№ 1 | январь 2022
Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования
e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 1
январь
2022

НЕ РАЗРЕЖЬ ЦЕНТР

ДВЕ ЗВЕЗДЫ

СУММЫ ТРЁХ КУБОВ

Enter

Настенный перекидной календарь «КВАНТИКА»
ХОРОШИЙ ПОДАРОК друзьям, близким и коллегам!

Приобрести календарь можно в интернет-магазинах **kvantik.ru, biblio.mccme.ru, Яндекс.маркет** и других магазинах – подробнее по ссылке **kvantik.com/buy**

ПОДПИСКА НА ЖУРНАЛ «КВАНТИК»

РОССИЯ

- **на почте (у оператора) по электронной версии Каталога Почты России:**
  индекс **ПМ068** – по месяцам полугодия
- **онлайн-подписка на сайтах:**
  агентства АРЗИ: **akc.ru/itm/kvantik**
  Почты России: **podpiska.pochta.ru/ПМ068**

онлайн вы можете оформить подписку и для своих друзей, знакомых, родственников

КРЫМ

- Почта Крыма:
  «Каталог периодических изданий Республики Крым и г. Севастополя», индекс – **22923**

УКРАИНА

- Подписное агентство «ПресЦентр Киев»
  prescentr.kiev.ua тел. **0444515161**
  e-mail: **podpiska1@prescentr.kiev.ua**

БЕЛАРУСЬ

- Белпочта:
  Каталог «Печатные СМИ. Российская Федерация. Украина. Казахстан», индекс – **14109**
  Онлайн-подписка на сайте **belpost.by**
- ООО «АГЕНТСТВО ВЛАДИМИРА ГРЕВЦОВА» (подписное агентство)
  г. Минск, ул. Нарочанская, д. 11, оф. 21а
  тел. **+375 29 683 83 56**, **+375 17 209 69 01**, доп. 2025
  e-mail: **o.polkovenko@agvg.by** www.smi.by

КАЗАХСТАН

- Подписное агентство «ЭКСПРЕСС-ПРЕСС» (ТОО «Express Press Astana»)
  г. Нур-Султан, ул.Б.Майлина, д. 4/1, под. 2, оф. 114
  тел. **+7 747-266-05-77**, **7172-25-24-35**, **7172-49-39-29**
  e-mail: **express-press-astana@mail.ru**
- Подписное агентство «ЕВРАЗИЯ ПРЕСС»
  тел. **+7 727 382-25-11**; факс: **+7 727 382-34-87**
  e-mail: **evrasia_press@mail.kz**

Подробнее обо всех способах подписки см. **kvantik.com/podpiska**

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
t.me/kvantik12
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 1, январь 2022 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Т. А. Корчемкина, Е. А. Котко, Г. А. Мерзон, Н. М. Нетрусова, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов, Н. А. Солодовников
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Алексей Вайнер

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**
Подписка на журнал в отделениях Почты России (у оператора) по электронной версии Каталога Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)
Онлайн-подписка на сайтах:
▪ агентства АРЗИ: **akc.ru/itm/kvantik**
▪ Почты России: **podpiska.pochta.ru/press/ПМ068**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 09.12.2021
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831)216-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+

СОДЕРЖАНИЕ

Игорь Акулич

ЗА ДВУМЯ ЗАЙЦАМИ

В 2013 году на XXXVI турнире имени М. В. Ломоносова была предложена задача:

На прямой линии находятся два зайца и между ними – волк: к одному зайцу он ближе, чем к другому. Животные могут бегать только вдоль этой линии с постоянными скоростями. Скорости зайцев одинаковы и меньше, чем у волка. Зайцы убегают в разные стороны, а волк хочет поймать их, пробежав за всё время охоты как можно меньшее расстояние. Какого зайца и почему волку следует поймать в первую очередь – ближайшего или другого?

Автор задачи советует сначала угадать ответ. Например, так. Рассмотрим «вырожденный» случай – когда зайцы неподвижны (их скорости нулевые). Если расстояния от волка до первого и второго зайцев равны a и b (где $a < b$), то при погоне сначала за первым зайцем, а потом за вторым, волк пробежит расстояние $2a + b$, а если наоборот – то $a + 2b$. Первое, конечно, меньше.

А что в общем случае? Пусть первый заяц был ближе. Выпустим из точки, где волк находился изначально, сразу двух волков в разные стороны! Первый волк добежит до первого зайца быстрее, чем второй – до второго. Значит, когда волки побегут обратно и встретятся, их точка встречи будет ближе ко второму зайцу. Тогда первый волк добежит до второго зайца быстрее, чем второй – до первого.

А теперь давайте чуть изменим условие. Пусть *первоначальные расстояния от волка до зайцев равны, но зайцы разбегаются с* ***разными*** *скоростями (разумеется, меньшими, чем скорость волка). Какого зайца волку надо преследовать в первую очередь – более быстрого или того, кто помедленней?*

Попробуйте угадать ответ, а потом обоснуйте его.

Наконец, для самых решительных: *Пусть различны и первоначальные расстояния от волка до зайцев, и их скорости. При каких соотношениях между этими четырьмя параметрами волку выгодней сначала ловить первого зайца, а потом второго?*

Ответы в следующем номере

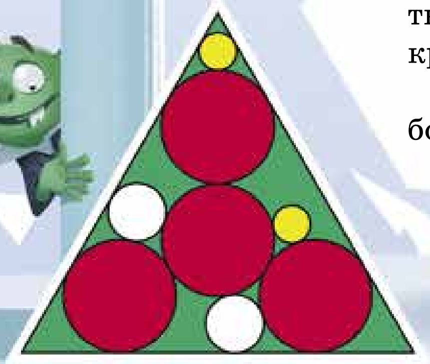
Художник Алексей Вайнер

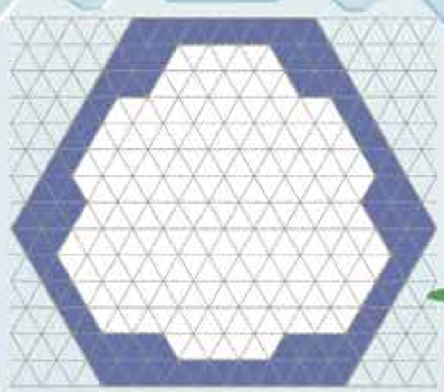
Декоративная ёлочка

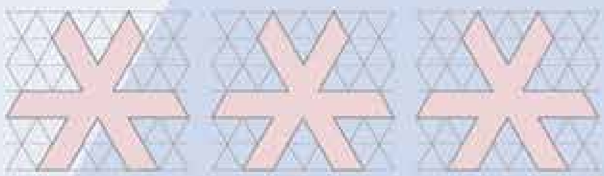
Декоративная новогодняя ёлочка в форме правильного треугольника украшена красными, жёлтыми и белыми «шарами» (шары одного цвета – это круги одинакового размера).

Задача. Во сколько раз радиус красного шара больше радиуса а) жёлтого; б) белого?

Автор Михаил Евдокимов







Художник Мария Усеинова

Снежинка – 2022

Задача. Поместите в окошке три снежинки так, чтобы они создали симметричный узор.

Распечатать детали головоломки можно по ссылке kvan.tk/sneg

Автор Владимир Красноухов

СУММЫ ТРЁХ КУБОВ

Недавно в «Квантике» обсуждалось[1], какие числа можно представить в виде суммы двух квадратов целых чисел. А какие числа можно представить в виде суммы трёх кубов целых чисел?

Скажем, числа 1, 2 и 3 можно записать в виде суммы трёх кубов, используя лишь единицы и нули, числа 6, 7, 8, 9 и 10 можно записать, используя кубы чисел 2, 1, –1 и 0 (например, $6 = 2^3 + (-1)^3 + (-1)^3$), $11 = 3^3 - 2^3 - 2^3$, а вот попытки разложить на сумму трёх кубов числа 4 и 5 к успеху не приводят.

Оказывается, дело вот в чём. Кубы дают остатки 0, 1 или 8 при делении на 9 (это легко проверить, возведя в куб числа от 0 до 8). Поэтому числа, которые дают остаток 4 или 5 при делении на 9, в виде суммы трёх кубов непредставимы. Про все остальные целые числа есть гипотеза: они представимы в виде суммы трёх кубов целых чисел (не обязательно положительных!). Но доказать гипотезу пока не удаётся.

Например, для числа 33 такое представление нашли только в 2019 году (Эндрю Букер):

$$33 = 8866128975287528^3 + (-8778405442862239)^3 + \\ + (-2736111468807040)^3,$$

а для числа 42 – в 2020-м (Эндрю Букер, Эндрю Сазерленд):

$$42 = (-80538738812075974)^3 + 80435758145817515^3 + \\ + 12602123297335631^3.$$

В обоих случаях использовался компьютерный перебор – но, конечно, не всех чисел подряд (возникающие числа слишком велики!): использовались разные соображения из теории чисел. На этом вопрос про представимость чисел от 1 до 100 полностью исследован, но как решать общую задачу – всё ещё непонятно.

Ожидается даже, что каждое число, представимое в виде суммы трёх кубов, представимо бесконечным числом способов. Например,

$$2 = (1 + 6t^3)^3 + (1 - 6t^3)^3 + (-6t^2)^3$$

для любого целого t. Но уже для числа 3 неизвестно, конечно или бесконечно число представлений.

[1] Г. Мерзон. Косые квадраты: от Пифагора до Ферма («Квантик» №7 за 2021 год).

Интересно, что в виде суммы трёх кубов *рациональных* чисел представляется уже любое рациональное число – есть даже явная формула:

$$N=\left(\frac{27N^3-1}{27N^2+9N+3}\right)^3+\left(\frac{-27N^3+9N+1}{27N^2+9N+3}\right)^3+\left(\frac{27N^2+9N}{27N^2+9N+3}\right)^3.$$

Более того, есть явная формула даже для бесконечного числа представлений данного числа N:

$$\left(\frac{27N^3-t^9}{27N^2t^2+9Nt^5+3t^8}\right)^3+\left(\frac{-27N^3+9Nt^6+t^9}{27N^2t^2+9Nt^5+3t^8}\right)^3+\left(\frac{27N^2t^3+9Nt^6}{27N^2t^2+9Nt^5+3t^8}\right)^3$$

(предыдущая формула получается при $t=1$).

Здесь явный контраст с задачей про сумму двух квадратов, где переход к рациональным числам ничего не меняет: если целое число является суммой двух рациональных квадратов, то оно является и суммой двух целых квадратов.

Задачи

1. Найдите представление числа 3 в виде суммы трех кубов, отличное от очевидного $1^3+1^3+1^3$.

2. Выясните, какие остатки по модулю 8 может давать сумма трёх квадратов. Убедитесь, что целых положительных чисел, не представимых в виде суммы трёх квадратов, бесконечно много.

3. Хорошо известно, что у уравнения $x^3+y^3=z^3$ нет решений в целых положительных числах (это частный случай Великой теоремы Ферма, доказанный ещё Эйлером). А существуют ли такие целые положительные x, y, z, что равенство $x^3+y^3=z^3$ выполняется с погрешностью не более 0,01% от величины числа z?

4. (*XXXI Турнир городов, Михаил Мурашкин*) Существуют ли такие натуральные числа a, b, c, d, что $a^3+b^3+c^3+d^3=100^{100}$?

5. (*XXXV Турнир городов, Bong-Gyun Koh*) Каждое ли целое число можно записать как сумму кубов нескольких целых чисел, среди которых нет одинаковых?

Ответы в следующем номере

Художник Мария Усеинова

Марина Анатоль

ВИКИНЫ ЗАКАВЫКИ

ТРИСТАПАРК

Моей внучке Вике родители иногда разрешают ночевать у меня, чему я очень рада. Перед сном мы любим поболтать о том и о сём. Эту нашу болтовню я записываю на диктофон, а потом даю прослушать запись её родителям, чтобы они мне разъяснили, что к чему. Не потому записываю, что не доверяю Вике, а потому, что часто плохо её понимаю. Она любит коверкать слова, да ещё и нафантазировать может.

Вот пример нашей болтовни на сон грядущий.

– Ну рассказывай, Викуля, как прошёл сегодняшний день?

– Как ты смешно спросила, бабушка! День никуда не ходил, это мы с мамой ходили в Тристапарк. А сначала ехали на одном поезде, потом на другом, а потом поднимались по одной крутой лестнице, потом по другой.

– Ого! Целое путешествие. И что же там такого интересного ты увидела?

– Много-много уток. Их даже больше, чем триста, наверное. Я не смогла сосчитать. А ведь я теперь умею считать даже лимоны.

– Миллионы, ты хочешь сказать.

– Ну да. По правде, смотреть на них мне было не очень интересно, и мама сказала, что можно ещё на кого-то посмотреть, и я могу его попугать. А что такого во мне страшного?

– Нет-нет, дружок, ты очень милая и миролюбивая девочка. Странно, что мама так сказала...

– И там ещё был голубь. А потом мы видели Гаврилку, он ел банан, а рядом чистила апельсин, – тут Вика сладко зевнула, – Ма-а-а-а-ка, – и мирно засопела.

Я же осталась сидеть совершенно обескураженная.

– Живём мы в пригороде, место замечательное – лес, водохранилище, стадион, теннисный корт, бассейн. Это же уму непостижимо! – думала я. – Тащить ребёнка на двух поездах, карабкаться по крутым лестницам, чтобы смотреть на уток и голубей, которых у нас на водохранилище полным-полно. Вынудить девочку пугать кого-то, да ещё и встретить соседских ребят, Гаврюшу с Машей, с которыми видимся ежедневно! Нет, это правильно, что я включила диктофон. Завтра выясню у Светы: Викины это фантазии или непростительное легкомыслие её мамы Светы.

А вы как думаете, ребята?

Ответ в следующем номере

Художник Ольга Демидова

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Второй этап состоит из четырёх туров (с V по VIII) и идёт с января по апрель.

Высылайте решения задач V тура, с которыми справитесь, не позднее 5 февраля в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

V ТУР

21. На острове живут правдолюбы, лжецы и хитрецы (которые могут и сказать правду, и солгать). Всем задали вопрос: «Ты хитрец?» Утвердительно ответили ровно 20 человек. После этого всех спросили: «Ты лжец?» На этот раз сказал «да» ровно 21 человек. Кого на острове больше – хитрецов или лжецов?

22. И круг, и прямоугольник легко разрезать на любое количество одинаковых частей. Существует ли фигура с тем же свойством, у которой нет ни центра симметрии, ни оси симметрии? (Части должны быть равны и по форме, и по площади.)

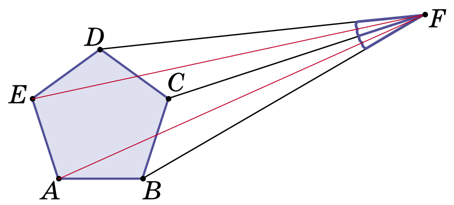
Авторы: Борис Френкин (21), Игорь Акулич (23), Николай Авилов (24), Константин Кноп (25)

23. Последовательностью Фибоначчи называется последовательность чисел, в которой первые два числа равны 1, а каждое последующее число равно сумме двух предыдущих: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Можно ли первые 2022 числа последовательности Фибоначчи разделить на две группы, содержащие поровну чисел, чтобы суммы чисел в этих группах были равны между собой?

24. а) Можно ли в белом клетчатом квадрате 10×10 закрасить чёрным несколько клеток так, чтобы число бело-белых соседних клеток равнялось числу бело-чёрных соседних клеток и равнялось числу чёрно-чёрных соседних клеток? (Соседними считаются клетки с общей стороной.)

б) Тот же вопрос про квадрат 9×9.

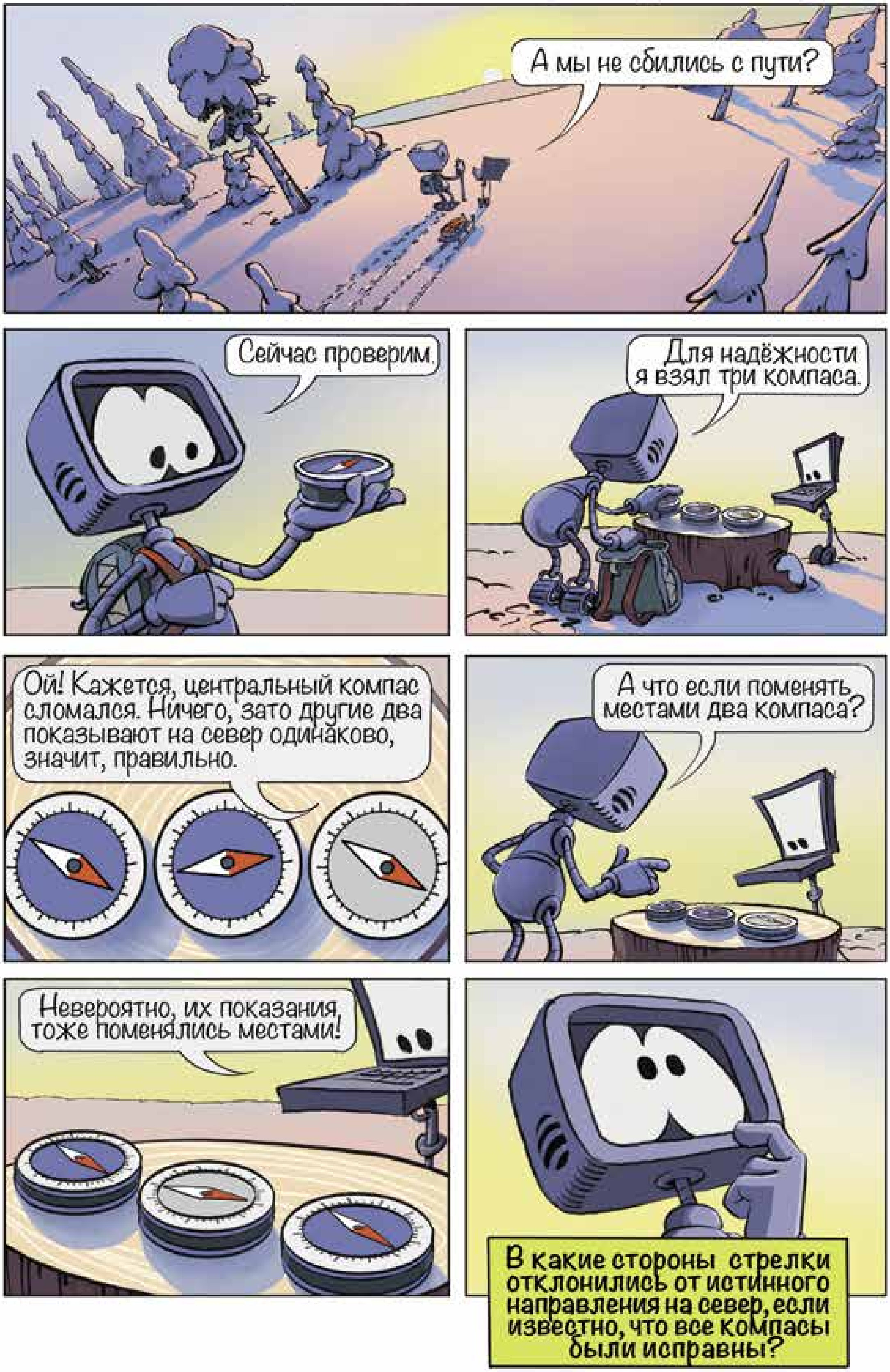
25. Точка F снаружи правильного пятиугольника $ABCDE$ такова, что отрезки ED, EC, AC и AB видны из F под одним и тем же углом (см. рисунок). Под каким? (Говорят, что отрезок MN виден из точки X под углом α, если угол MXN равен α).



Художник Николай Крутиков

Поправка к «Квантику» № 12. *Итоги математического конкурса 2020/21 г. были неполными.* Поздравляем также победительницу конкурса **Ольгу Метляхину** (4 кл. центра образования № 42 г. Вологды) и успешно выступивших **Владимира Афанасьева** (4 кл. лицея «МОК № 2» г. Воронежа) и **Сергея Немилова** (6 кл. школы № 2 г. Тейково Ивановской области)!

ТРИ КОМПАСА



Художник Yustas Автор Александр Гайфуллин

ISSN 2227-7986
22001
9 772227 798220