№ 5 | май 2022

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

№ 5
май
2022

КРЫЛАТЫЕ КВАДРАТЫ

СПЕКТРОСКОПИЯ СОЛНЦА НА CD

СКАЛЯТСЯ ЛИ СКАЛЫ?

Enter

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
t.me/kvantik12
vk.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com

Журнал «Квантик» № 5, май 2022 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С.А. Дориченко
Редакция: В.Г. Асташкина, Т.А. Корчемкина, Е.А. Котко, Г.А. Мерзон, Н.М. Нетрусова, А.Ю. Перепечко, М.В. Прасолов, Н.А. Солодовников
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р.К. Шагеева, И.Х. Гумерова
Обложка: художник Мария Усеинова

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**
Подписка на журнал в отделениях Почты России (у оператора) по электронной версии Каталога Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)
Онлайн-подписка на сайтах:
▪ агентства АРЗИ: **akc.ru/itm/kvantik**
▪ Почты России: **podpiska.pochta.ru/press/ПМ068**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84x108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 14.04.2022
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831) 218-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СЮРПРИЗЫ

Григорий Мерзон

Рождественская теорема Ферма и крылатые квадраты Спивака

Задача о суммах двух квадратов

Какие целые числа могут быть представлены в виде суммы двух квадратов? С этого вопроса началась классическая теория чисел, а ответ на него нашёл Пьер Ферма ещё в XVII веке (мы дадим этот ответ в конце статьи).

Начнём с того, что квадрат целого числа даёт остаток 0 или 1 при делении на 4. Поэтому сумма двух квадратов даёт при делении на 4 остаток 0, 1 или 2. То есть никакое число вида $4k+3$ в виде суммы двух квадратов не представимо. А вот среди чисел вида $4k+1$ есть как представимые (например $5=2^2+1^2$, $9=3^2+0^2$), так и нет (например 21 или 33).

Замечательная **Рождественская теорема Ферма** гласит: *любое простое число вида* $4k+1$ *представимо в виде суммы двух квадратов.*

С Рождества 1640 года (когда Ферма объявил, что доказал эту теорему – поэтому её и называют Рождественской) был найден не один десяток разных доказательств. Мы обсудим замечательное элементарное доказательство с «крылатыми квадратами», найденное А. В. Спиваком уже в XXI веке (см. kvan.tk/spivak-sq).

Крылатые квадраты

Пусть p – простое число вида $4k+1$. Рассмотрим все такие тройки целых неотрицательных чисел (x, y, z), что $p=4xy+z^2$. Наша цель – доказать, что среди них есть хотя бы одна тройка, для которой $x=y$: тогда $p=(2x)^2+z^2$ – сумма двух квадратов.

Все тройки, для которых $x \neq y$, разбиваются на пары $(x, y, z) \leftrightarrow (y, x, z)$. Поэтому достаточно доказать, что количество наших троек нечётно (тогда все они разбиться на пары не могут).

Пришло время добавить к разговорам картинки. По каждой тройке (x, y, z) мы нарисуем клетчатую фигуру («крылатый квадрат»): начнём с квадрата $z \times z$ и приставим к нему (начиная с пра-

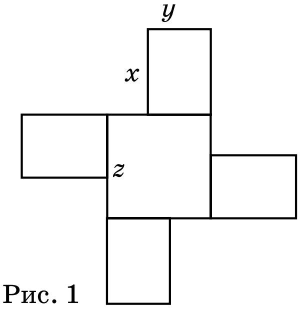


Рис. 1

вого верхнего угла)[1] 4 равных прямоугольника $x \times y$ (рис. 1). Если $p = 4xy + z^2$, мы получим крылатый квадрат площади p.

Но если число p простое, то почти каждый крылатый квадрат площади p можно получить ровно из двух троек! Действительно, как восстановить тройку, имея в распоряжении крылатый квадрат? Надо разрезать его на обычный квадрат и четыре одинаковых прямоугольника: взять один из «вогнутых» углов и начать от него отрезать либо по горизонтали, либо по вертикали (рис. 2).

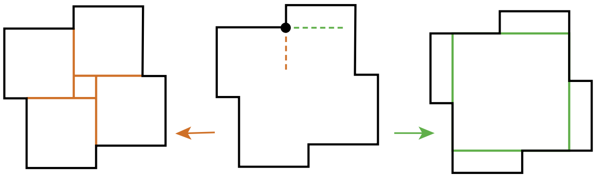


Рис. 2

Единственное исключение (единственное, если p простое[2]) – крест, соответствующий тройке $(1, k, 1)$, где $p = 4k + 1$ (рис. 3). А все остальные тройки мы разбили на пары. Значит, общее количество троек нечётно, что и требовалось.

От простых чисел к составным

Мы начинали с вопроса о представимости произвольных целых чисел в виде суммы двух квадратов, но дальше занимались только представимостью *простых* чисел.

Дело в том, что наша задача, как говорят, *мультипликативна*: если числа M и N представимы в виде суммы двух квадратов, то в таком виде представимо и число MN (действительно, если $M = a^2 + b^2$ и $N = c^2 + d^2$, то $MN = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$); и наоборот, если число MN представимо в виде суммы двух квадратов, а числа M и N взаимно просты (не имеют общих делителей), то и M, и N тоже представимы в виде суммы двух квадратов (это непростой факт).

Пользуясь этим, уже не очень сложно вывести из Рождественской теоремы и общее утверждение: *число N представимо в виде суммы двух квадратов тогда*

[1] Или начиная с левого верхнего. Мы не различаем равные фигуры (в том числе получающиеся друг из друга зеркальным отражением).

[2] Подумайте, почему важна простота числа p. Чтобы разобраться, какие иначе могут возникнуть неприятности, полезно порисовать крылатые квадраты площади 21 и площади 16.

и только тогда, когда каждое простое число вида $4k+3$, входящее в разложение числа N на простые сомножители, входит в него в чётной степени.

Например, число $21=3\cdot 7$ не представимо в виде суммы двух квадратов, а число $2\cdot 5\cdot 7^2\cdot 13=6370$ представимо (действительно, $6370=21^2+77^2$).

На рисунке 3 изображён случай $p=37$. В каждой строке – по одному крылатому квадрату площади p (в данном случае их 4) и соответствующие ему тройки (x, y, z) (для всех, кроме первого креста, их две). Стрелки соединяют тройки (x, y, z) и (y, x, z). Единственная тройка, остающаяся без пары, – $(3, 3, 1)$ – и соответствует представлению числа 37 в виде суммы двух квадратов: $37=6^2+1^2$.

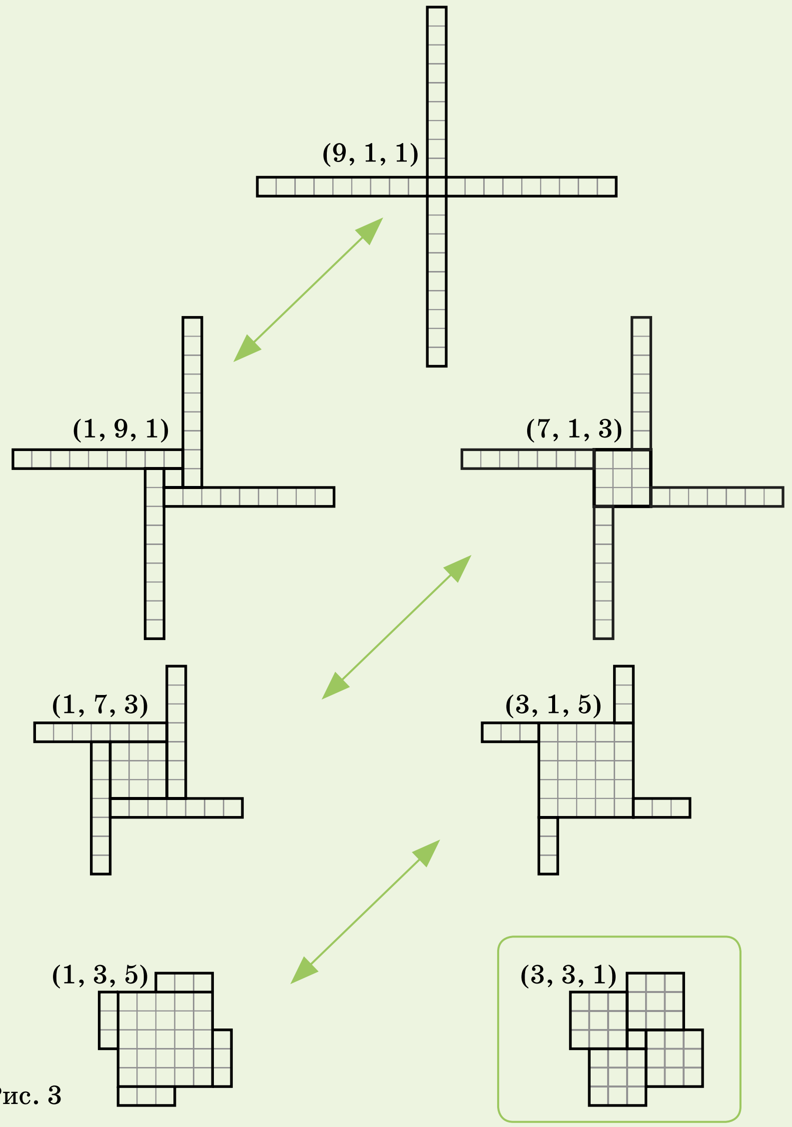


Рис. 3

Иглы из пузырьков

Когда вода замерзает, растворённый в ней воздух остаётся пузырьками во льду. Местами они выглядят как параллельные иглы, см. фото. Как они принимают такую форму?

Автор Александр Бердников

Фото автора • Художник Евгений Паненко

Марина Анатоль

ВИКИНЫ ЗАКАВЫКИ

Алфавит замуровали

– Знаешь, бабушка, я теперь выучила весь алфавит! – заявила Вика, запрыгивая в кроватку. – Там тридцать три буквы, и мы их все с мамой замуровали. А волшебный ключик от нашей тайны есть только у нас.

– Зачем же вы так поступили с буквами, как ты будешь теперь ими пользоваться?

– Очень даже просто, – сказала Вика. – У каждой буквы есть свой номерочек, ведь я уже все цифры знаю. А открываем мы волшебным ключиком. Ещё мама сделала такую формочку из пяти клеточек, и я могу туда класть буквы, получаются слова.

Вот так получилось мамино имя

С	В	Е	Т	А

– А, ну это другое дело. Так ты скоро научишься читать.

– А ещё мама сделала формочку из десяти клеток, чтобы я туда могла класть цифры, их десять разных цифр:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

А каждой буквы и каждой цифры у нас много-много.

Вот что у меня получилось:

1	4	0	0	2	6	1	2	0	1

СТРАНИЧКИ ДЛЯ МАЛЕНЬКИХ

– Ты наугад ставила цифры?

– Ну да, – кивнула головой Вика, – а мама посмотрела, засмеялась и сказала, что мы можем сделать интересную загадку. Вот такую:

> Если вместо 0 0 поставить две другие цифры, то получится маленький пищащий зверик, а если же вместо 0 0 поставить какую-то другую цифру и 0, то получится большой рычащий зверь.
>
> **Какие это зверик и зверь?**

– Я думала-думала и отгадала, – сказала Вика, – а потом, когда стала менять эти два нуля, ошиблась и поставила случайно один и шесть туда, где было два нуля, а хотела поставить другие цифры.

Мама сказала, что это тоже здорово, потому что можно добавить ещё один вопрос в нашу задачку:

> **Какое крохотное существо получилось при таком наборе цифр?**
>
> | | | | | | | | | | |
> |---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
> | 1 | 4 | 1 | 6 | 2 | 6 | 1 | 2 | 0 | 1 |

– Вот, бабушка, целых три трудных вопроса тебе! Сможешь правильно ответить?

– Наверное, не смогу, у меня ведь нет волшебного ключика.

А вы, ребята, сможете?

Ответ в следующем номере

Художник Ольга Демидова

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Третий этап состоит из четырёх туров (с IX по XII) и идёт с мая по август.

Высылайте решения задач IX тура, с которыми справитесь, не позднее 5 июня в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

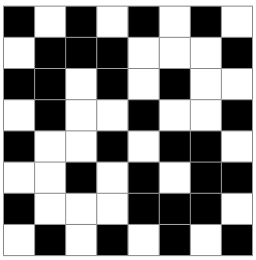
В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

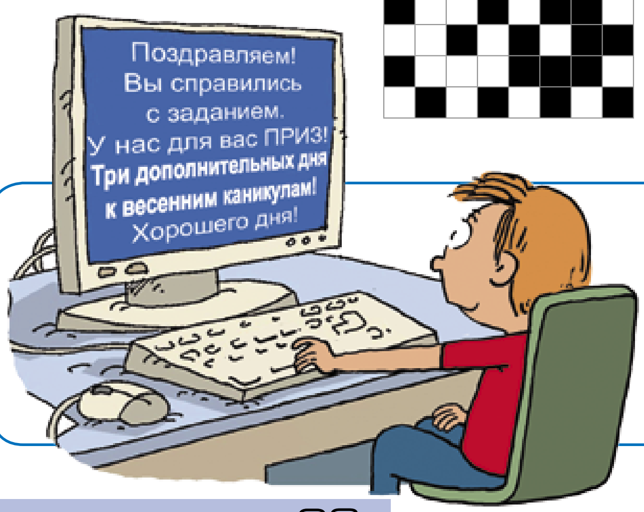
В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

IX ТУР

41. Есть бракованная шахматная доска 8×8 с неправильной раскраской (см. рисунок). Можно ли разрезать её на две части и склеить из них доску с правильной шахматной раскраской (соседние по стороне клетки должны быть окрашены в разный цвет)?





42. На экране компьютера горит число 2022. Существует ли такое натуральное число N, что сколько бы раз ни вставить его в середину между цифрами 0 и 2, число на экране компьютера всегда будет делиться на 2022?

Авторы: Михаил Евдокимов (41, 42, 45), Александр Грибалко (43), Борис Френкин (44)

43. а) В каждой клетке квадрата 3×3 лежит монета. Некоторые монеты фальшивые (весят одинаково, но легче настоящих), остальные – настоящие (тоже весят одинаково). Известно, что фальшивые монеты занимают целиком либо строку, либо столбец, либо диагональ. Как за одно взвешивание на чашечных весах без гирь найти хоть одну фальшивую монету?

б) Решите ту же задачу для квадрата 9×9, если разрешено сделать два взвешивания.

44. Десять раков-отшельников живут в раковинах. Все раки разного размера, и чем больше рак – тем больше его раковина. Раки растут с одинаковой скоростью и хотят менять раковины на более просторные. Если они нашли пустую раковину, её забирает самый большой рак из тех, у кого раковина меньше этой (если такой рак найдётся). В его прежнюю раковину селится следующий (меньший) по размеру, в раковину этого рака – следующий по размеру и т.д. Оставшаяся раковина выбрасывается.

Через некоторое время не осталось ни одной раковины из первоначальных. Обязательно ли каждая имеющаяся раковина больше каждой из первоначальных?

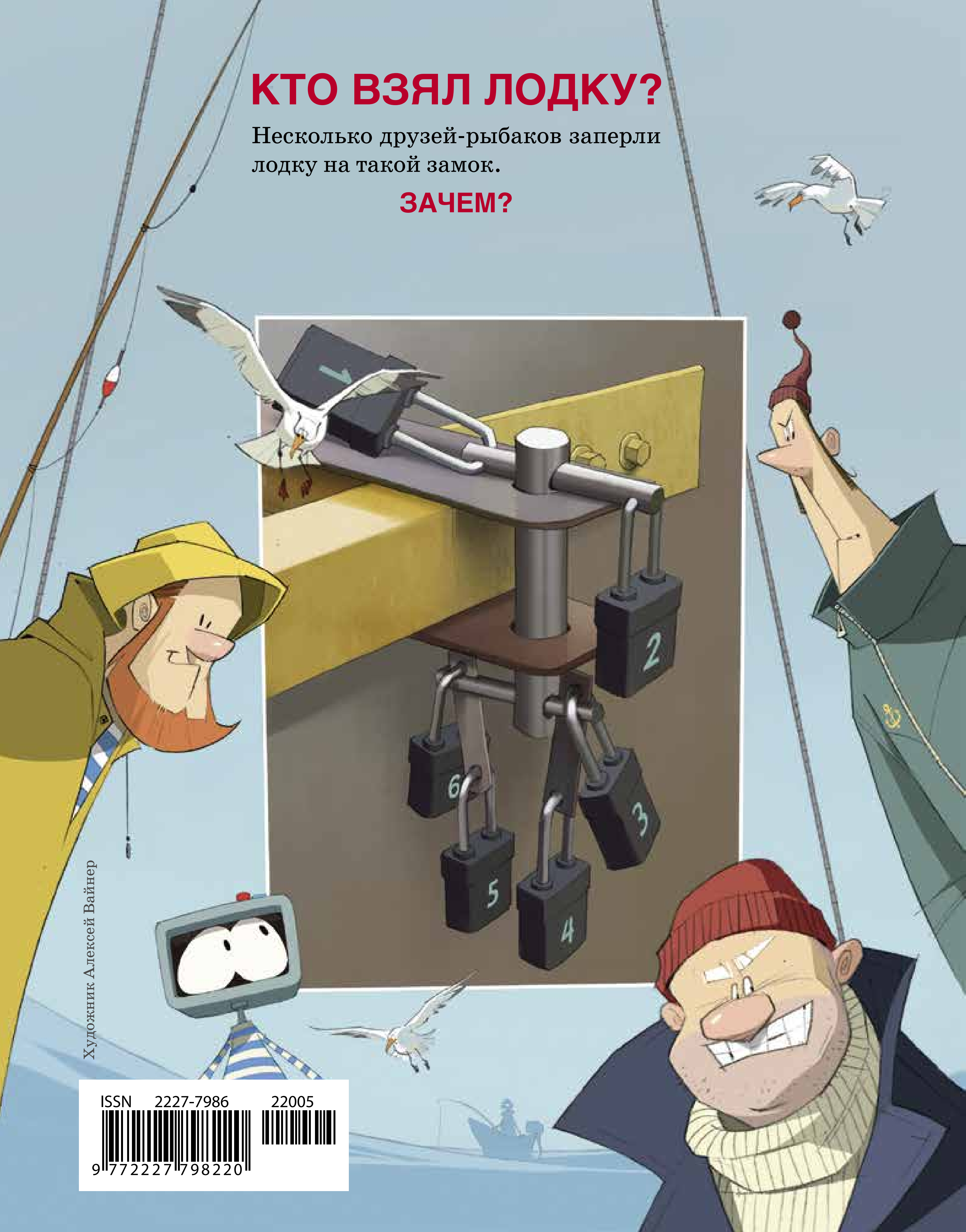
45. В выпуклом восьмиугольнике $ABCDEFGH$ все углы равны. Внутри него выбрали произвольную точку O. Докажите, что сумма расстояний от точки O до прямых, содержащих стороны восьмиугольника, не зависит от выбора точки O.

Художник Николай Крутиков

КТО ВЗЯЛ ЛОДКУ?

Несколько друзей-рыбаков заперли лодку на такой замок.

ЗАЧЕМ?



Художник Алексей Вайнер

ISSN 2227-7986 22005

9 772227 798220