№ 7 | июль 2022

ЖУРНАЛ

КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

№ 7
ИЮЛЬ
2022

СКОЛЬКО ЛАП У ДРАКОНА?

ЧЕТЫРЁХМЕРНЫЙ КУБИК

ТРИ ВИДА ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

Enter

Продолжается ПОДПИСКА на журнал «КВАНТИК» на 2-е полугодие 2022 года

ОНЛАЙН-ПОДПИСКА НА САЙТАХ:

- **Почты России**

podpiska.pochta.ru/ПМ068

по этой ссылке вы можете оформить подписку и для своих друзей, знакомых, родственников

- **Агентства АРЗИ**

akc.ru/itm/kvantik

ПОДПИСКА В ПОЧТОВЫХ ОТДЕЛЕНИЯХ:

- **Почта России**

«Электронная версия Каталога Почты России»

индекс **ПМ068**

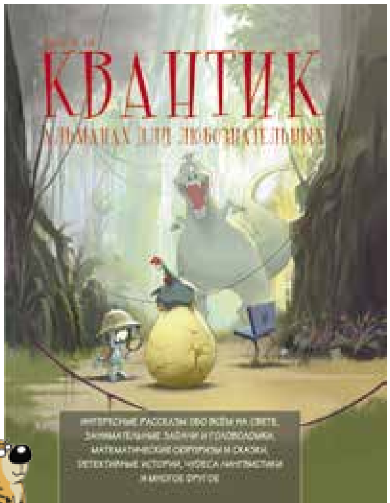
- **Почта Крыма**

«Каталог периодических изданий Республики Крым и г. Севастополя»

индекс **22923**

Подробнее обо всех способах подписки смотрите на **kvantik.com/podpiska**

НАШИ НОВИНКИ



АЛЬМАНАХ ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ «КВАНТИК» – выпуск 19

в него вошли материалы журнала «КВАНТИК» за первое полугодие 2021 года

Купить этот и предыдущие альманахи можно в магазине **«МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КНИГА»** (адрес: г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11), в интернет-магазинах **biblio.mccme.ru**, **kvantik.ru**, **ozon**, **wildberries**, **Яндекс.маркет**, **my-shop** и других (см. список на сайте **kvantik.com/buy**)

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
t.me/kvantik12
vk.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com

Журнал «Квантик» № 7, июль 2022 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Т. А. Корчемкина, Е. А. Котко, Г. А. Мерзон, Н. М. Нетрусова, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов, Н. А. Солодовников
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Алексей Вайнер

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**
Подписка на журнал в отделениях Почты России (у оператора) по электронной версии Каталога Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)
Онлайн-подписка на сайтах:
▪ агентства АРЗИ: **akc.ru/itm/kvantik**
▪ Почты России: **podpiska.pochta.ru/press/ПМ068**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 09.06.2022
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831) 218-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+

СОДЕРЖАНИЕ

Валерия Сирота

Четырёхмерный кубик

Когда я была маленькой, мама и папа научили меня рисовать кубик. Наверное, вы все знаете: нужно сначала нарисовать квадрат – это передняя сторона кубика, которая «смотрит на нас»; потом провести из каждой вершины (угла) квадрата отрезки одинаковой длины и в одном и том же направлении – это горизонтальные рёбра кубика, которые ориентированы «от нас». Дальше четыре конца этих отрезков соединяем, получается ещё один квадратик – это задняя грань кубика. Вот и всё! Получился вид «со стороны передней грани и чуть сверху-сбоку». Если кубик не проволочный, а «сплошной» (непрозрачный), нужно стереть или лучше сделать пунктирными рёбра, которые скрыты за тремя ближайшими гранями – на рисунке 1 это передняя, верхняя и правая.

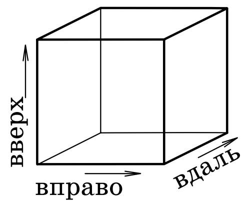


Рис. 1

Проще простого, да? Но мои родители были математики. Поэтому они на этом не остановились и научили меня рисовать ещё и четырёхмерный кубик.

Это тоже оказалось просто! Надо только разобраться, что такое это четырёхмерье. Мы все живём в трёхмерном мире. Потому что у нас есть три независимых направления, вдоль которых мы можем перемещаться или хотя бы смотреть на разные вещи: вперёд-назад, вверх-вниз и вправо-влево. Вперёд-назад – считается за одно направление, потому что движения «туда» и «обратно» не независимы, а противоположны друг другу: одно может «отменить» действие другого, и, пройдя шаг вперёд, а потом шаг назад, вы вернётесь в ту же точку. А вот сделав шаг вправо, а потом несколько шагов вперёд, вы в ту же точку не вернётесь. Направление «по диагонали» тоже не независимое – это комбинация уже имеющихся. Ведь можно пройти по диагонали вверх-направо, а можно вместо этого пройти сначала вверх, а потом направо, и прийти в ту же точку (рис. 2).

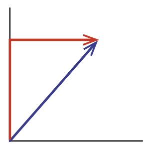


Рис. 2

Можно представить себе двумерных муравьишек, живущих в плоскости. Например, нарисованных на экране компьютера. (Для определённости давайте считать, что плоскость вертикальна.) У них только два независимых направления, вверх-вниз и влево-вправо, выйти из плоскости они не могут. Сложная у них жизнь: если встретятся двое на дорожке, то, чтобы идти дальше каждому своей дорогой, придётся одному через другого перепрыгнуть. Или как им открывать двери в домах? Ещё сложнее жизнь у одномерных червяков, живущих на линии. Они вообще не разминутся при встрече, ползают только друг за другом… и если построят стенку (точку на линии), за неё никто не проникнет, никаких дверей нет.

Но сейчас речь не о них, а о других воображаемых (а может, и нет?) существах, живущих в мире с четырьмя измерениями. Кроме направлений вверх-вниз, вправо-влево и вперёд-назад у них есть ещё одна пара, ещё одно направление, которое мы и представить не можем, и даже названия для этого у нас нет. Так же как двумерные, плоские человечки не могут представить, что есть что-то «снаружи» их листа бумаги.

Но – удивительно! – хоть представить и нельзя, а нарисовать можно. Ведь трёхмерный куб тоже не помещается в двумерную плоскость, но мы ухитряемся нарисовать его на ней. Просто мы выбираем направление на плоскости, которое изображает третье измерение; те самые параллельные друг другу наклонные палочки на рисунке 1 – рёбра «от нас» – как раз ориентированы вдоль этого третьего направления. На плоскости оно совсем не независимое, но мы «забываем» об этом, чтобы увидеть в нарисованном наборе палочек не плоскую фигурку, а объёмный кубик.

Чтобы показать на плоскости четвёртое измерение, нужно просто выбрать ещё одно направление, которое его изображает. Да и какая для плоскости разница – третье измерение или четвёртое? Они всё равно в неё оба не помещаются.

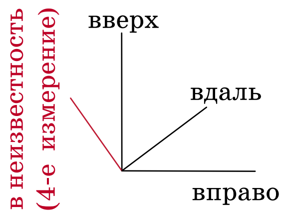


Рис. 3

Итак, рисуем четырёхмерный кубик. По дороге вспоминаем, как мы рисовали трёхмерный (а ведь могли бы его нарисовать и двумерные человечки): передняя и задняя грани – в плоскости рисунка, только со сдвигом одна от другой. Горизонтальные рёбра боковых граней – все параллельны направлению «вдаль».

Трёхмерный куб составлен из квадратных граней («двумерных кубов»), которые склеиваются между

собой по рёбрам. Четырёхмерный куб будет состоять из трёхмерных «3-граней», то есть обычных кубиков, которые будут склеиваться по двумерным граням.

Сначала рисуем (по старому рецепту) «обычный» трёхмерный куб – это «передняя» в том, четвёртом, измерении, трёхмерная грань 4-кубика. На рисунке 4 она показана чёрными рёбрами. Потом из каждой вершины этой «передней 3-грани» проводим палочку-ребро в направлении четвёртого измерения (на рисунке – красные): все боковые 3-грани параллельны направлению «в неизвестность». И, наконец, рисуем «заднюю 3-грань» – ещё один кубик, сдвинутый относительно первого (на рисунке – синий). Вот и всё!

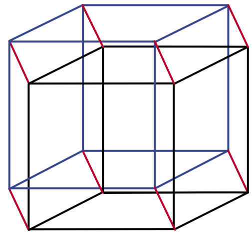


Рис. 4

Чтобы хвастаться перед одноклассниками, этого уже достаточно. Но чтобы лучше разобраться, что же это нарисовано, ответим ещё на несколько вопросов.

Задача 0. Сколько у 4-куба вершин? Рёбер? Двумерных (квадратных) граней? Трёхмерных (кубических) 3-граней?

Эту задачу можно решить разными способами. Мы их сейчас обсудим, и решение найдём. Но прежде, чем читать дальше, попробуйте разобраться самостоятельно. Может быть, вы справитесь и сами!

Обратите внимание, что на рисунке 4 не все 3-грани выглядят как кубики, некоторые – как параллелепипеды, и вовсе не прямоугольные: для примера мы раскрасили одну 3-грань (рис. 5). Это не беда, и в обычном рисунке трёхмерного куба не все грани – квадраты. Но если вас это расстраивает, можно рисовать посимметричнее, чтобы все 3-грани выглядели почти кубами – как на рисунке 6. Кто сколько тут видит кубиков?

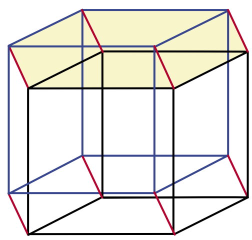


Рис. 5

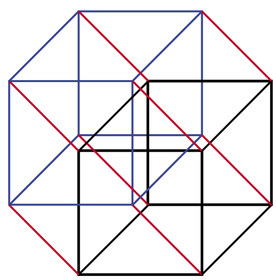


Рис. 6

Если вы не знаете, как подступиться к четырёхмерному кубику – вот пара задачек-подсказок, чтобы с ним познакомиться.

Задача 1. Сколько двумерных граней соединяет каждое ребро 4-куба? Сколько двумерных граней сходится в каждой вершине? А сколько трёхмерных граней? Выберите любую вершину и найдите все рёбра, 2-грани и 3-грани, которые в ней сходятся.

Задача 2. Выберем какую-нибудь грань четырёхмерного куба. Сколько есть граней, параллельных ей? (То есть лежащих на параллельных плоскостях.) Теперь выберем трёхмерную грань; сколько в 4-кубе 3-граней, параллельных ей?

Задача 3. Найдите на рисунке 4 как можно больше непараллельных 2-граней.

Решение задачи 0.

Первый способ – непосредственное усмотрение истины из нарисованной картинки. В ней ведь всё есть – и вершины, и рёбра, и все грани... Стоит лишь повнимательнее вглядеться. Но, действуя так, легко ошибиться – недосчитать что-нибудь или, наоборот, подсчитать дважды. Поэтому предлагаю другой способ.

Он основан на идее «подсчёт двумя способами», популярной в олимпиадной математике. Например: из трёх сестёр у каждой по 2 котёнка, а у каждого из котят – по 2 хозяйки; сколько всего котят? Можно представить себе, что каждая хозяйка надела на своего котёнка поводок, и сосчитать поводки. Вот и здесь можно считать двумя способами всё подряд – рёбра, грани...

Сначала всё-таки подсчитаем «в лоб» число вершин, вспомнив, как мы рисовали: у квадрата 4 вершины, у трёхмерного куба 8 (ещё 4 на дальней грани), для 4-мерного куба мы каждую из них продублировали. Итого $8+8=16$. Теперь заметим, что из каждой вершины 4-мерного куба торчит 4 ребра – достаточно проверить для ближайшего угла, они все одинаковы. Итого $16 \cdot 4$ кончиков рёбер. Но у каждого ребра 2 конца, значит, $n_{\text{вершин}} \cdot 4 = n_{\text{рёбер}} \cdot 2$; $n_{\text{рёбер}} = 16 \cdot 4 : 2 = 32$. Легче ведь так, чем подсчитывать по рисунку?

Теперь – опять глядя на ближайший угол картинки – можно сообразить, что к одному ребру «прикреплено» 3 грани. Две – из нашего старого кубика и ещё одна – уходящая «в неизвестность», в четвёртую сторону. А сколько рёбер у каждой грани, все знают; значит, умножая число рёбер на 3, мы каждую грань сосчитаем 4 раза. Дальше уж досчитайте сами! И не

забудьте ещё разобраться с 3-гранями – трёхмерными кубиками, из которых складывается 4-мерный куб.

Если вам не понравился этот способ или всё с ним ясно, но хочется понять, как решать и другие задачи про «четырёхмерье», вот ещё способ – координатный.

На плоскости можно выбрать две оси – вправо и вдаль, например, если эта плоскость горизонтальная, – и записывать положение любой точки двумя числами: (x, y). Вы так делали в школе. Или дома, играя в морской бой, только там одну цифру заменяют буквой. Эти два числа показывают, сколько надо пройти вдоль каждой оси, двигаясь из начала координат, чтобы прийти в нужную точку. Если добавить третью ось – вверх – и третье число z, можно этими тремя числами описывать положение точки во всём трёхмерном пространстве. А в четырёхмерном нужно ещё четвёртое число – назовём его u: оно показывает, на сколько надо сдвинуться в «ту», четвёртую сторону.

Теперь разберёмся с кубиками разных размерностей. Пусть длина стороны кубика равна 1, один из его углов находится в начале координат, а рёбра направлены вдоль координатных осей.

Тогда на плоскости координаты вершин квадратика – (0,0), (0,1), (1,0) и (1,1). А как устроены рёбра, то есть стороны квадрата? У каждого одна координата равна чему-то определённому – или 0, или 1, а другая меняется от 0 до 1, когда мы вдоль ребра идём.

В трёхмерном пространстве координаты всех вершин такого кубика – тоже нули или единицы; найдите на рисунке 7, например, вершину (0,0,1) или (1,1,0). А рёбра? У каждого ребра какие-то две из трёх координат «закреплены», а третья в одном его конце равна 0 и ползёт от 0 до 1 по мере движения по ребру к другому концу. Так что задать (указать) ребро – это назвать две его «неподвижные» координаты. С гранями похожая история, но теперь уже две координаты «бегают, как хотят» в пределах от 0 до 1, и только одна закреплена. Например, у передней грани куба на рисунке 7 координата y равна нулю. А у верхней – $z = 1$.

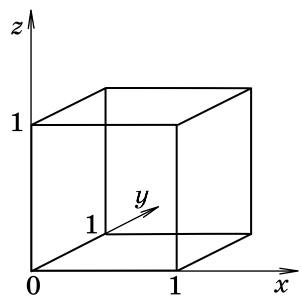


Рис. 7

Упражнение 1. а) Скажите, не глядя на картинку: соединены ли ребром куба вершины (0,1,0) и (0,0,1)? б) Каким ребром соединяются грани $x=1$ и $z=0$?

В четырёхмерном пространстве у каждой точки 4 координаты, (x,y,z,u). У каждой вершины куба каждая координата равна 0 или 1. У каждого ребра снова может «бегать», изменяться лишь одна координата, а остальные – теперь уже три – закреплены. У грани закреплены 2 координаты, а у 3-грани – всего одна.

Упражнение 2. Найдите на рисунке 8:

а) вершины (1,0,0,1) и (0,1,1,1);

б) ребро $x=0$, $z=1$, $u=1$;

в) грань $y=u=1$;

г) 3-грань $x=0$.

Упражнение 3. Какая грань раскрашена на рисунке 5?

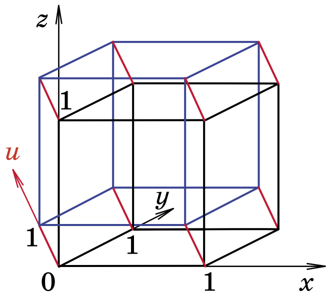


Рис. 8

Сколько всего вершин? – а столько, сколько разных четвёрок можно составить из цифр 0 и 1! А 3-граней? – столько, сколько есть способов выбрать одну из четырёх координат и дать ей значение 0 или 1, то есть $4\cdot 2=8$. А рёбер сколько? Столько, сколько есть способов убрать одну лишнюю «бегающую» координату, да умножить на число троек из цифр 0 и 1, то есть $4\cdot(2\cdot 2\cdot 2)=32$. Посчитать двумерные грани опять оставляем вам.

Конец решения задачи 0.

Вот ещё задачка, которую можно решить, помня об аналогии с рисованием 3-мерного кубика в двумерье:

Задача 4. У нас получился проволочный кубик. Какие из рёбер нужно нарисовать пунктирными или стереть, если мы хотим, чтобы наш 4-куб был непрозрачным для четырёхмерного наблюдателя?

Подсказка. Для четырёхмерных существ 3-кубик виден целиком, сразу со всех сторон. Так же, как мы из своего трёхмерья сразу целиком видим квадрат.

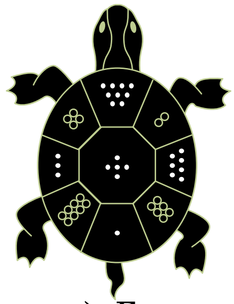
Задача 5. У трёхмерного кубика – двумерная (плоская) развёртка, то есть выкройка, из которой его можно сложить. Придумайте, как выглядит трёхмерная развёртка четырёхмерного куба.

Решение этой задачи обсудим в следующем номере.

Художник Мария Усеинова

Фёдор Нилов

МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ ЛО ШУ И КХАДЖУРАХО



Древний китайский магический квадрат Ло Шу представляет собой таблицу 3×3, заполненную цифрами от 1 до 9 так, что сумма цифр в каждой строке, каждом столбце и обеих диагоналях одна и та же. Попробуйте составить такой квадрат самостоятельно, не подглядывая на картинку справа (каждая цифра равна числу точек). Бытует легенда, что примерно в 2200 году до н.э. китайский император обнаружил эти точки на ячейках панциря черепахи на берегу реки Хуанхэ.

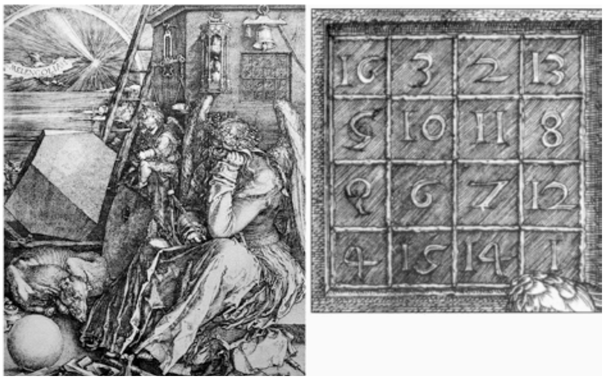
Поясним, как можно построить квадрат Ло Шу алгоритмически, не перебирая варианты. Для начала поймём, чему равна эта постоянная сумма, называемая *магической константой*.

Сумма всех чисел в таблице равна $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$. Тогда сумма чисел в каждой строке в три раза меньше: $45/3 = 15$. Заметим, что центральная клетка участвует в четырёх суммах (строка, столбец и две диагонали), угловая – в трёх суммах (строка, столбец и одна диагональ), а каждая из оставшихся боковых – в двух суммах (строка и столбец).

Где может стоять самое большое число, то есть 9? Мы должны дополнить 9 до 15 двумя различными слагаемыми. Это можно сделать лишь двумя способами: $1 + 5$ и $2 + 4$. Значит, 9 может находиться только в боковой клетке. Будем считать, что это верхняя боковая клетка. А сколько способов дополнить самое маленькое число 1? Тоже два: $9 + 5$ и $8 + 6$. Значит, 1 также стоит в боковой клетке, причём в нижней (ведь 1 и 9 входят в одну сумму). Тогда по центру автоматически стоит 5. В одной горизонтали с 9 стоят числа 2 и 4, пусть 2 слева, а 4 – справа. Далее квадрат заполняется однозначно.

Возможно, вы слышали про магический квадрат 4×4, его изобразил немецкий художник Альбрехт Дюрер на своей гравюре «Меланхолия». В этом квадрате расставлены числа от 1 до 16 так, что суммы чисел во всех строках, столбцах, двух диагоналях и четырёх «угловых» квадратах 2×2 равны одной и той же *магической константе*; а ещё одинаковы суммы любых двух чисел, симметричных относительно центра. Кроме того, в нижней строке можно прочитать 1514 – год создания гравюры.

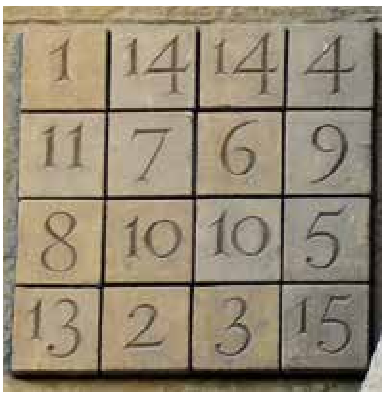
В храме Святого Семейства в Барселоне, построенном по проекту Антонио Гауди, есть почти магический квадрат, очень похожий на квадрат Дюрера (правда, в нём некоторые числа повторяются), в этом квадрате магическая константа равна 33, возрасту Иисуса. Отметим, что среди людей, интересовавшихся магическими квадратами, были как известные математики, такие как Леонард Эйлер, Артур Кэли, так и любители, например Бенджамин Франклин.



Квадрат Дюрера

Фото: C messier, Wikimedia Commons

Фото: Ad Meskens, Wikimedia Commons



Квадрат в храме Святого Семейства в Барселоне

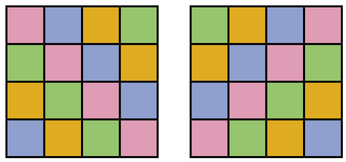
На плите храма в древнем индийском городе Кхаджурахо, датируемой XI веком н.э., был обнаружен ещё более удивительный магический квадрат, его называют *дьявольским*.

Фото: RainerTypke, Wikimedia Commons

Фото: Jean-Pierre Dalbéra, Wikimedia Common

Квадрат в храме Паршванатха в городе Кхаджурахо

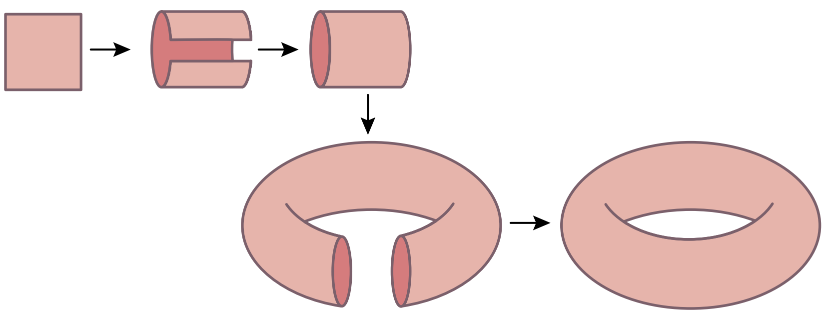
В клетках этого квадрата расставлены числа от 1 до 16 так, что одинаковы суммы во всех строках, столбцах, во всех девяти квадратах 2×2, двух диагоналях, а также всех *ломаных диагоналях*, называемых *пандиагоналями* (каждая такая диагональ состоит из четырёх клеток одного цвета на рисунке справа).



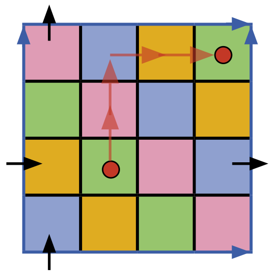
Диагонали и пандиагонали

Как же можно составить такой квадрат? Для начала поймём, чему равны все эти суммы. Если сложить числа в четырёх строках, получится сумма чисел от 1 до 16, то есть 136. Значит, сумма в одной строке равна $136 : 4 = 34$, это и есть магическая константа.

Второе соображение – рассматривать пары «противоположных» чисел 1 и 16, 2 и 15 и т.д. Куда их стоит поставить? Наверное, в «противоположные» клетки, но какие клетки считать противоположными? Чтобы это понять, сделаем из квадрата «бублик»: сначала склеим две противоположные стороны так, чтобы получился цилиндр, а потом склеим две противоположные окружности цилиндра так, чтобы получился бублик или на математическом языке – *тор*.



Склейка тора из квадрата

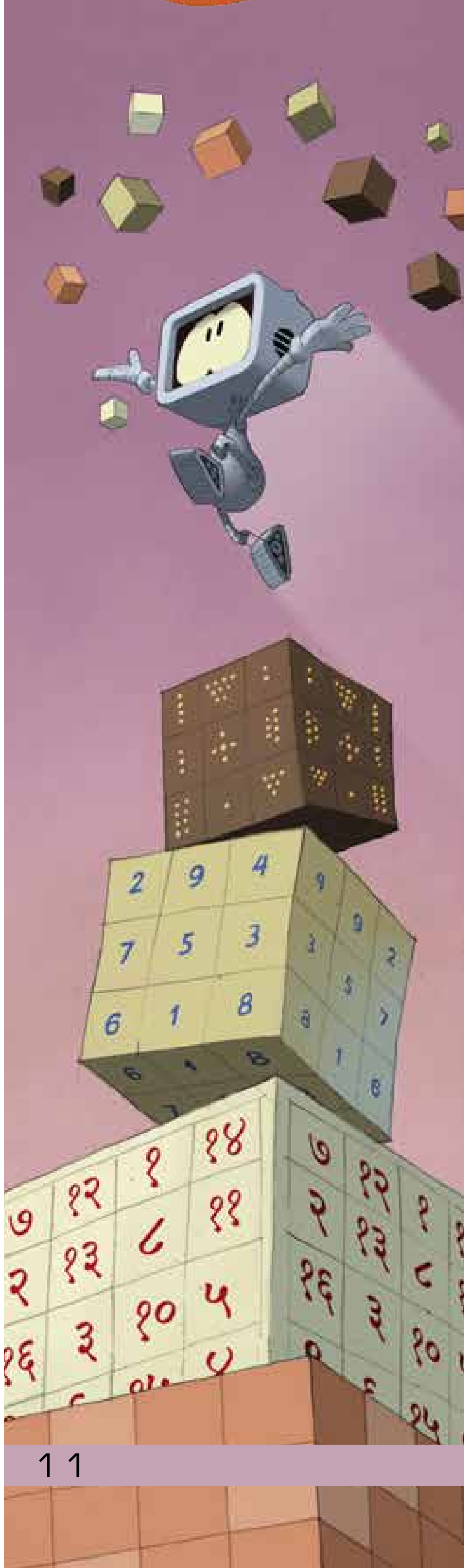

Прогулки по тору

Теперь у нашего магического квадрата нет края. Например, если мы стоим в левом верхнем углу и идём вверх, мы попадаем в левый нижний угол. Если стоим в синей клетке над правым нижним углом и идём вправо, попадаем в оранжевую клетку над левым нижним углом. Заметим, что на торе все строки, столбцы, диагонали и пандиагонали «замыкаются», причём диагонали и пандиагонали выглядят одинаково. Кроме того, образуются новые квадраты 2×2 (всего их будет 16). Оказывается, сумма чисел в этих новых квадратах автоматически будет равна магической константе. При этом на торе становится ясно, какие клетки считать противоположными. Давайте стартуем из любой клетки (на рисунке она помечена красной точкой) и пойдём на две клетки в вертикальном направлении (на рисунке идём вверх) и на две клетки в горизонтальном (на рисунке идём вправо). Заметим, что конечная клетка не зависит от того, вправо или влево, вверх или вниз мы идём. Эта клетка – противоположный угол квадрата 3×3. Таким образом, все клетки разбились на пары противоположных (углов квадратов 3×3), в которые мы будем ставить противоположные числа. Сумма чисел в каждой диагонали и пандиагонали равна сумме двух пар противоположных чисел, то есть $17 \cdot 2 = 34$, магической константе. Осталось проследить за тем, чтобы сумма чисел в каждой строке, столбце и квадрате 2×2 была такой же. Давайте поместим в двух противоположных клетках числа 1 и 16.

Заметим, что в клетках рядом с числом 16 не могут стоять 15 и 14: оставшиеся два слагаемых в сумме должны были бы давать 3 и 4 соответственно, но тогда одно из них равно единице, а она уже стоит в другом месте. Аналогично 15 и 14 не могут стоять в одной строке или столбце с 16. Для перебора остаётся не так много вариантов.

Задача. Определите, какие числа на каких местах стоят в квадрате из храма Паршванатха.

Художник Алексей Вайнер



Валерия Сирота

ТРИ ВИДА ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

Как передать энергию из одного места в другое, от одного тела – другому? Люди придумали передавать энергию механического движения посредством зубчатой передачи, как в механических часах – от колёсика к колёсику. Или энергию электрического тока – по проводам. А как передать тепловую энергию? Как нагретому телу поделиться с другими своим теплом? У природы на это целых три ответа, обсудим их.

Сначала поймём, почему закипает вода в кастрюле на плите. Это ясно: очень горячая конфорка передаёт тепло, то есть энергию, днищу кастрюли, а оно – воде.

А как это – «передаёт энергию»? Вообще энергия – это способность тела, её имеющего, совершить работу. Например, яблоко, висящее на дереве, имеет потенциальную энергию – оно может упасть кому-то на голову и сделать шишку. Быстро движущийся предмет может сломать или сдвинуть с места препятствие. У него есть энергия движения – кинетическая энергия.

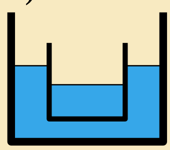
А что такое тепловая энергия? Посмотрев в очень-очень сильный микроскоп, мы увидим, что все молекулы в воде движутся – хаотически, ударяясь друг о друга и меняя направление. Их кинетическая энергия и есть тепловая энергия. Чем выше температура, тем быстрее движутся молекулы и тем больше тепловая энергия.

В равновесии у всех молекул энергия примерно одинакова. Если же рядом лежат, соприкасаясь, горячее тело и холодное, «быстрые» молекулы горячего тела толкают ближайшие «медленные» молекулы холодного, разгоняют их – передают им свою энергию. Те передают энергию дальше... И холодное тело постепенно нагревается. Это и есть **теплопроводность**.

Для такого способа передачи тепла нужна разница температур; ведь теплопроводность просто «старается» выровнять температуры.

Теперь мы готовы решить задачу о водяной бане.

Задача. В кастрюле с водой, стоящей на плите, плавает (или закреплена, но не касается дна) маленькая кастрюлька, тоже с водой. Вода в большой кастрюле кипит. А в маленькой – проверьте вместе со взрослыми! – нет. Даже если накрыть крышкой и долго



ждать. Почему она не закипает? Когда же закипит наконец, что для этого должно произойти? А что изменилось, если маленькая кастрюля – воображаемая?

Вода в большой кастрюле нагревается до 100 °C за счёт энергии от плиты. Энергия поступает и дальше, но температура воды не растёт, пока вся вода не испарится: энергия тратится на образование пара, «отрыв» молекул от остальной воды. Чем сильнее греет плита, тем быстрее испаряется и активнее кипит вода.

А что происходит в маленькой кастрюле? Энергия к ней передаётся от воды в большой кастрюле через стенки, посредством теплопроводности. Пока вода в большой кастрюле горячее, чем в маленькой, она нагревает её стенки, которые, в свою очередь, нагревают воду в маленькой кастрюле. Но когда температура там достигает 100 °C, передача энергии прекращается: всё и так в равновесии. А на закипание, на отрыв испаряющихся молекул тоже нужна энергия. Вот вода в маленькой кастрюле и не может закипеть.

Как же заставить её закипеть? Честно говоря, практически никак. Если маленькая кастрюля плавает, надо дождаться, когда вода выкипит настолько, что маленькая кастрюля опустится на дно. Тогда тепло начнёт поступать к ней прямо от плиты, и есть шанс закипеть. Конечно, большую кастрюлю мы при этом безвозвратно испортим – «перекалим». Если же маленькая кастрюлька закреплена, вода в ней никогда не закипит. Но вот если бы большая кастрюля была не кастрюля, а автоклав, то есть плотно, без щелей закрывалась, да ещё имела бы клапан, чтобы стравливать пар при давлении больше некоторого заранее определённого, – тогда можно было бы дождаться, пока в этом автоклаве выкипит *вся* вода; после этого пар стал бы нагреваться дальше, его температура поднялась бы выше температуры кипения, тепло снова стало бы переходить от него к маленькой кастрюле, и она бы вмиг закипела!

Что изменится, если убрать стенки кастрюли? Почему внутри «воображаемой кастюли» вода спокойно кипит? Ведь она, как и вода вокруг неё, имеет температуру 100°, и передачи энергии теплопроводностью не может быть? Её и нет, но есть другой механизм теплопередачи – **конвекция**. Вода, как и почти всё, расширяется с ростом температуры. (Исключение –

Художник Мария Усеинова

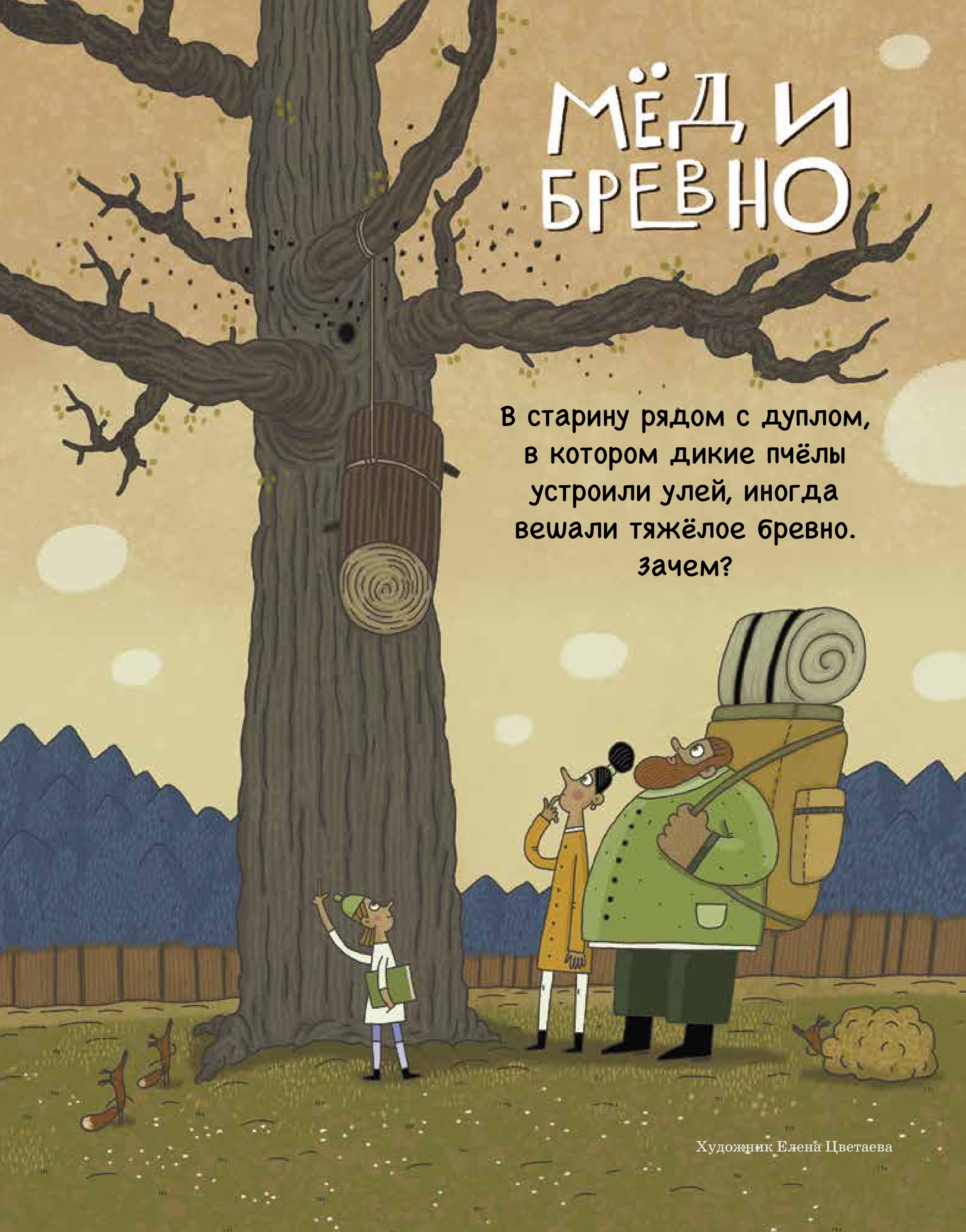
вода при низких температурах, от 0 °С до 4 °С. Там, наоборот, с ростом температуры плотность воды растёт.) Нагрев воды плитой происходит неравномерно. Нагреваясь, «кусок» воды расширяется и становится легче своих соседей, то есть менее плотным. По закону Архимеда, он «всплывает», а более холодные «куски» воды опускаются вниз. Это и есть конвекция. «Кусок» – это не отдельные молекулы, а хорошо заметные глазу объёмы воды; они образуют струйки, текущие в нагреваемой жидкости вверх (более горячие) и вниз (более холодные). В отличие от теплопроводности, конвекцию можно видеть глазом, особенно если подкрасить воду маленьким количеством марганцовки или краски. Именно эти струи перемешивают всю воду в кастрюле, передают энергию от плиты, от днища кастрюли во все её участки. И чем горячее вода, тем интенсивнее конвекция: а когда вода начинает закипать, поднимающиеся в ней пузыри ещё сильнее её перемешивают. Так что можно и так сказать про отсутствие кипения в настоящей маленькой кастрюле: её стенки уничтожают конвекцию, а вместе с ней – доставку энергии к заключённой в них части воды.

Вот решение и кончилось. Но не кончились способы теплопередачи! Есть ещё способ, которым пользуется, например, Солнце. Действительно, как передать тепло, если между «источником» и «приёмником» энергии вообще нет вещества и они не соприкасаются? Третий способ – **излучение**. Солнце излучает свет, то есть испускает световые частицы – фотоны; они тоже содержат понемножку энергии. Те из них, что летят в сторону Земли, попадают к нам в глаз, на наши руки-ноги, на траву и дома – и исчезают, отдав свою энергию. Поэтому загорать на солнышке тепло, даже когда вокруг холодный воздух: мы ловим солнечные фотоны, и они нас греют. Так же передаётся к нам тепло и от костра. Замечали? – воздух-то холодный вокруг: теплопроводность у него плохая, конвекции вбок нет, и фотоны его почти не греют. А лицу и рукам даже горячо.

Вода же в котелке над костром нагревается в основном конвекцией: горячий воздух от костра поднимается вверх. А земля под костром прогревается за счёт теплопроводности… Так что в одном и том же явлении могут участвовать все три типа передачи тепла.

МЁД И БРЕВНО

В старину рядом с дуплом, в котором дикие пчёлы устроили улей, иногда вешали тяжёлое бревно. Зачем?



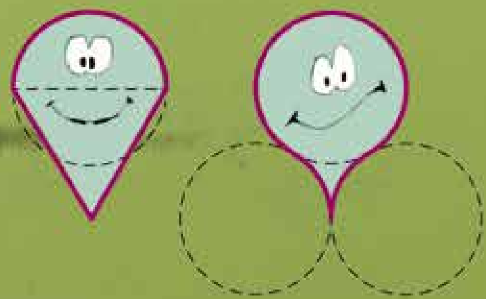
Художник Елена Цветаева

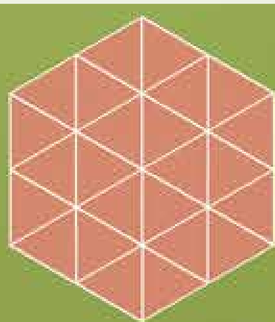
Егор Бакаев

СНОВА О ЛУНОЧКАХ

В номерах 2 и 3 «Квантика» за 2022 год был рассказ о луночках Гиппократа. Предлагаем вам несколько задач на эту тему: про площади сегментов, луночек и других фигур, границы которых – отрезки и дуги окружностей. Для их решения надо понимать, как относятся друг к другу площади кругов с разными радиусами – об этом написано в упомянутой статье. Рекомендуем её прочитать!

1. Сравните площади двух изображённых на рисунке «головастиков» (четыре окружности на рисунке – одного радиуса, треугольник – равносторонний, горизонтальная сторона этого треугольника – диаметр окружности).

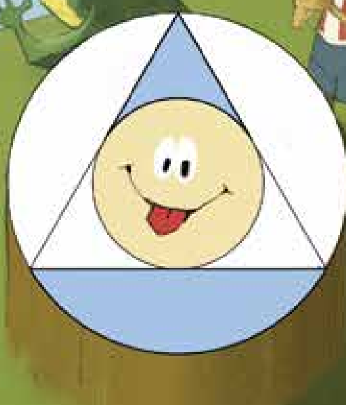


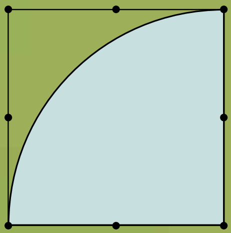


Для решения полезно изобразить эти фигуры на сетке из равносторонних треугольников.

2. В равносторонний треугольник вписана окружность и около него описана окружность. Докажите, что площадь светло-синей части равна площади вписанного круга.

Узнать, как соотносятся размеры вписанной и описанной окружности равностороннего треугольника, снова поможет треугольная сетка!





3. Сектор круга расположен в квадрате, как на рисунке. Отмечены вершины и середины сторон. Проведите одну линию циркулем так, чтобы она разбила этот сектор на две равные по площади части. Найдите три способа это сделать.

Как обычно в задачах на построение, *циркуль* – инструмент, которым можно проводить окружность заданного радиуса с центром в данной точке; радиус задаётся концами отрезка.

Для решения хочется провести диагональ квадрата (из левого верхнего угла в правый нижний). Тогда сектор разделится на два одинаковых. Но, увы, так как линейки нет, провести никакой отрезок нельзя – можно проводить лишь дуги окружностей.

4. На плоскости дан квадрат площади 1.

а) С помощью циркуля (без линейки) постройте фигуру площади 2.

б) Как циркулем для каждого натурального числа n построить фигуру площади n? (Граница фигуры должна быть одной замкнутой линией без самопересечений.)

Число линий не ограничено. Подумайте сначала, какие «хорошие» точки можно построить, имея квадрат.

Ответы в следующем номере

Художник Алексей Вайнер

Математический кружок

Артемий Соколов

Диаграммы Вороного

Придя домой после школы, Петя обнаружил, что мама купила ему в подарок новый набор цветных карандашей. Как же ему не терпелось их все испытать! Петя взял белый лист бумаги и каждым карандашом отметил по одной точке. Хм, пишут! Этого ему оказалось мало, и он захотел раскрасить весь лист.

– Но как сделать так, чтобы было красиво и интересно? – задумался Петя. – Наверное, рядом с каждой точкой должны быть точки такого же цвета, правда? Иначе будет рябить в глазах.

И Петя решил сделать так: выбирая каждую точку, надо покрасить её в тот же цвет, что и самая близкая к ней изначальная точка.

– Да, тогда, наверное, будет меньше всего пестрить в глазах. Хм, а у каких-то точек сразу две ближайшие... Возьму для них простой карандаш!

Потратив полчаса на раскрашивание листа бумаги, Петя получил такую картинку (рисунок справа).

– А вроде бы красиво, надо маме похвастаться! – И Петя понёс рисунок маме.

– Мама, смотри, что я нарисовал!

– Ух ты, разбиение Вороного, здорово!

– Воро... кого?

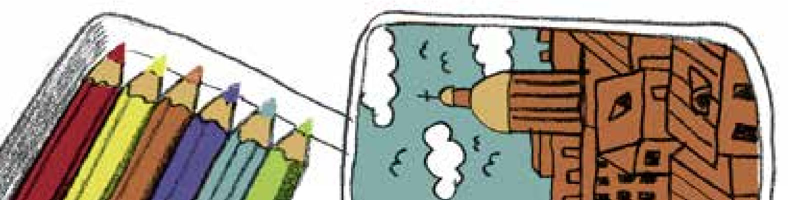
– Был такой замечательный математик, Георгий Феодосьевич Вороной. Он жил во второй половине XIX века, в честь него названы такие же картинки, как у тебя. Они называются *разбиениями* или *диаграммами Вороного*. Долго рисовал?

– Как со школы вернулся.

– Долго! Давай покажу, как это сделать проще. Кстати, ничего удивительного не заметил на картинке?

– У меня вроде получилось, что у частей прямые границы. А почему так?

– Смотри, давай сначала отметим две точки, назовём их A и B. Теперь проведём серединный пер-



пендикуляр к отрезку AB. Это такая прямая, которая проходит через середину AB и идёт перпендикулярно отрезку. Видишь, он делит весь лист на две части?

– Ага.

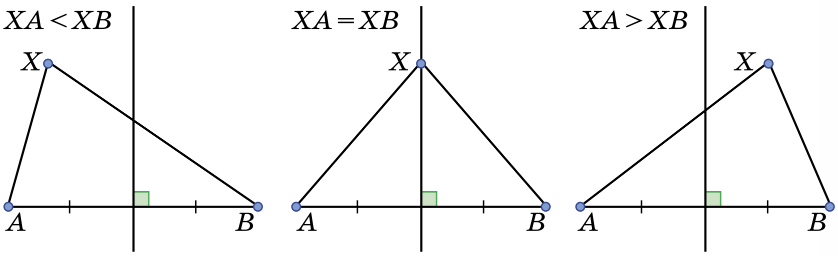
– Если мы возьмём точку X в той же части, что и точка A, то отрезок XA будет по длине меньше отрезка XB. Если, наоборот, мы возьмём точку X в той же части, что и точка B, то тогда отрезок XA будет больше отрезка XB.

– А если X лежит на самом перпендикуляре?

– Тогда отрезки XA и XB равны.

– А, я понял, это как раз разбиение Вороного для точек A и B, да?

– Именно так!

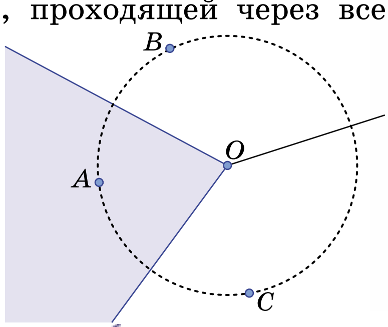


– Теперь попробуем взять три точки A, B и C. Если мы хотим покрасить точку X в такой же цвет, что и A, у нас должны выполняться одновременно неравенства $XA < XB$ и $XA < XC$. Для этого надо пересечь серединные перпендикуляры к AB и AC и взять соответствующую область – это будет часть, содержащая точку A. Чтобы получить всё разбиение Вороного, надо провести все три перпендикуляра.

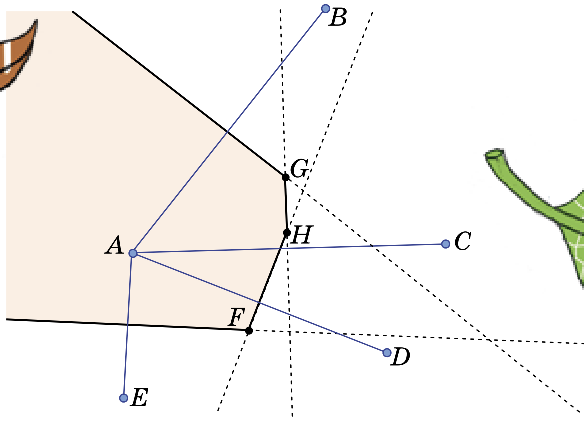
– Ой, у тебя серединные перпендикуляры в одной точке пересеклись, это всегда так?

– Да! Про это даже есть теорема в любом школьном учебнике геометрии. А точка пересечения будет ещё и центром окружности, проходящей через все вершины треугольника.

Теорема. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром его описанной окружности.



– Теперь давай возьмём сразу много точек и одну из них назовём A. Посмотрим на серединные перпендикуляры тех отрезков, один конец которых совпадает с A. Каждый такой перпендикуляр делит плоскость на две половины. Возьмём все половины, содержащие A, и пересечём их. Часть с точкой A готова.



– Ух ты, получается прямо моя картинка! И я даже понял, как это доказать.

Докажите, что картинки у Пети и мамы совпадут.

– Интересно, что диаграммы Вороного можно увидеть в неожиданных местах: на панцире черепахи, на коже жирафа, в кронах деревьев и даже на листьях дерева. Как пойдём гулять, обязательно покажу.

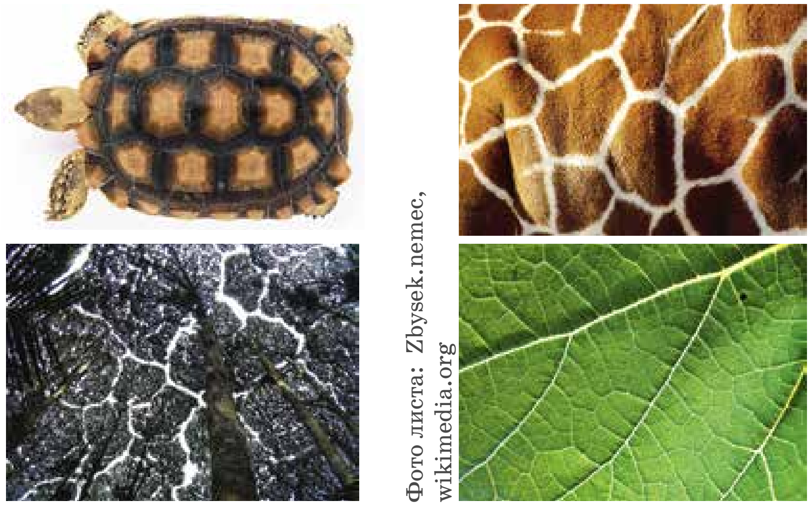


Фото листа: Zbysek.nemec, wikimedia.org

– Здорово! – обрадовался Петя и решил ещё порисовать диаграммы Вороного. Попробуйте и вы (например, по ссылке kvan.tk/voronoi-demo онлайн)!

Подумайте, почему на фотографиях, помещённых выше, появляются диаграммы Вороного.

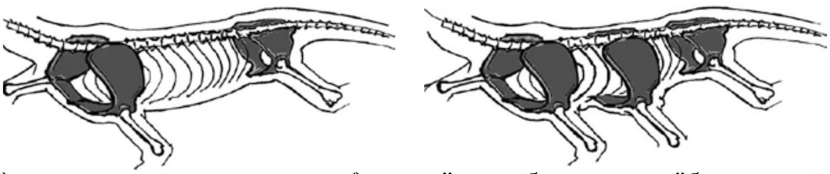
Художник Артём Костюкевич

СКОЛЬКО ЛАП У ДРАКОНА?

В издательстве МЦНМО вышла книга А. Н. Квашенко – о том, могла ли эволюция создать дракона. Как ему удавалось бы летать, выдыхать огонь, иметь непробиваемую для клинков кожу... По ссылке kvan.tk/drakonistika можно найти лекции автора, мы же приводим фрагмент книги.

С точки зрения зоолога, крылья у дракона совершенно неправильные: не передние конечности и даже не задние, а какие-то средние. Коль скоро за сотни миллионов лет эволюции тетраподы (четвероногие) не дали нормальной шестиногой формы, то, скорее всего, с ней что-то не так. Впрочем, варианты развития с изменённым числом конечностей у тетрапод известны. Это «казусы природы»: пятиногий телёнок, четырёхногий цыплёнок. Если с пятой ногой всё понятно (она как пятое колесо в телеге – проку никакого, а управлять сложнее), то что плохого в шестилапости?

Одна из возможных причин нереализуемости этого варианта, вероятно, связана с **поясами конечностей**. Они образуют своего рода скелетные кольца, обеспечивающие крепление конечностей (рис. 1, а). Сквозь эти кольца проходит полость тела, несущая внутренние органы. Со спинной стороны кольца связаны с позвоночником. При такой конструкции третий пояс будет блокировать движения рёбер, необходимые для вентиляции лёгких, или приводить к изменению самого механизма вентиляции (рис. 1, б). А это уже чрезвычайно серьёзно, так как затронет то, в какой степени ткани будут снабжены кислородом.



а) нормальное строение тела

б) третий пояс блокирует рёбра, возникает проблема с вентиляцией лёгких

Рис. 1. Сложности с третьим поясом конечностей

Возвращаясь к драконам, вспомним, что именно работающие **крылья** будут угрожать разрушением рёбер. Поскольку для обеспечения полёта мускулатуре потребуется очень много кислорода, вентиляция лёгких должна не ухудшиться, а улучшиться.

Похоже, объединить все черты дракона в одном существе – та ещё головная боль. Как запрячь в одну телегу коня и трепетную лань? Попробуем выделить черты, максимально настораживающие профессионального биолога. Это шестилапость, огнедыхание и многоголовость. В двух случаях из трёх речь идёт об увеличении нормального числа частей тела. Кажется, кое-что на эту тему вспоминается, если обратиться к истории пресловутых «казусов природы». Это «кое-что» называется **эмбриональным сращиванием**, а попросту говоря – это «сиамские близнецы»!

На раннем эмбриональном этапе близнецы оказываются прижаты друг к другу, после чего срастаются. Их симметричное сращение вовсе не обязательно. Те сиамские близнецы, которых показывают по телевизору и отделяют друг от друга, – самый простой случай. Они чуть-чуть срослись покровами и мышечной тканью. А ведь бывают примеры глубокого сращения, когда, допустим, один эмбриончик развился нормально, а второй, приросший к нему, оказался зажатым и от него развилась одна рука. Или голова.

У человека близнецы рождаются редко, а вот для броненосцев – это видовая норма. Самочки у них рожают только четверни. Впрочем, броненосцы – млекопитающие, и развитие эмбрионов у них происходит в матке, тогда как рептилии в большинстве своём всё-таки откладывают яйца. Представим, что у папы или у мамы имелась мутация, при которой в яйце всегда развивается три эмбриона. Для тройни в яйце места не хватит, поэтому они начинают прирастать друг к другу.

Тела их объединяются так, что центральный эмбрион развивается полностью, а у двух его боковых партнёров получается сформировать только переднюю половину тела (рис. 2). Кроме того, боковые партнёры симметрично сдвинуты назад на несколько *сомитов*[1] по отношению к центральному. При такой компоновке у центрального тела успешно проходит закладка всех осевых структур, а сразу за передней третью тела хорда и нервная трубка объединяются с осевыми структурами партнёров. При дальнейшем развитии у центрального эмбриона успешно заклады-

[1] Сомит – это сегмент тела зародыша.

ваются голова, туловище, хвост, лапы, формируется полость тела со всем набором внутренних органов.

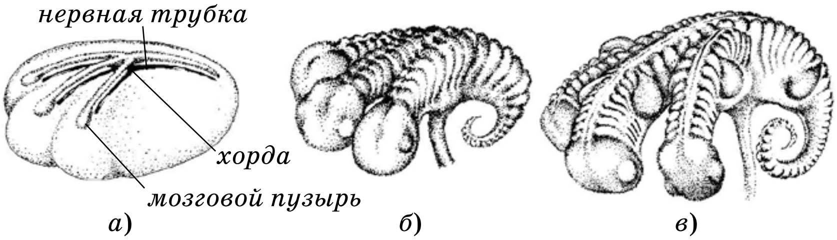


Рис. 2. Эмбриональное развитие дракона: *а*) три сросшиеся гаструлы – начало закладки осевых систем; *б*) закладка сомитов – хвост один, а передних разделов тела три; *в*) образование почек конечностей

А вот у боковых тел возникает масса проблем. Нормально формируются головы и шеи. Задние половины туловища, задние лапы и хвосты не развиваются, а в передних половинах возникает асимметрия. Следовательно, органы, расположенные со стороны центрального тела, нормально развиваться тоже не могут. Боковые тела, прирастая к центральному, как бы косо срезаны от плеча и до середины туловища. Посмотрим, что и как в них может сложиться. С осевыми органами примерно до пупка всё в порядке, поэтому пищевод, желудок и начало кишечника строятся нормально; дальше три кишечника объединяются (рис. 2).

Сердца имеют срединную закладку, поэтому тоже формируются как положено. Крупнейшие кровеносные сосуды – аорты и нижние полые вены – сливаются в районе пупка. А вот из двух лёгких нормально формируется одно; второму помешает центральное тело. То же происходит с почками конечностей, из которых у боковых тел развивается по одной лапе.

Если такой сценарий пройдёт до конца, на выходе мы получим рисунок 3. Узнаёте? Три головы, шесть лап. Каждая средняя лапа связана со своим поясом конечности. Конечно, пока это никакой не дракон: ни крыльев, ни огнедыхания, и какая уж мудрость... Остаётся выяснить пустяк: с какой стати средние конечности у него превратились в крылья и как это чудище не то что летает, но хотя бы умудряется выжить?

Рис. 3. Протодракон. Боковые лапы поджаты вверх, чтобы не мешали. Головы уложены – он отдыхает

Художник Алексей Вайнер

Игры и головоломки

Николай Авилов

«Пятнашки» с перегородками

Наверняка вам приходилось «гонять» фишки с числами в квадратной коробочке. Это головоломка «15», или, как её в народе ласково называют, «Пятнашки». Игра представляет собой набор из 15 квадратных фишек с числами от 1 до 15, помещённых в квадратную коробку 4×4 (рис. 1). За счёт одного свободного поля фишки можно перемещать, вследствие чего головоломка легко запутывается. Цель – восстановить исходную расстановку.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Рис. 1

Долгое время считалось, что головоломку придумал известный американский шахматист и автор головоломок Сэм Лойд. Но сейчас достоверно установлено, что «Игру в 15» изобрёл Ной Чепмэн, почтмейстер из американской деревушки штата Нью-Йорк в 1874 году. «Безумную» популярность головоломке придала публикация в «Нью-Йорк таймс»: газета обещала денежный приз первому, кто упорядочит фишки из состояния, в котором переставлены только фишки 14 и 15. Автор публикации ни капельки не рисковал своими деньгами, ведь он «раскусил» секрет головоломки. Оказывается, из всевозможных расстановок (их больше 20 триллионов!) ровно половину не удастся упорядочить.[1] К этой половине относится и газетная расстановка фишек.

Головоломка популярна до сих пор, «Пятнашки» можно купить во многих

[1] Доказательство этого факта можно прочитать по ссылке kvan.tk/shen-perm в вышедшей недавно книге А. Шеня «Перестановки» (М.: МЦНМО, 2022).

интернет-магазинах и даже бесплатно поиграть в онлайн-режиме. Правда, когда раскусишь секрет головоломки, играть с ней становится неинтересно. Но головоломке можно придать «второе дыхание», немного изменив её.

Изменение очень простое: в коробке нужно установить три тонкие перегородки (например, полоски из тонкого картона) между парами 2 – 3, 6 – 7, 10 – 11, 14 – 15 (рис. 2). Эти ограничения на передвижение фишек по вертикали неожиданно превращают головоломку в новую. Её легко запутать, но упорядочить обратно совсем не просто. Поиграйте и убедитесь, что теперь головоломка стала «крепким орешком»!

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Рис. 2

А вот две конкретные задачи для новой игры (вторая – сложная).

1. Из первоначальной расстановки фишек получите «обратную» расстановку, где каждая фишка занимает поле, центрально-симметричное исходному (рис. 3).

2. Пусть пустому полю соответствует число 0. Добейтесь расположения, в котором фишки образуют магический квадрат 4 × 4 с суммой 30 (рис. 4). Известное нам решение очень длинное.

	15	14	13
12	11	10	9
8	7	6	5
4	3	2	1

Рис. 3

10	9	7	4
6	5	11	8
1	2	12	15
13	14	0	3

Рис. 4

Художник Екатерина Ладатко

XXXI ТУРНИР АРХИМЕДА, ЗИМНИЙ ТУР: ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ

Материал подготовили Оксана Данченко, Екатерина Лысёнок и Анатолий Обрубов

Турнир Архимеда – традиционная олимпиада для 6 – 7 классов, но в ней принимают участие и более младшие школьники. Очередной Турнир прошёл 30 января 2022 года в 142 школах Москвы, Московской области, Белгорода, Владивостока, Вологды, Екатеринбурга, Иваново, Казани, Кирова, Костромы, Магнитогорска и Оренбурга, участников было около 7000.

Вот несколько задач. В первой требовался только ответ, а в остальных – полные решения. Подробности и все задачи турнира – по ссылке **www.arhimedes.org**

Художник Сергей Чуб

1 (6 баллов). Найдите какое-нибудь натуральное число, кратное 2^{14} (произведение четырнадцати двоек) и читаемое одинаково слева направо и справа налево.

2 (7 баллов). В замке живут рыцари (всегда говорят правду) и лжецы (всегда лгут). Известно, что все жители разного возраста и количество золотых монет у всех разное. Каждый житель замка высказал два утверждения: 1) «*Нет трёх жителей старше меня*», 2) «*Хотя бы у пяти жителей больше золотых монет, чем у меня*». Могло ли это быть? Если да, сколько жителей могло быть в замке (укажите все ответы)?

3 (8 баллов). Домики Винни-Пуха (ВП), Пятачка (П) и Кролика (К) стоят на берегу круглого озера, вокруг которого проложена тропа. В понедельник П вышел из дома в 10:00, а ВП в 10:40. Друзья пошли в гости к К и добрались до места в 12:00 (при этом мимо домов друг друга они не проходили). На следующий день ВП вышел в 10:00, а П в 10:20, и пошли они в направлениях, противоположных тем, которые были у них в понедельник. Во вторник ВП и П встретились у домика К в 12:00. Встречались ли они, пока шли по тропе? Скорости ВП и П не обязательно равны между собой, но одни и те же во все дни.

4 (8 баллов). В кладовой Царя Гороха (ЦГ) лежат 2007 мешков с монетами, в каждом ровно 2022 монеты. Мешки пронумерованы различными числами от 1 до 2007. ЦГ выбирает один из мешков и перекладывает из него по одной монете в мешки с номерами большими, чем у выбранного. Иван Царевич (ИЦ) имеет право указать номера нескольких мешков, а ЦГ сообщает ему, сколько всего монет оказалось в указанных мешках после перекладывания (в сумме!). Сможет ли ИЦ определить номер выбранного ЦГ мешка?

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ

Решения IV тура отправляйте по адресу ruskonkurs@kvantik.org **не позднее 20 августа**. В письме укажите ваши имя, фамилию, город, школу и класс, где вы учитесь. Победителей ждут призы, предусмотрены премии за лучшее решение отдельных туров. Предлагайте задачи собственного сочинения – лучшие будут опубликованы. Так, шестиклассник Севастьян Ушаков уже не впервые выступает в нашем конкурсе в качестве автора.

IV ТУР

16. Дима насмотрелся страшилок, выпросил себе мягкую игрушку-зомби и теперь с ней не расстаётся. Только дедушка ворчит: «Что за мода ПРОПУСК?» Заполните пропуск двумя одинаково выглядящими словами.

И. В. Гимон

17. – Взрослые обычно лучше знают, что надо делать, – строго сказал папа. – Ведь у взрослых ИКС есть.

– ИГРЕК? – с иронией переспросила маленькая Маша. – Откуда это у взрослых ИГРЕК? ИГРЕК же у...

У кого есть ИГРЕК?

Б. Л. Гуревич

18. Для гласных максимум равен 3 и достигается в конце. Чему равен максимум для согласных?

И. Б. Иткин

19. Если в прилагательное, характеризующее бережливого человека, хорошего хозяина, добавить *сто*, получится прилагательное, имеющее практически противоположное значение. Напишите оба прилагательных.

А. Л. Леонтьева

20. Если в Прилагательное 1 добавить *сто*, получится Прилагательное 2. В Прилагательном 2 корней в два раза больше, зато суффикс в три раза короче. Прилагательное 1 часто сочетается со словом *том*, Прилагательное 2 – со словом *дом*.

Напишите Прилагательное 1 и Прилагательное 2.

С. А. Ушаков

Художник Николай Крутиков

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ, III тур («Квантик» № 5, 2022)

11. *АЛЬФУ иногда бывает нужно сократить. ГРОМКАЯ АЛЬФА иногда здорово мешает спать. Какие слова мы заменили на ГРОМКАЯ АЛЬФА?*

Как известно каждому читателю «Квантика», сократить иногда бывает нужно *дробь*. А дробь, которая иногда здорово мешает спать, – это, конечно, ***барабанная дробь***.

12. *Одна не слишком грамотная деревенская старушка записывала название учреждения, где работала её дочь, заменяя две буквы на конце буквой* Ч. *Напишите это название правильно.*

Звук [ч] представляет собой нечто вроде слитно произнесённого [тш]. Правда, на *-тш* не то что названия учреждений – вообще никакие русские слова не заканчиваются. Но вспомним, что согласные на конце слова в русском языке оглушаются: конечное [тш] вполне может получиться из *-дж*. А на *-дж* как раз заканчивается хорошо известное название учреждения: ***колледж***.

(Строго говоря, русское [ч] – это не простое слитное [тш], а мягкое. Но на такие тонкости старушка внимания не обратила.)

13. *Если человеку не* X, *можно точно сказать, что ему ничего не* Y. X *и* Y *– возвратные глаголы в форме настоящего времени, различающиеся одной буквой. Найдите* X *и* Y.

Если уж человеку *не* ***спится***, ему совершенно точно ничего *не* ***снится***.

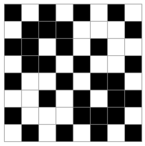
14. *В древнерусском языке некий глагол имел два противоположных значения. В современном языке сохранилось только одно из них – «забыть». Какое прилагательное доказывает, что раньше у этого глагола было и противоположное значение?*

Синоним к слову *забыть* – глагол *запамятовать*. Прилагательные *памятный* и *памятливый*, конечно, не дают никакой информации о значении глагола *запамятовать*: они не имеют приставки *за-* и, стало быть, не образованы от этого глагола. Но есть прилагательное ***незапамятный***: *незапамятные времена* – такие давние времена, что их невозможно запомнить.

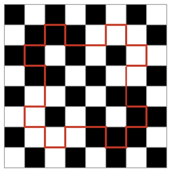
15. *На юмористической картинке, опубликованной в сообществе начинающих поэтов, молодой человек поглощает содержимое подушки. Какими двумя словами подписана эта картинка?*

Картинка подписана словами **«Проба пера»**. «Пробой пера» называют первое, обычно ещё незрелое сочинение начинающего автора. Ну а молодой человек на картинке «пробует перо» в буквальном смысле слова.

НАШ КОНКУРС, IX тур («Квантик» № 5, 2022)



41. *Есть бракованная шахматная доска* 8×8 *с неправильной раскраской (см. рисунок). Можно ли разрезать её на две части и склеить из них доску с правильной шахматной раскраской (соседние по стороне клетки должны быть окрашены в разный цвет)?*

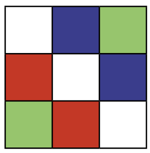


Ответ: нужно вырезать центральную часть доски, ограниченную красной линией (см. рисунок), и повернуть её на 90°. Заметьте, что мы обязаны были сделать разрез между каждыми двумя соседними клетками одного цвета, и наша линия как раз состоит из всех таких разрезов.

42. *На экране компьютера горит число* 2022. *Существует ли такое натуральное число* N, *что сколько бы раз ни вставить его в середину между цифрами* 0 *и* 2, *число на экране компьютера всегда будет делиться на* 2022?

Ответ: да. Например, подойдёт $N = 2220$: получится число вида $2022202220\ldots222022$, которое, очевидно, делится на 2022.

43. *а) В каждой клетке квадрата* 3×3 *лежит монета. Некоторые монеты фальшивые (весят одинаково, но легче настоящих), остальные – настоящие (тоже весят одинаково). Известно, что фальшивые монеты занимают целиком либо строку, либо столбец, либо диагональ. Как за одно взвешивание на чашечных весах без гирь найти хоть одну фальшивую монету? б) Решите ту же задачу для квадрата* 9×9, *если разрешено сделать два взвешивания.*



а) На одну чашу положим монеты из синих клеток, а на другую – из красных (см. рисунок). Если чаши в равновесии, то либо все эти монеты настоящие, и тогда фальшивые занимают одну из диагоналей, поэтому монета в центре – фальшивая, либо в каждой паре ровно одна фальшивая монета, причём они занимают средний столбец или среднюю строку – и снова монета в центре фальшивая.

Если же одна из чаш легче, то в ней одна монета – фальшивая, и соседняя с ней зелёная клетка тоже занята фальшивой монетой.

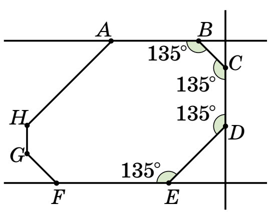
б) Разделим квадрат 9×9 на 9 квадратов 3×3. В каждый из них попадут либо 3 фальшивые монеты, либо ни одной, и квадраты с фальшивыми монетами будут «в одном ряду» (по вертикали, горизонтали или диагонали). Применим к квадратам предыдущий алгоритм: только на чашу кладём все 9 монет соответствующего квадрата. Так мы найдём одним взвешиванием квадрат 3×3, в котором есть фальшивые монеты, и в нём они тоже займут строку, столбец или диагональ. Вторым взвешиванием, как в п. а), найдём в нём фальшивую монету.

44. *Десять раков-отшельников живут в раковинах. Все раки разного размера, и чем больше рак – тем больше его раковина. Раки растут с одинаковой скоростью и хотят менять раковины на более просторные. Если они нашли пустую раковину, её забирает самый большой рак из тех, у кого раковина меньше этой (если такой рак найдётся). В его прежнюю раковину селится следующий (меньший) по размеру, в раковину этого рака – следующий по размеру и т.д. Оставшаяся раковина выбрасывается. Через некоторое время не осталось ни одной раковины из первоначальных. Обязательно ли каждая имеющаяся раковина больше каждой из первоначальных?*

Ответ: да. Каждый раз, найдя новую раковину, раки выбрасывают самую маленькую из имеющихся 11 раковин. Рассмотрим самую большую раковину из первоначальных. Когда её выбросили, все остальные имевшиеся в тот момент 10 раковин были больше неё, а значит, больше и каждой из первоначальных раковин. Дальше это свойство, очевидно, сохранится.

45. *В выпуклом восьмиугольнике ABCDEFGH все углы равны. Внутри него выбрали произвольную точку O. Докажите, что сумма расстояний от точки O до прямых, содержащих стороны восьмиугольника, не зависит от выбора точки O.*

Докажем, что противоположные стороны восьмиугольника параллельны. Так как все его углы равны, каждая следующая сторона поворачивается относительно предыдущей на один и тот же угол. Пройдя полный цикл по всем 8 сторонам, мы сделаем один полный оборот (на 360°) и вернёмся к исходной стороне. Значит, пройдя 4 стороны, мы сделаем ровно пол-оборота, то есть повернёмся на 180° и получим сторону, параллельную исходной.



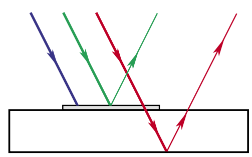
Но тогда перпендикуляры из точки O к двум противоположным сторонам восьмиугольника образуют прямую линию, а сумма их длин равна расстоянию между параллельными прямыми, которое не зависит от выбора точки O, лежащей между ними. Поэтому и сумма длин всех восьми перпендикуляров не зависит от выбора точки O.

УДИВИТЕЛЬНЫЕ ФЛОМАСТЕРЫ
(«Квантик» № 6, 2022)

1. Мама хитрого Васи увидит в дневнике чёрную цифру «5» на красном фоне. А цифры «2» не увидит вообще. Синий свет, отражённый пятёркой, не пройдёт через красное стекло – эта оценка будет выглядеть чёрной. Из белого света, отражённого бумагой, стекло пропустит только красный – этот цвет и будет иметь страница дневника. Такой же цвет будет и у двойки, поэтому она не будет видна – если нарисована достаточно бледно. А вот если ручка учителя была ярко-красной, затея Васи может и не удаться. Двойку в этом случае, скорее всего, можно будет разглядеть – у неё будет другой (не такой, как у бумаги) оттенок красного цвета.

2. Паста синей шариковой ручки синяя на просвет. Синий свет она не отражает, а пропускает. Если нанести её на белую бумагу тонким слоем, этот свет дойдёт сквозь неё до бумаги, отразится и придёт к нам. А вот если слой пасты очень толстый, даже синяя часть падающего на него белого света до бумаги не дойдёт – поглотится, как и остальные цвета. Поэтому на первый взгляд такой слой и выглядит чёрным. А если поймать глазом блик от яркой лампы, мы увидим слабый свет, отражённый поверхностью пасты. Оказывается, отражает она красный свет.

3. На рисунке показано, как возникают эти две линии разного цвета. Если свет падает на стекло только с нашей стороны, а не с обратной, то вернуться к нам он может двумя способами. Во-первых, отразившись от поверхности красителя, нанесённого красным фломастером. Но этот краситель, как



Красный фломастер на стекле

мы знаем, отражает жёлто-зелёный свет. Поэтому такой способ и даёт линию именно жёлто-зелёного цвета. Во-вторых, свет может пройти сквозь слой красителя, войти в стекло, дойти до второй (дальней от нас) его поверхности, отразиться от неё и вернуться к нам. А пропускает этот краситель только красный свет. В результате мы и видим вторую линию красного цвета.

Красный свет, прошедший сквозь краситель, отражается и от первой (ближней) поверхности стекла. Но идти к нам ему приходится вместе с жёлто-зелёным светом, отражённым поверхностью красителя. Поскольку отражает стекло очень небольшую долю падающего на него света, этот красный оказывается гораздо слабее жёлто-зелёного света и не влияет на цвет линии.

ФИЗИКА НА КУХНЕ («Квантик» № 6, 2022)

1. Кипение. Нижний тонкий слой капли, соприкоснувшись с горячей поверхностью, почти мгновенно нагревается до 100 градусов и закипает, то есть превращается в пар. При этом его объём резко увеличивается: плотность насыщенного пара много меньше плотности воды. Расширяясь, этот пар «подбрасывает» каплю вверх.

2. Испарение воды; насыщение водяного пара. Вода, даже когда не кипит, понемногу испаряется – некоторые молекулы «вырываются» из жидкости, преодолев притяжение окружающих молекул, и переходят в газ (водяной пар). И чем теплее вода, тем быстрее она испаряется. Поскольку чаще улетают более быстрые молекулы, при испарении вода немножко охлаждается. Если крышка открыта – испарение не останавливается; но если крышку закрыть, под ней вскоре образуется насыщенный пар (в воздухе уже так много молекул воды, что новые туда «не помещаются»), и испарение прекращается или, по крайней мере, сильно замедляется. Энергия на вылет быстрых молекул больше не тратится, кастрюля закипает быстрее.

3. Теплопроводность и поглощение энергии при кипении; конвекция. Подробнее см. статью «Три вида теплопередачи» в этом номере, с. 12.

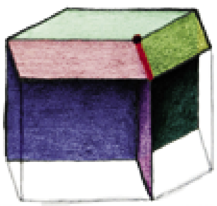
4. Тепловое расширение. Варенье в банку налили горячим. Потом оно остыло, объём его уменьшился. Образовавшееся место заполнил оставшийся в банке воздух или испарившийся из варенья водяной пар. Но давление в этой полости меньше, чем снаружи. При открывании банки воздух снаружи устремляется внутрь, выравнивая давление. От этого и «хлопок».

АВТОБУСНАЯ ОСТАНОВКА
(«Квантик» № 6, 2022)

Благодаря выемке в боковой стене водитель автобуса может увидеть, есть ли на остановке люди, а они – заранее заметить приближающийся автобус. Поэтому выемку делают с той стороны от остановки, с которой к ней подъедет автобус; на рисунке она слева – значит, движение левостороннее. Вместо того, чтобы делать выемку, иногда совсем убирают боковую стену (но тогда люди на остановке хуже защищены от ветра и дождя) или делают её стеклянной.

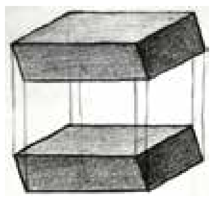
ЧЕТЫРЁХМЕРНЫЙ КУБИК

0. Двумерных граней 24.



1. В каждом ребре (например, красном на рисунке) сходятся 3 двумерные грани (красная, жёлтая и фиолетовая), в каждой вершине (жирная точка) – 6 (добавляем три сине-зелёные грани). А трёхмерных граней в каждой вершине сходится 4, они «натянуты» на каждые 3 из четырёх выходящих из вершины рёбер. На втором рисунке они разнесены для наглядности; в исходном кубе они касаются двумерными гранями, так что отмеченные красные точки – их общая вершина – сливаются воедино.

2. Выберем, например, боковую грань 3-кубика с чёрными рёбрами. Ей параллельны ещё одна грань того же 3-куба и две грани «синего». Всего – 4 параллельные грани в каждом направлении. А 3-грань, параллельная данной, одна.

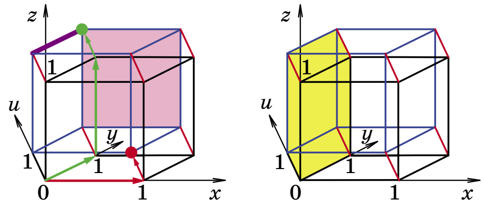


3. Через каждую вершину проходит ровно одна грань, параллельная данной. Перечислив все грани с данной вершиной (в задаче 1), мы решили и эту задачу.

Упражнение 1. а) Нет, у точек, лежащих на одном ребре, совпадают две из трёх координат.

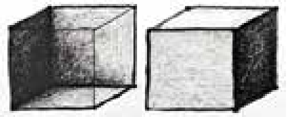
б) Ответ тривиальный – ребром, у которого $x=1$, $z=0$, оно параллельно оси y.

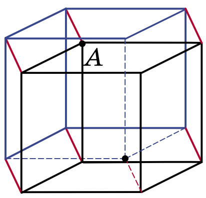
Упражнение 2. а) – в) Красная и зелёная точки, фиолетовое ребро и розовая грань на левом рисунке; г) жёлтая грань на правом рисунке.



Упражнение 3. $z=1$.

4. Как устроено изображение трёхмерного куба? У куба есть ближняя поверхность, которую мы видим, и дальняя, скрытая от взора (см. рисунок). Каждая из них состоит из трёх квадратов (на рисунке – параллелограммов), сходящихся в одной вершине (соответственно, ближней или дальней). Также и с 4-кубом: у него (для наблюдателя в 4-мерии) есть ближняя поверхность из всех четырёх кубов (на рисунке – параллелепипедов), сходящихся в одной вершине A, – эту картину мы видели в конце задачи 1 – и дальняя, из четырёх кубов-параллелепипедов у дальней вершины. Чтобы найти невидимые рёбра, нужно выбрать, какая вершина будет дальней (из тех, что во внутренности рисунка), и исходящие из неё 4 ребра будут невидимы.





МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ ЛО ШУ И КХАДЖУРАХО

Легко опознать единицу: с неё начинаются двузначные числа. Цифры 0, 2 и 3 легко узнаваемы по виду. Из того, что сумма цифр в центральном квадрате 2×2 равна 34, находим цифру 8, и т.д.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

МЁД И БРЕВНО

Гнездо пчёл в дупле называли *бортью*. Часто борть специально выдалбливали в стволе, позже появились колоды с пчёлами, а потом и ульи. Бревно на дерево вешали для защиты от медведей. Пробираясь к мёду, медведь отталкивает бревно, а оно раскачивается и ударяет медведя.

«ПЯТНАШКИ» С ПЕРЕГОРОДКАМИ

1. Ответ: 8-5-13-12 / 8-13-14-8 / 4-1-14-7 / 4-14-13-4 / 11-15-10-11 / 6-13-10-8 / 6-10-7-5 / 11-7-13-11 / 4-13-9-3 / 6-15-9-10 / 4-1-9-6 / 3-5-14-8 / 2-9-15-4 / 1-13-12-3 / 5-14-8-2 / 9-15 (номера разбиты на блоки для удобства – чтобы не запутаться). Ходы делаем так: на фишку с указанным номером ставим палец и сдвигаем к пустому месту её и все фишки между ней и пустым местом (если такие есть). Здесь 62 хода (за ход может сдвигаться несколько фишек).

2. Известное нам решение слишком длинное. Если вы найдёте короткое и изящное решение этой задачи (или предыдущей) – присылайте!

XXXI ТУРНИР АРХИМЕДА, ЗИМНИЙ ТУР: ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ

1. Ответ: 4836100000000016384.

Запишем число $2^{14}=16384$ справа налево и назовём его $x=48361$. Так как 10^{14} делится на 2^{14}, то и $10^{14}\cdot x$ тоже. Тогда $10^{14}\cdot x+2^{14}$ тоже делится на 2^{14}, и к тому же оно – палиндром.

2. Ответ: 8 жителей (3 рыцаря, 5 лжецов).

Утверждение 1 верно только у трёх самых старших жителей. Значит, они рыцари, а остальные – лжецы. Утверждение 2 ложно только у пяти самых богатых жителей, значит, они лжецы, а остальные – рыцари. Это действительно возможно, если среди этих восьми жителей трое самых старших – это трое самых бедных.

3. Ответ: нет. Путь до домика К в одну из сторон вдоль озера занимает у ВП 80 мин, а в другую – 120 мин. То есть в понедельник ВП прошёл 2/5 пути вокруг озера, а во вторник – 3/5 пути. У П путь до домика К в одну из сторон вдоль озера занимает 120 мин, а в другую – 100 мин. То есть в понедельник П прошёл 6/11 пути вокруг озера, а во вторник – 5/11 пути.

Тогда в понедельник ВП и П от своих домиков до домика К прошли $2/5+6/11=52/55$ всей тропы вокруг озера, а значит, расстояние между домиками ВП и П составляет 3/55 всего пути.

Во вторник ВП вышел в 10:00, а П – в 10:20. Так как за 80 мин ВП проходит 2/5 пути, за 20 мин он прошёл $1/10>1/11>3/55$ пути, то есть он прошёл мимо домика П, когда тот ещё из него не вышел. Поэтому они не успели встретиться.

4. Ответ: да. Пусть ИЦ укажет все мешки с нечётными номерами. Если ЦГ выбрал мешок с номером 2007, то монеты не перекладывались, в указанных мешках их $2007\cdot 1011$.

Если ЦГ выбрал мешок с нечётным номером, меньшим 2007, то половина вынутых из него монет «ушла» в мешки с чётными номерами, и если ЦГ назвал число $2007\cdot 1011-N$, то выбранный мешок имеет номер $2007-2N$.

Если ЦГ выбрал мешок с чётным номером, то часть монет из него «пришла» в мешки с нечётными номерами, и если ЦГ назвал $2007\cdot 1011+N$, то выбран мешок с номером $2008-2N$.

наш КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем
заочном математическом конкурсе.

Третий этап состоит из четырёх туров (с IX по XII) и идёт с мая по август.

Высылайте решения задач XI тура, с которыми справитесь, не позднее 5 августа в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

XI ТУР

51. Из пунктов *А* и *Б* навстречу друг другу одновременно выехали с постоянными скоростями велосипедисты Алёша и Боря. В момент их встречи автомобилист Андрей выехал из пункта *А* в пункт *Б*. В момент встречи Андрея с Борей Алёша доехал до пункта *Б*. Кто ехал быстрее – Алёша или Боря?

52. У Квантика была пустая, закрытая со всех сторон картонная кубическая коробка. Он разрезал каждую из шести граней этой коробки по какой-то из диагоналей. Могла ли коробка после этого не развалиться на отдельные части?

53. Найдите какие-нибудь 12 натуральных чисел (не обязательно различных), произведение которых равно их сумме.

Авторы: Борис Френкин (51), Дмитрий Калинин (52), Савва Морозкин, 4 класс, Давыдовская гимназия (53), Максим Прасолов (54), Александр Перепечко (55)

54. В воздухе неподвижно висит кубик. Второй такой же кубик прикладывают к неподвижному так, чтобы какие-то две их квадратные грани в точности наложились друг на друга. Далее второй кубик перекатывают через любое общее ребро кубиков до нового соприкосновения по квадратной грани. После нескольких таких перекатываний второй кубик вернулся в исходное положение. Докажите, что он коснётся первого кубика той же самой гранью, что и вначале.

55. В волшебном кошельке лежат N золотых монет. Квантик знает это и за ход добавляет в кошелёк монету или забирает из него монету себе. После каждого хода Квантика число монет в кошельке уменьшается в два раза, если оно было чётным, а иначе утраивается. При любом ли N Квантик сможет на каком-то ходу опустошить кошелёк, если исходно у Квантика

а) сколько угодно монет;

б) совсем нет монет?

Художник Николай Крутиков

ПОЗДРАВЛЯЕМ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ ВТОРОГО ЭТАПА НАШЕГО КОНКУРСА!

Победители: Карина Амиршадян, Артём Барков, Иван Бирюков, Филипп Ганичев, Егор Гаценко, Дарья Дайловская, Алиса Елисеева, Елена Куцук, Алеся Львова, Егор Мокеев, Михаил Савин, Лев Салдаев, Тимур Скивко, Дарина Токарева, Иван Трофимов, Мирослава Шахова, а также команды «Умники и умницы в математике», «Математический кружок „Сигма“».

Призёры: Антонина Алтайская, Ульяна Ануфриева, Андрей Вараксин, Кузьма Вараксин, Наталия Вараксина, Ярослав Воропаев, Глеб Вылегжанин, Анна Джаошвили, Иван Загоскин, Варвара Зеленова, Андрей Иванов, Артур Илаев, Ахсартаг Илаев, Марк Масловатый, Ольга Метляхина, Иван Мчедлов, Александр Мягков, Сергей Немилов, Михаил Николаев, Ксения Петриченко, Александр Погадаев, Тамара Приходько, Иван Птушкин, Наталия Савина, Иван Саначев, Сергей Темираев, Дарья Федотова, Зарина Шарипова, Пётр Шатохин, Светлана Шашина, Мария Шишова, Елизавета Шолухова, а также команда школы №5 г. Магнитогорска.

УДАЧИ ВСЕМ В СЛЕДУЮЩИХ ЭТАПАХ И В ОБЩЕМ ГОДОВОМ ЗАЧЁТЕ!

ПОЛИНЕЗИЙСКОЕ КАНОЭ

Что прикреплено к этой лодке и зачем?

Автор Татьяна Корчемкина Художник Мария Усеинова

ISSN 2227-7986