек и так далее, поэтому её можно переписать в виде $1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+\ldots+(1+2+\ldots+22)$, – ведь тут тоже 22 единицы, 21 двойка, и т.д.

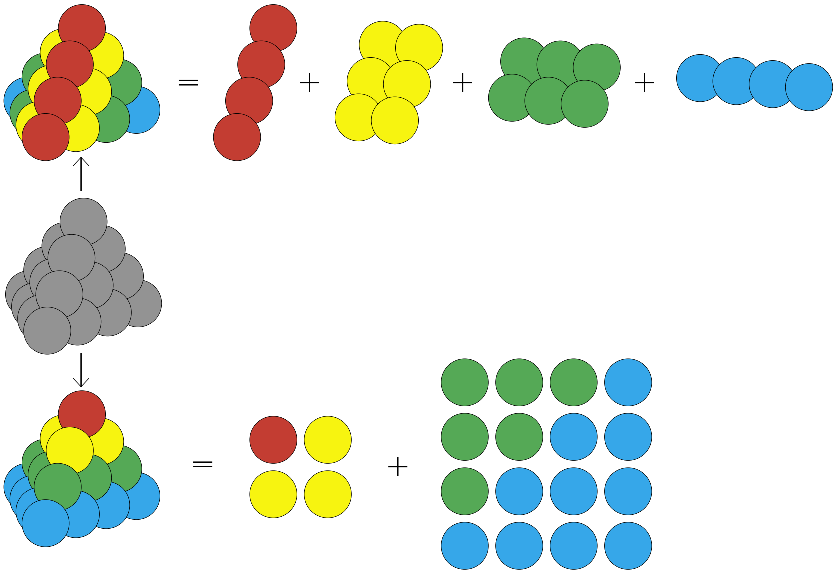
Заметим, что теперь сумма первого и **второго** слагаемых равна $\mathbf{2}+(\mathbf{1}+1)=2\cdot 2=2^2$, третьего и **четвёртого** – равна $\mathbf{4}+(\mathbf{3}+1)+(\mathbf{2}+2)+(\mathbf{1}+3)=4\cdot 4=4^2$… Так будет и дальше; например, 5-е и 6-е слагаемое можно сложить так:

$$
\begin{array}{r}
1+2+3+4+5 \\
+\quad 6+5+4+3+2+1 \\
\hline
=6+6+6+6+6+6=6\cdot 6=6^2.
\end{array}
$$

Поэтому вся сумма равна сумме квадратов чётных чисел $2^2+4^2+6^2+\ldots+22^2$, что и требовалось.

Этому рассуждению можно придать геометрическую форму. Составим из одинаковых шариков пирамиду, в верхнем слое которой – один шарик, в следующем – треугольник из $1+2=3$ шариков, в третьем – треугольник из $1+2+3=6$ шариков, ..., в нижнем – треугольник из $1+2+\ldots+22$ шариков.





Тогда первая сумма в задаче 1 соответствует разрезанию этой пирамиды на прямоугольники, а вторая – на слои толщиной 2.

Если из N шариков можно сложить пирамиду, то число N называется *тетраэдральным* (от слова *тетраэдр*, то есть четырёхгранник или треугольная пирамида). Первые четыре тетраэдральных числа равны 1, 4, 10, 20. Как мы выяснили, суммы из первой задачи равны двадцать второму тетраэдральному числу.

Упражнение 1. Напишите равенство, аналогичное равенству из задачи 1, соответствующее произвольному тетраэдральному числу с чётным номером.

Упражнение 2. Какое равенство соответствует тетраэдральному числу с нечётным номером?

А как подсчитать 22-е тетраэдральное число? Можно ли это сделать проще, чем сложив все слагаемые суммы? Для этого рассмотрим другую задачу.

Задача 2. В классе 24 школьника. Из них надо выбрать троих для участия в олимпиаде. Сколькими способами это можно сделать?

Количество способов, которыми можно выбрать k человек из n, называется *числом сочетаний из* n по k и обозначается C_n^k или $\binom{n}{k}$. Известна формула для числа сочетаний:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ – произведение всех чисел от единицы до n (читается n *факториал*).

Докажем эту формулу. Будем расставлять n человек в ряд. Всего таких расстановок $n!$ – на первое место можно поставить любого из n человек, на второе – любого из оставшихся $n-1$ человек и так далее. Первых k человек в такой расстановке мы и будем считать выбранными.

Но среди наших расстановок много таких, когда на первых местах стоят одни и те же k человек. Ведь этих k человек можно переставить на первых k местах $k!$ способами, и оставшихся $n-k$ человек можно переставить на оставшихся местах $(n-k)!$ способами. Выходит, каждый выбор определённых k человек мы учли среди наших $n!$ перестановок $k! \cdot (n-k)!$ раз. Поэтому всего различных выборов k человек будет как раз $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, что и требовалось доказать.

Но задачу 2 можно решать и иначе. Построим всех школьников класса в шеренгу. Сначала выберем одного школьника, стоящего не с краю, а затем одного из стоящих слева от выбранного и одного из стоящих справа. Если первый выбранный школьник стоит на втором слева месте, то двух других можно выбрать $1 \cdot 22$ способами, если на третьем слева – $2 \cdot 23$ способами, ..., на втором справа – $22 \cdot 1$ способами. Сложив все эти произведения, получим, что ответом к задаче 2 тоже будет 22-е тетраэдральное число. Значит, оно равно $\binom{24}{3} = \frac{24!}{3! \cdot 21!} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2024$.

Упражнение 3. Докажите, что n-е тетраэдральное число равно $\binom{n+2}{3}$.

Задача 3. Итак, мы выяснили, что $2024 = \binom{24}{3}$, то есть четырёхзначное число 2024 можно записать, использовав только три цифры – двойку, тройку и четвёрку (правда, понадобится ещё пара скобок или буква C). А можно ли обойтись двумя цифрами?

Художник Анна Рацкевич

Чудеса лингвистики

Евгений Смирнов

Спорт по-китайски

Для этого вида спорта мы часто используем его иностранное название, которое по-китайски пишется так:

乒乓

А как по-русски он называется официально?

Художник Елена Цветаева

XLV ТУРНИР ГОРОДОВ
ВЕСЕННИЙ ТУР, 8 – 9 КЛАССЫ

25 февраля и 10 марта 2024 года прошёл весенний тур XLV Турнира городов – международного математического соревнования для школьников. Приводим задачи для 8 – 9 классов. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов.

Базовый вариант

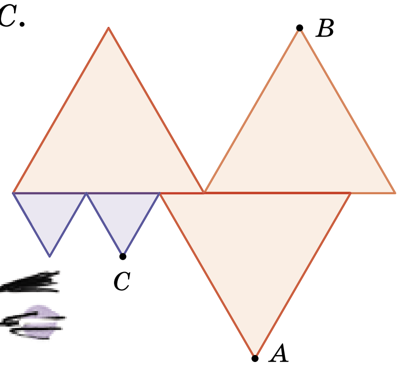
1 [4]. Если Вася делит пирог или кусок пирога на две части, то всегда делает их равными по массе. А если делит на большее число частей, то может сделать их какими угодно, но обязательно все разной массы. За несколько таких дележей Вася разрезал пирог на 17 частей. Могли ли все части оказаться равными по массе? (Объединять части нельзя.)

Борис Френкин

2 [4]. Шахматную доску 8×8 перекрасили в несколько цветов (каждую клетку – в один цвет). Оказалось, что если две клетки – соседние по диагонали или отстоят друг от друга на ход коня, то они обязательно разного цвета. Какое наименьшее число цветов могло быть использовано?

Михаил Евдокимов

3 [5]. Пять равносторонних треугольников расположены так, как показано на рисунке ниже. Три больших треугольника равны между собой и два маленьких тоже равны между собой. Найдите углы треугольника ABC.



Егор Бакаев

4 [5]. Два пирата делят 25 золотых монет разного достоинства, выложенные в виде квадрата 5×5. Пираты по очереди берут по одной монете с краю (монету можно взять, если слева, или справа, или снизу, или сверху от неё нет другой). Верно ли, что первый пират всегда может действовать так, чтобы гарантированно получить хотя бы половину суммарной добычи?

Михаил Евдокимов

5 [6]. Есть N удавов, их пасти имеют размеры 1 см, 2 см, ..., N см. Каждый удав может заглотить яблоко любого диаметра (в см), не превосходящего размер его пасти. Но по внешнему виду нельзя определить, какая у кого пасть. Вечером смотритель может выдать каждому удаву сколько хочет яблок каких хочет размеров, и за ночь удав заглотит все те из них, что влезают ему в пасть. Какое минимальное количество яблок суммарно смотритель должен вечером выдать удавам, чтобы утром по результату он гарантированно определил размер пасти каждого удава?

Татьяна Казицына

Сложный вариант

1 [4]. На урок физкультуры пришло 12 детей, все разной силы. Физрук 10 раз делил их на две команды по 6 человек, каждый раз новым способом, и проводил состязание по перетягиванию каната. Могло ли оказаться, что все 10 раз состязание закончилось вничью (то есть суммы сил детей в командах были равны)?

Михаил Евдокимов

2 [5]. Докажите, что среди вершин любого выпуклого девятиугольника можно найти три, образующие тупоугольный треугольник, ни одна сторона которого не совпадает со сторонами девятиугольника.

Александр Юран

XLV ТУРНИР ГОРОДОВ
ВЕСЕННИЙ ТУР, 8–9 КЛАССЫ

3 [7]. Имеется кучка из 100 камней. Играют двое. Первый берёт 1 камень, потом второй берёт 1 или 2 камня, потом первый берёт 1, 2 или 3 камня, затем второй 1, 2, 3 или 4 камня и так далее. Выигрывает взявший последний камень. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

Людмила Смирнова

4 [7]. Петя загадал положительную несократимую дробь $x = \frac{m}{n}$. Можно назвать положительную дробь y, меньшую 1, и Петя назовёт числитель несократимой дроби, равной сумме $x + y$. Как за два таких действия гарантированно узнать x?

Максим Дидин

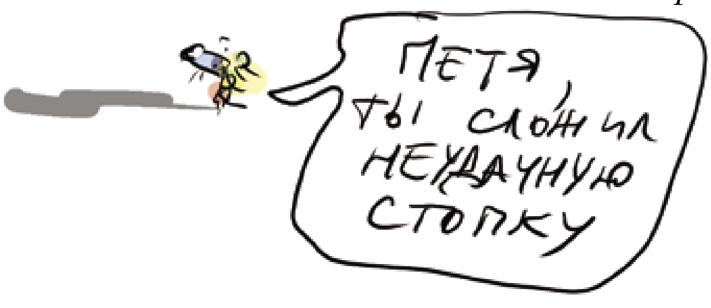
5 [9]. См. задачу на с. 27.

6 [7]. На описанной окружности треугольника ABC отметили точки M и N – середины дуг BAC и CBA соответственно, а также точки P и Q – середины дуг BC и AC соответственно. Окружность ω_1 касается стороны BC в точке A_1 и продолжений сторон AC и AB. Окружность ω_2 касается стороны AC в точке B_1 и продолжений сторон BA и BC. Оказалось, что A_1 лежит на отрезке NP. Докажите, что B_1 лежит на отрезке MQ.

Алексей Доледенок

7 [12]. На каждой из 99 карточек написано действительное число. Все 99 чисел различны, а их общая сумма иррациональна. Стопка из 99 карточек называется *неудачной*, если для каждого k от 1 до 99 сумма чисел на k верхних карточках иррациональна. Петя вычислил, сколькими способами можно сложить исходные карточки в неудачную стопку. Какое наименьшее значение он мог получить?

Андрей Кушнир



Художник Сергей Чуб

ЖУК И СТОЛБИКИ

В ряд стоят 9 вертикальных столбиков. В некоторых местах между соседними столбиками вставлены горизонтальные палочки, никакие две не находятся на одной высоте. Жук ползёт снизу вверх; встречая палочку, он переползает по ней на соседний столбик и продолжает ползти вверх. Известно, что если жук начинает внизу первого (самого левого) столбика, он закончит свой путь на девятом (самом правом) столбике.

Всегда ли можно убрать одну палочку так, чтобы жук в конце пути оказался наверху пятого столбика?

(Например, если палочки расположены как на рисунке, жук будет ползти по сплошной красной линии. Если убрать третью палочку на пути жука, дальше он поползёт по пунктирной линии.)

Автор Георгий Караваев

Художник Алексей Вайнер

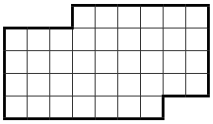
НАШ КОНКУРС, VIII тур

(«Квантик» № 4, 2024)

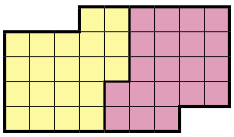
36. *Каждый год 1 апреля мистер X находит сумму цифр своего возраста. В 2024 году эта сумма оказалась в целое число раз больше, чем будет в 2025 году. Сколько лет может быть мистеру X, если ему больше 1 года, но меньше 100 лет? Укажите все варианты и докажите, что других нет.*

Ответ: 9, 19, 39, 79, 99. Если при увеличении возраста на 1 не произошло перехода через десяток, то сумма цифр возраста в 2024 году будет на 1 меньше суммы цифр возраста в следующем году, то есть не может быть в целое число раз больше. Значит, переход через десяток произошёл, и возраст мистера X в 2024 году оканчивается на 9. Если мистеру X сейчас 99 лет, то в следующем году 100 – сумма цифр равна 1, то есть возраст 99 подходит. В остальных случаях возраст в 2025 году – двузначное число; обозначим его первую цифру A. Тогда сумма цифр возраста в 2024 году, $(A-1)+9=A+8$, должна делиться на A. Но тогда и 8 должно делиться на A. Значит, A – это 1, 2, 4 или 8, и помимо 99 лет возраст мистера X мог быть равен 9, 19, 39 или 79 годам.

37. Разрежьте фигуру на две равные части:



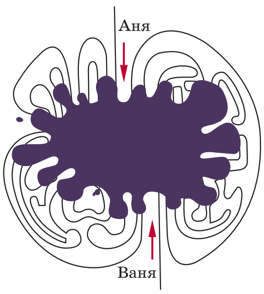
Ответ: см. рисунок.



38. *Что больше:* $1\cdot22+2\cdot21+3\cdot20+\ldots+$ $+22\cdot1$ *или* $2^2+4^2+6^2+\ldots+22^2$?

Ответ: суммы равны. Решение см. на с. 20.

39. *Перед вами карта лабиринта, в который с разных сторон вошли Аня и Ваня. Стена лабиринта – сплошная несамопересекающаяся линия, но часть карты залита чернилами. Пользуясь только этой картой, определите, могли ли Аня и Ваня встретиться в лабиринте, не выходя обратно из своих выходов, или это невозможно?*



Ответ: невозможно. Представим, что стена лабиринта на плане изображена нитью. Если вытянуть её за концы в прямую линию, Аня и Ваня окажутся по разные стороны от нити. Значит, и до этого, когда нить-стена была изогнута, Аня и Ваня были по разные стороны от неё и не смогли бы встретиться в лабиринте.

40. *Барсуки, белки, бобры и бурундуки встречали Новый год. Сначала все звери, кроме барсуков, водили хоровод, а потом хоровод водили все, кроме белок. В каждом хороводе никакие два одинаковых зверька рядом не стояли. Какое наименьшее количество бобров могло быть на празднике, если белок было на 50 больше, чем барсуков?*

Ответ: 25. Поскольку в первом хороводе белки не стояли рядом, бобров и бурундуков в сумме должно быть не меньше, чем белок – то есть по крайней мере на 50 больше, чем барсуков:

$$\text{Бо} + \text{Бу} \geqslant \text{Ба} + 50.$$

С другой стороны, во втором хороводе не стояли рядом бурундуки – значит, их было не больше, чем барсуков и бобров в сумме:

$$\text{Ба} + \text{Бо} \geqslant \text{Бу}.$$

Сложим два неравенства:

$$2 \cdot \text{Бо} \geqslant 50.$$

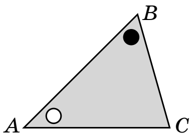
То есть бобров не меньше 25.

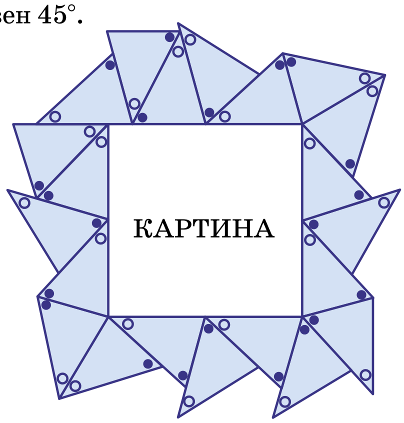
Покажем, что 25 бобров могло быть. Пусть барсуков тоже 25, бурундуков 50, а белок 75. В первом хороводе расставим белок через одну, а на пропущенные места поставим $25+50$ бобров и бурундуков. Во втором хороводе расставим через одного 50 бурундуков, а на пропущенные места поставим бобров и барсуков.

РАМА ИЗ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

(«Квантик» № 5, 2024)

Обозначим углы треугольника как на рисунке. Посмотрим на левый верхний угол картины. Из него видно, что два угла, равных углу A, в сумме дают 90°. Значит, угол A равен 45°.





Посмотрим теперь на правый верхний угол картины. Три угла, равных углу C, один угол, равный углу A, и угол квадрата составляют полный угол в 360°. Значит, $3\angle C = 360° - 90° - 45° = 225°$, то есть угол C равен $225° : 3 = 75°$. Тогда угол B равен $180° - 45° - 75° = 60°$.

ПАРОСЛОВ С ВАГОНЧИКАМИ

В слове *катафот* первая часть (др.-греч. κατα-) означает «противодействие» и не связана с катанием.

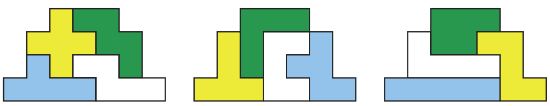
Небозём – старинное название горизонта (граница между *небом* и *землёй*). Это слово нашёл в каком-то редком источнике (или даже придумал сам) Владимир Иванович Даль. Все остальные слова в этом ряду относятся к частям тела.

Мажордом, несмотря на иностранное происхождение, подходит (франц. *majordome* образовано от лат. *major* «главный» и *domus* «дом»). А вот *домкрат* – это не домохозяин, как иногда думают, а механизм для подъёма тяжестей. *Царедворец* содержит корень *двор-*, но не слово *дворец* (ср. *живопис-ец*).

В цепочке не должно быть *каротина*, поскольку в этом слове один корень (от лат. *carota* «морковь», ср. англ. *carrot*).

ТРЁХСЛОЙНЫЙ ПИРОГ

Мне удалось найти симметричную фигуру, которую можно в три слоя выложить из пентамино:



УДИВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО 2024

Ответ к задаче 3. Можно обойтись всего двумя цифрами, заменив в выражении $\binom{24}{3}$ число 24 на 4! (четыре факториал).

СПОРТ ПО-КИТАЙСКИ

Это настольный теннис, который мы часто называем «пинг-понг».

XLV ТУРНИР ГОРОДОВ. ВЕСЕННИЙ ТУР, 8 – 9 классы

Базовый вариант

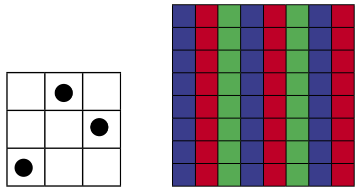
1. Ответ: могли. Вот один из примеров. Пусть масса пирога была 17 унций. Сначала разделим его на куски в 2, 7 и 8 унций, затем кусок в 7 унций на куски в 1, 2 и 4 унции. Теперь будем делить все куски, кроме «единичных», пополам, пока все не станут «единичными».

Интересно решить задачу, когда пирог разрезан на N частей: они могут оказаться равными при всех N, кроме 3, 5, 6, 9.

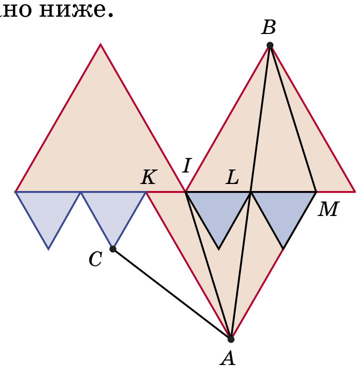
2. Ответ: 3 цвета.

Оценка. По условию клетки на левом рисунке должны быть разного цвета.

Пример. Окрасим каждый столбец в свой цвет, периодически чередуя цвета 1, 2 и 3 (см. правый рисунок).



3. Ответ: $A = 60°$, $B = 30°$, $C = 90°$. Добавим на рисунок ещё два маленьких треугольника, как показано ниже.



Так как отрезки AM и BI равны и параллельны, $AIBM$ – параллелограмм, а L тогда – его центр. При повороте на 60° против часовой стрелки вокруг точки A треугольник AML, очевидно, переходит в треугольник AKC. Значит, в треугольнике ABC сторона AB в два раза больше AC и угол CAB равен 60°, поэтому он прямоугольный с указанными углами.

4. Ответ: неверно. Пусть стоимость монеты, лежащей в центре, больше всех остальных, вместе взятых. Пусть второй пират ходит центрально симметрично первому, пока не «освободится» центральная монета. Тогда он забирает её и выигрывает.

5. Ответ: $(N - 1)^2$ яблок. Если у какого-то яблока диаметр нецелый, увеличим его до ближайшего целого числа, от этого ничего не изменится: например, все удавы одинаково «реагируют» на яблоки диаметра из промежутка (2, 3]. Так добьёмся того, что диаметры всех яблок будут целыми.

Оценка. Рассмотрим яблоки диаметра d, где $2 \leqslant d \leqslant N$. Пусть таких яблок не дадут каким-то двум удавам. Пасти этих удавов могут оказаться размером $d-1$ и d. Оба удава съедят все меньшие яблоки и оставят все бóльшие, поэтому этих удавов не различить. Значит, для каждого d от 2 до N включительно яблок диаметра d требуется хотя бы $N-1$, а всего яблок тогда нужно хотя бы $(N-1)^2$.

Пример. Дадим каждому удаву, кроме последнего, яблоки всех диаметров от 2 до N включительно. Получив такой набор, удав выдаст размер своей пасти: он равен максимальному радиусу съеденного им яблока или 1, если ни одно яблоко им не съедено. Размер пасти последнего удава определим методом исключения.

Замечание. Оказывается, тот же самый набор яблок можно раздать удавам как угодно, лишь с одним условием: не давать одинаковые яблоки одному и тому же удаву. В самом деле, если найдётся удав, съевший яблоко диаметра N, то его пасть размера N. Иначе такая пасть у удава, не получившего такого яблока. Среди остальных удавов с помощью яблок диаметра $N-1$ точно так же найдём пасть размера $N-1$ и так далее. Оставшийся в конце удав будет иметь пасть размера 1. Среди участников Турнира это заметил, например, десятиклассник Низам Гаджиев из Махачкалы.

Сложный вариант

1. Ответ: да, могло. Пусть силы мальчиков равны 1, 2, ..., 12. Разобьём их на 6 пар с равной суммарной силой 13. В одну команду возьмём любые три из этих шести пар, в другую – остальные три пары. Получится 10 разбиений на команды равной силы – число способов разбить 6 объектов на две группы по 3.

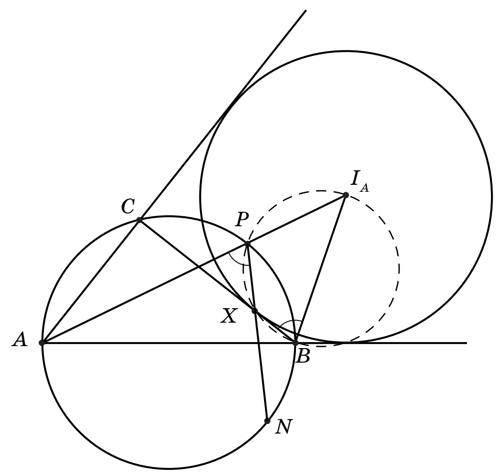
2. Обозначим девятиугольник как $A_1A_2...A_9$. Рассмотрим четырёхугольники $A_2A_4A_6A_8$ и $A_1A_4A_6A_8$. Заметим, что оба прямоугольниками они быть не могут, так как прямоугольник однозначно задаётся тремя точками. Тогда, так как сумма углов в четырёхугольнике равна $360°$, один из них будет иметь тупой угол, который и даст нам искомый треугольник.

3. Докажем, что первый игрок может делать свои ходы так, чтобы в его n-й ход количество забранных из кучки камней равнялось n^2 (при n от 1 до 10). В свой первый ход он просто берёт один камень. Пусть в свой n-й ход ему удалось сделать общее количество забранных камней равным n^2. В ответ второй игрок может взять от 1 до $2n$ камней. Так как $(n+1)^2-n^2=2n+1$, после его хода общее количество забранных камней будет больше n^2 и меньше $(n+1)^2$. Первый игрок в свой следующий ход может взять от 1 до $2n+1$ камня и точно сможет получить $(n+1)^2$ забранных камней независимо от предыдущего хода второго игрока.

Так как $100=10^2$, первый игрок своим 10-м ходом заберёт оставшиеся камни и выиграет.

4. Можно считать, что m и n – натуральные взаимно простые числа. Назовём сначала дробь $\frac{1}{2}$. Петя вычислит дробь $\frac{2m+n}{2n}$. Общий делитель числителя $2m+n$ и знаменателя $2n$ будет также общим делителем чисел $2(2m+n)-2n = 4m$ и $2n$ и, поскольку m и n взаимно просты, может равняться 1, 2 или 4. Узнав числитель, который сообщит нам Петя, мы точно будем знать, что $2m+n$ не больше этого числителя, умноженного на 4. Следующим ходом назовём дробь $\frac{1}{p}$, где p – простое число, большее учетверённого числителя, – тогда p будет больше и m, и n. Петя вычислит дробь $\frac{pm+n}{pn}$, она будет несократимой. Узнав её числитель $pm+n$, возьмём от него остаток от деления на p и найдём n. Вычтя из числителя n и поделив на p, найдём m.

6. Временно забудем о том, что точка A_1 лежит на отрезке NP. Пусть I_A – центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон BA и AC. Обозначим через X точку пересечения прямых BC и PN.



Так как I_A лежит на биссектрисе внешнего угла B, то

$$\angle CBI_A = \frac{180^\circ - \angle B}{2} = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}.$$

Так как I_A лежит на биссектрисе угла A, то точки A, P, I_A лежат на одной прямой. Тогда

$$\angle APN = \frac{\overset{\frown}{AN}}{2} = \frac{\overset{\frown}{ABC}}{4} = \frac{360^\circ - \overset{\frown}{AC}}{4} = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}.$$

Таким образом, $\angle CBI_A = \angle APN$, то есть четырёхугольник I_APXB вписанный.

Вернёмся к решению задачи. Точки X и A_1 совпадают тогда и только тогда, когда $\angle BXI_A = \angle BPI_A = 90^\circ$, что, в свою очередь, эквивалентно тому, что $\angle BCA = 90^\circ$. Проведя аналогичные рассуждения со стороны вершины A, получим, что принадлежность точек Q, B_1, M одной прямой эквивалентна тому, что угол ACB прямой, а значит, из одного утверждения следует другое.

7. Ответ: 98!.

Пример. Пусть на карточках написаны числа $\sqrt{2}$, 1, 2, ..., 98. Тогда в неудачной стопке карточка $\sqrt{2}$ должна лежать сверху, а остальные карточки можно расположить любым из 98! способов. В этом случае всякая сумма чисел на нескольких верхних карточках будет иметь вид $\sqrt{2}+n$, где n – целое, то есть будет иррациональна.

Оценка. Разобьём все стопки карточек на 98! групп, в каждой из которых одна стопка получается из другой циклической перестановкой (то есть перекладыванием нескольких верхних карточек вниз стопки). Каждая группа состоит из 99 стопок. Докажем, что каждая группа содержит хотя бы одну неудачную стопку.

Предположим, что нашлась группа без неудачных стопок. Выберем одну из стопок и расположим карточки из неё по кругу в том же порядке, в котором они лежат в стопке: a_1, a_2, ..., a_{99}. Тогда все стопки из группы будут иметь вид a_i, a_{i+1}, ..., a_{99}, a_1,..., a_{i-1} для i от 1 до 99.

Начнём идти от карточки a_1 по часовой стрелке до тех пор, пока сумма чисел $a_1 + a_2 + \ldots + a_j$ на пройденных карточках не станет рациональной. Далее начнём идти от a_{j+1} до тех пор, пока сумма чисел на пройденных карточках не станет рациональной. Такой момент настанет, потому что соответствующая стопка, начинающаяся с a_{j+1}, не является неудачной. Проделаем описанную операцию 100 раз. По принципу Дирихле найдётся карточка a_t, с которой начинали отсчитывать сумму хотя бы дважды. Оставим только шаги процесса между первым и вторым отсчитыванием от карточки a_t (включая первое, но не включая второе).

Посмотрим на сумму S пройденных чисел (каждое число считается столько раз, сколько его прошли). С одной стороны, S рационально, так как мы брали отрезки карточек с рациональной суммой. С другой стороны, мы начали с карточки a_t, а закончили карточкой a_{t-1}, то есть прошли несколько полных кругов. Из этого следует, что сумма всех пройденных чисел будет равна nS', где n – количество пройденных кругов, а S' – сумма чисел на всех карточках. Однако S' по условию иррационально, откуда nS' также иррационально. Противоречие.

Таким образом, в каждой группе есть хотя бы одна неудачная стопка. Тогда общее количество неудачных стопок не меньше чем $99! \cdot \frac{1}{99} = 98!$.

Замечание. Существуют и другие примеры. Например, можно взять карточки $1+\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$, ..., $50+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$, ..., $49-\sqrt{2}$. Назовём первые 50 карточек *положительными*, а остальные – *отрицательными*. В неудачной стопке, состоящей из этих карточек, первая карточка должна быть положительной, и для любого k среди первых k карточек положительных должно быть больше, чем отрицательных. Количество неудачных стопок в этом случае также равно 98!.

ЖУК И СТОЛБИКИ

Ответ: да. Посадим по жуку на основание каждого столбика. Пусть они ползут вверх с одинаковыми постоянными скоростями, а по палочкам переползают мгновенно. Тогда на горизонтальных палочках жуки меняются местами, и в каждый момент времени по каждому столбику ползёт ровно один жук. В частности, на каждом столбике финиширует ровно один жук.

Назовём жука, стартовавшего с первого столбика, *красным*, а финишировавшего на вершине пятого столбика – *зелёным*. Красный жук стартует левее зелёного, а финиширует правее. Значит, хотя бы на одной из палочек они меняются местами. Уберём эту палочку. После этого красный жук поползёт по маршруту зелёного, то есть закончит на пятом столбике.

ПОПРАВКА

В III туре конкурса по русскому языку («Квантик» №5, с. 24–25) в задаче 14 допущена опечатка. Текст sms-ки следует читать так: «Алеша, 1234 2134!» Приносим свои извинения. Срок отправки решений этой задачи продлён **до 1 июля.**

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем
заочном математическом конкурсе.

Третий этап состоит из четырёх туров (с IX по XII) и идёт с мая по август.

Высылайте решения задач X тура, с которыми справитесь, не позднее 5 июля в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvantik.com/short/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, г. Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте www.kvantik.com. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

X ТУР

46. У Пети есть картонный прямоугольник. Он хочет разрезать его на части и сложить из них ромб. Помогите ему это сделать.

47. Какое из двух чисел, $100!$ или $100!+99!+98!$, оканчивается на большее количество нулей? Напомним, что $n!$ – это произведение натуральных чисел от 1 до n.

Авторы задач: Борис Френкин (46), Михаил Мурашкин (47), Дмитрий Калинин (48), Игорь Акулич (49), Андрей Бабушкин, 7 класс (50)

48. На столе лежит стопка блинов. Между соседними блинами либо сметана, либо какая-то одна сладкая начинка – мёд или варенье. Сверху и снизу стопки пусто. У каждого блина ровно одна сторона намазана сметаной. У трети блинов одна сторона намазана вареньем. У 10 блинов одна сторона намазана мёдом. Сколько блинов в стопке?

49. а) Найдите наименьшее целое положительное число, каждая цифра которого равна количеству отличных от неё цифр этого числа. б) Найдите наибольшее такое число.

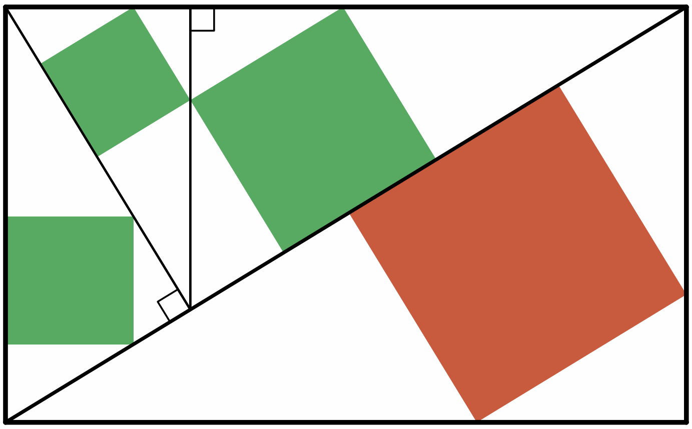
50. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и D равны, $AD = AB + DC$. Серединный перпендикуляр к отрезку BC пересекает отрезок AD. Докажите, что он делит $ABCD$ на два четырёхугольника одинакового периметра.

Художник Николай Крутиков

КВАДРАТЫ В ТРЕУГОЛЬНИКАХ

Произвольный прямоугольник разбит на прямоугольные треугольники так, как показано на рисунке ниже. В каждый треугольник вписан квадрат со стороной, лежащей на гипотенузе. Что больше: площадь самого большого (красного) квадрата или сумма площадей трёх остальных (зелёных) квадратов?

Задача предлагалась на базовом туре XLV Турнира городов весной 2024 года



Художник Мария Усеинова   Автор Михаил Евдокимов

ISSN 2227-7986 24006
9 772227 798244