№ 12 | декабрь 2021
Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования
e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 12
декабрь 2021

ТОЧКА ТОРРИЧЕЛЛИ И СЕТИ ШТЕЙНЕРА

ДВЕ МНОГОНОЖКИ

СОМ АЛИ

Enter

Настенный перекидной календарь «КВАНТИКА»
ХОРОШИЙ ПОДАРОК друзьям, близким и коллегам!

Приобрести календарь можно в интернет-магазинах **kvantik.ru**, **biblio.mccme.ru**, **Яндекс.маркет** и других магазинах – подробнее по ссылке **kvantik.com/buy**

ПОДПИСКА НА ЖУРНАЛ «КВАНТИК»

РОССИЯ

- **на почте (у оператора) по электронной версии Каталога Почты России:**
  индекс **ПМ068** – по месяцам полугодия
  индекс **ПМ989** – годовая подписка
- **онлайн-подписка на сайтах:**
  агентства АРЗИ: **akc.ru/itm/kvantik**
  Почты России:
  podpiska.pochta.ru/ПМ068

онлайн вы можете оформить подписку и для своих друзей, знакомых, родственников

КРЫМ

- Почта Крыма:
  «Каталог периодических изданий Республики Крым и г. Севастополя», индекс – **22923**

УКРАИНА

- Подписное агентство «ПресЦентр Киев»
  prescentr.kiev.ua тел. **0444515161**
  e-mail: **podpiska1@prescentr.kiev.ua**

БЕЛАРУСЬ

- Белпочта:
  Каталог «Печатные СМИ. Российская Федерация. Украина. Казахстан», индекс – **14109**
  Онлайн-подписка на сайте **belpost.by**
- ООО «АГЕНТСТВО ВЛАДИМИРА ГРЕВЦОВА» (подписное агентство)
  г. Минск, ул. Нарочанская, д. 11, оф. 21а
  тел. **+375 29 683 83 56**, **+375 17 209 69 01**, доп. 2025
  e-mail: **o.polkovenko@agvg.by** www.smi.by

КАЗАХСТАН

- Подписное агентство «ЭКСПРЕСС-ПРЕСС» (ТОО «Express Press Astana»)
  г. Нур-Султан, ул.Б.Майлина, д. 4/1, под. 2, оф. 114
  тел. **+7 747-266-05-77**, **7172-25-24-35**, **7172-49-39-29**
  e-mail: **express-press-astana@mail.ru**
- Подписное агентство «ЕВРАЗИЯ ПРЕСС»
  тел. **+7 727 382-25-11**; факс: **+7 727 382-34-87**
  e-mail: **evrasia_press@mail.kz**

Подробнее обо всех способах подписки см. **kvantik.com/podpiska**

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
t.me/kvantik12
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 12, декабрь 2021 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С.А.Дориченко
Редакция: В.Г. Асташкина, Т.А. Корчемкина, Е.А. Котко, Г.А. Мерзон, Н.М. Нетрусова, А. Ю. Перепечко, М.В. Прасолов, Н.А. Солодовников
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р.К.Шагеева, И.Х.Гумерова
Обложка: художник Мария Усеинова

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**
Подписка на журнал в отделениях Почты России (у оператора) по электронной версии Каталога Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)
Онлайн-подписка на сайтах:
▪ агентства АРЗИ: **akc.ru/itm/kvantik**
▪ Почты России: **podpiska.pochta.ru/press/ПМ068**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 11.11.2021
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831)216-40-40

Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

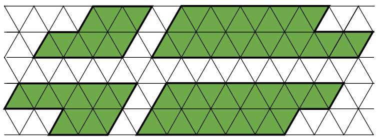
СОДЕРЖАНИЕ

Игры и Головоломки

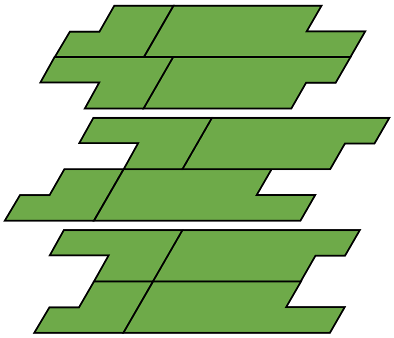
Владимир Красноухов

Ёлочка-2022

Хороший подарок к Новому году – интересная головоломка! Поэтому достанем свои инструменты – ножницы, линейку, карандаш, приготовим кусок цветного картона (желательно зелёного) и примемся за дело.



Изготовим по эскизу четыре детали[1], выложим на стол и попробуем последовательно собирать из них различные симметричные фигуры. Оказывается, это легко! Таких фигур можно собрать множество, но... все они имеют один и тот же вид симметрии – центральную симметрию (при повороте на 180° относительно центральной точки фигура совпадает сама с собой). Для примера приведём три таких фигуры.



А теперь непростая задача. Используя все четыре детали, постройте фигуру, обладающую зеркальной симметрией. Детали можно как угодно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга. Нам известно единственное решение, и этой фигурой будет, как вы уже догадались – ёлочка! Впрочем, это уже подсказка, постарайтесь решить задачу самостоятельно.

Желаем успехов вам в наступающем новом году!

[1] По ссылке kvan.tk/elka можно скачать детали для распечатки.

Художник Мария Усеинова

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

Иван Высоцкий

ПРИКЛЮЧЕНИЯ СТАСА

Fish or chicken?

Окончание. Начало в № 11, 2021

Стас уже было подумывал, как устроить суммирование кучи чисел в Excel, и даже уже почти придумал, когда услышал папин голос. Папа как будто читал мысли Стаса.

– Обычно вероятность одного числа не интересна.

– Почему?

– Чаще нужно знать суммарную вероятность нескольких значений. Например, интересно знать вероятность того, что куролюбов не больше, чем 150.

– Это нужно складывать кучу чисел.

– Об этом позаботились разработчики электронных таблиц. Параметр «интегральная» нужно сделать единицей. И тогда та же функция всё просуммирует сама – она посчитает вероятность того, что число куролюбов будет в пределах от 0 до 150. Только нужно немного поправить ячейку A6: мы же теперь ищем не вероятность ровно *k* куролюбов, а вероятность того, что их не больше, чем *k*. – Папа тут же это сделал.

	A	B
1	**Расчёт числа куролюбов**	
2		
3	Вероятность *p*=	0,5
4	Число пассажиров *n* =	300
5	Число куролюбов *k*=	150
6	Вероятность *P*(<=*k*)=	=БИНОМРАСП (B5; B4; B3; 1)

– И вот что получается. – Папа нажал ввод:

6	Вероятность *P*(<=*k*)=	0,523

Стас секунду подумал и понял:

– То есть если авиакомпания запасла 150 порций с курицей, то этого хватит с вероятностью 0,523. А с вероятностью 0,477 не хватит, и будут недовольные куролюбы.

– Да, но не забудь про рыбоедов. Если нет недовольных куролюбов, вполне могут оказаться недовольные любители рыбы. С ними та же история.

– Давай увеличивать число порций курицы, – заявил Стас.

– Сильно?

– Чтобы курицы наверняка хватило!

– Наверняка? Тогда я скажу без расчёта: нужно ровно 300 порций.

– Ладно, не наверняка. Нужно, чтобы курицы хватило с очень большой вероятностью. Ты сам говорил, что в жизни задачу достаточно решить почти наверняка, и это гораздо дешевле.

– Что такое «почти» в твоём понимании? – Папа пошёл в наступление.

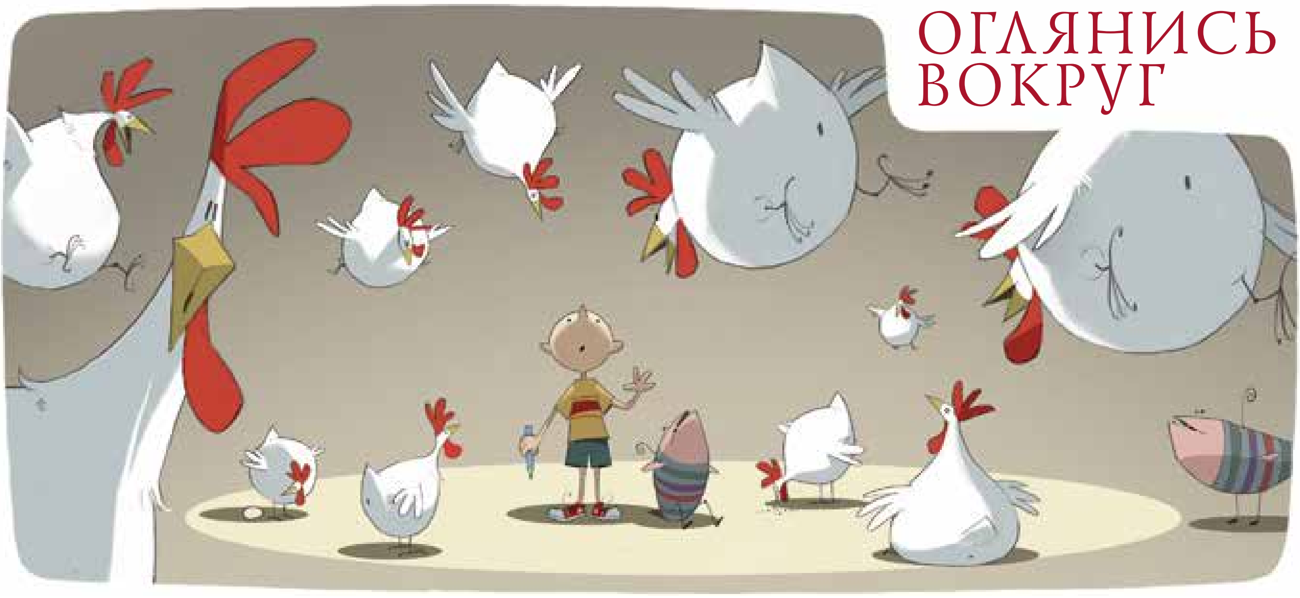
– Ну не знаю. Например, курицы должно хватить с вероятностью 0,95.

– Хорошо. Значит, нас интересует верхняя оценка числа куролюбов с вероятностью ошибки 0,05 или меньше. – Папа был серьёзен. – Увеличим число в ячейке B5. Например, на 10.

Стас вписал в B5 число 160. Компьютер ответил: вероятность того, что число куролюбов не больше, чем 160, равна 0,887. Мало. Теперь 170. Вероятность стала 0,991. Перебор. Стас начал уменьшать число куролюбов. Быстро обнаружилось, что вероятность не более 163 куролюбов в самолёте равна 0,941, а вероятность того, что их не более 164, равна 0,953. Как раз.

	A	B
1	**Расчёт числа куролюбов**	
2		
3	Вероятность *p*=	0,5
4	Число пассажиров *n* =	300
5	Число куролюбов *k*=	164
6	Вероятность *P*(<=*k*)=	0,953

Вы можете самостоятельно рассчитать число куролюбов, скачав папин файл: kvan.tk/chicken



Теперь Стас понял, почему папа предусмотрительно назвал таблицу «Расчёт числа», а не «Расчёт вероятностей». Значит, заранее знал, куда приведут Стаса вопросы и ответы.

– Так! Значит, авиакомпания должна загрузить 164 порции с курицей. Тогда недовольных куролюбов почти наверняка не будет – с вероятностью 0,953. То же самое с рыбоедами – берём 164 порции с рыбой, и с вероятностью 0,953 не будет недовольных рыбоедов. Классно! Стюардессам редко придётся напускать на себя скорбный вид и извиняться. Если авиакомпания заботится о своих стюардессах, она должна учитывать это! Ведь нужно всего-то 28 лишних порций. Это же совсем немного!

Стас провозглашал результаты исследования довольно громко и сопровождал речь широкими жестами. Чуть не разбудил соседа и привлёк внимание стюардессы, которая больше не выглядела скорбно. Она вежливо поинтересовалась вслух, не может ли чем-нибудь помочь (а про себя – почему юный пассажир голосит и машет руками, как непризнанный поэт на конкурсе молодых дарований). Стас стушевался и сказал, что ничего не нужно, но тут же передумал и попросил стакан яблочного сока. Немного помолчал и снова пристал к отцу:

– Теперь понятно, как найти вероятность того, что куролюбов не больше, чем 164. А как узнать вероятность «не меньше»?

– То есть ты хочешь двусторонний прогноз?

– Да.

– С помощью той же функции БИНОМРАСП.

– А как?

– Сам сообрази.

Стас принялся соображать. Сначала мысли не хотели уходить далеко от вопроса. Потом он, наконец, сдвинулся с места: например, хочу найти вероятность того, что куролюбов от 140 до 160. Стас вернулся к идее сложения многих вероятностей, она ему снова показалась отвратительной, и, наверно, поэтому он тут же понял, что нуж-

но сделать. Действительно, оказалось, что можно вместо сложения кучи чисел обойтись одним вычитанием. Через минуту Стас удовлетворённо откинулся в кресле. Вероятность того, что куролюбов от 140 до 160, оказалась равна 0,775. То есть если заявить, что в аэробусе от 140 до 160 любителей курицы, то вероятность ошибки будет 0,225.

Так, а теперь узнаем, каким должен быть прогноз числа куролюбов, чтобы вероятность ошибки стала малой, скажем, меньше, чем 0,01. Легко. Подбором Стас нашёл, что от 128 до 172. Стас поделился своими соображениями с папой, тот глянул на экран и одобрительно хмыкнул.

Некоторое время Стас развлекался с таблицей, меняя число пассажиров, а потом вероятность в ячейке B3. Затем спросил:

– Пап, а ведь на самом деле не 0,5, правда?

– В смысле? Вероятность предпочтения курицы? Не знаю. Ты сам предложил 0,5. Для определённости, – папа явно ехидничал.

– Но ведь можно её узнать по правде?

– Можно. Нужно только провести опрос в нескольких больших самолётах.

– И тогда можно провести такой расчёт?

– Конечно.

– А авиакомпания это делает?

– Не знаю. Серьёзная авиакомпания, наверно, делает.

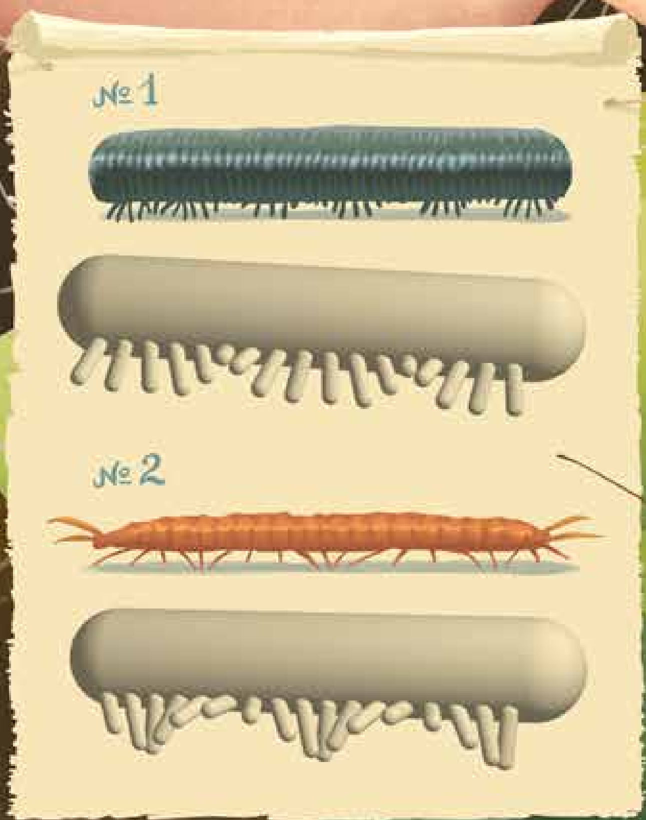
– А эта авиакомпания серьёзная? – Стас выразительно обвёл взглядом тушу аэробуса изнутри и воззрился на проходящую мимо стюардессу, пытаясь понять, серьёзная она или не очень. Девушка улыбнулась Стасу и предложила ещё соку. Стас решил, что несерьёзная, но ей идёт.

Стас поменял числа в таблице так, что получилась задача про четырёх детей, затем про пятерых детей, про шестерых и даже про семерых. Потом он думал, что бы ещё такое посчитать, и, наверно, придумал бы, но тут снова подошла несерьёзная девушка и попросила убрать ноутбук, поднять столик и всё такое прочее – аэробус начал снижаться, примериваясь к полосе аэропорта в Ларнаке.

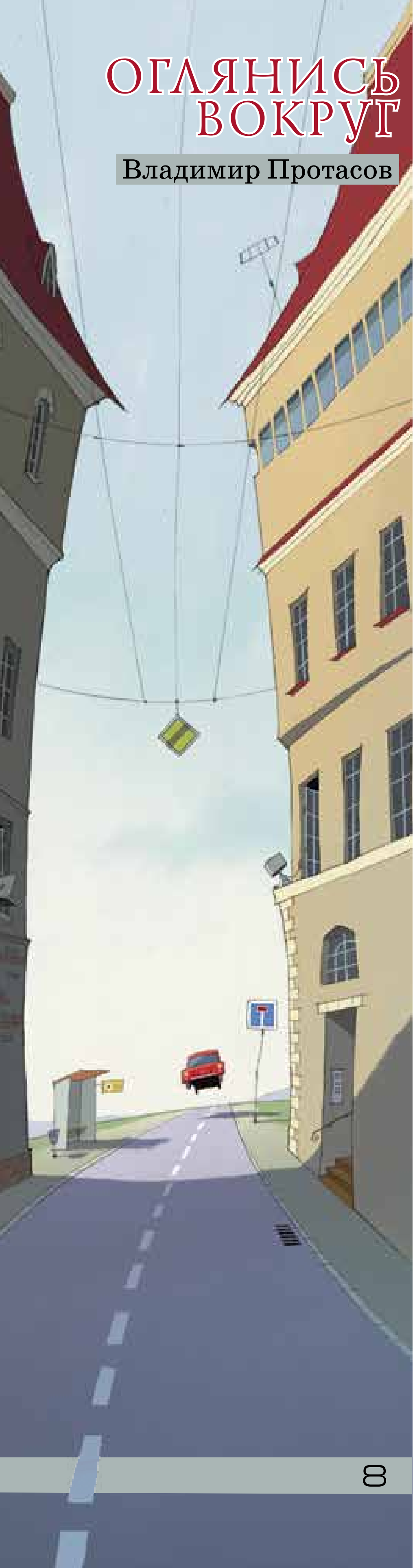
Художник Алексей Вайнер

Две многоножки

Если обратить внимание на ноги идущей многоножки, можно заметить, что по ним будто идут волны: как болельщики на стадионе, ноги слаженно поднимаются одна за другой, и получается волна. На рисунке – две идущие многоножки. Как по положению их ног понять, идёт у них эта волна ног по ходу движения или против?



Автор Александр Бердников
Художник Мария Усеинова



Владимир Протасов

ТОЧКА ТОРРИЧЕЛЛИ и СЕТИ ШТЕЙНЕРА

Окончание. Начало в №№ 10–11

Для построения нам понадобится одно несложное, но очень важное утверждение. Пусть мы соединили города допустимой сетью дорог. Город будем называть *тупиковым* или просто *тупиком,* если из него выходит только одна дорога. Заметим, что тупиковых перекрёстков не бывает.

Вспомогательный факт: в любой допустимой сети найдётся либо город, из которого идёт дорога в тупик, либо перекрёсток, из которого выходят две дороги к тупикам. (При этом, конечно, как из города, так и из перекрёстка могут выходить и другие дороги.)

Доказательство простое. Среди всех путей в сети выберем путь, в котором наибольшее дорог. Он не замкнутый (таких не бывает), поэтому у него есть два конца. Возьмём любой конец. Это тупиковый город. Он соединён единственной дорогой с некоторой вершиной A. Если A – город, то из него выходит дорога в тупиковый город. Если же A – перекрёсток, то из него выходит ещё одна дорога в тупиковый город, иначе можно сделать путь из большего числа дорог.

ПОСТРОЕНИЕ КРАТЧАЙШИХ СЕТЕЙ

Сеть Штейнера будем строить так: найдем все допустимые сети, а из них выберем кратчайшую. Она и будет сетью Штейнера. Построение допустимой сети для k городов мы сведём к построению для $k-1$ городов. Так, постепенно спускаясь, дойдём до $k=2$. А для двух городов допустимая сеть состоит из одной дороги – отрезка между двумя городами.

Идея построения. Пусть допустимая сеть для k городов уже построена.

Если в ней есть город, из которого выходит дорога в тупик, то уберём эту дорогу вместе с тупиковым городом. Оставшаяся сеть тоже будет допустимой сетью, но уже для $k-1$ городов.

Если же в нашей сети есть перекрёсток (обозначим его C), из которого выходят две дороги к тупиковым городам (A и B), то поступим так. Построим на стороне AB треугольника ABC во внешнюю сторону равносторонний треугольник ABD. Теперь

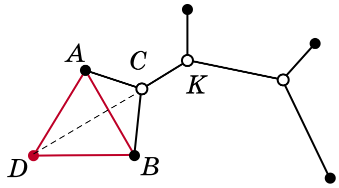


Рис. 11

уберём города A и B (вместе с дорогами, которые к ним ведут), заменив их одним новым городом D. Уберём вершину C и соединим два отрезка CD и CK в одну дорогу KD (рис. 11). Почему так можно сделать? Потому что $\angle ACB = 120°$, и по теореме 1 угол DCA равен $60°$. Поэтому отрезки CD и CK лежат на одной прямой. Эти отрезки составляют новую дорогу от точки K до тупикового города D. Мы снова получим допустимую сеть для $k-1$ городов ($k-2$ оставшихся городов плюс город D). Причём длина допустимой сети останется прежней, потому что $CD = CA + CB$ (теорема 1), то есть новая дорога CD компенсирует две убранные ($CD = CA + CB$).

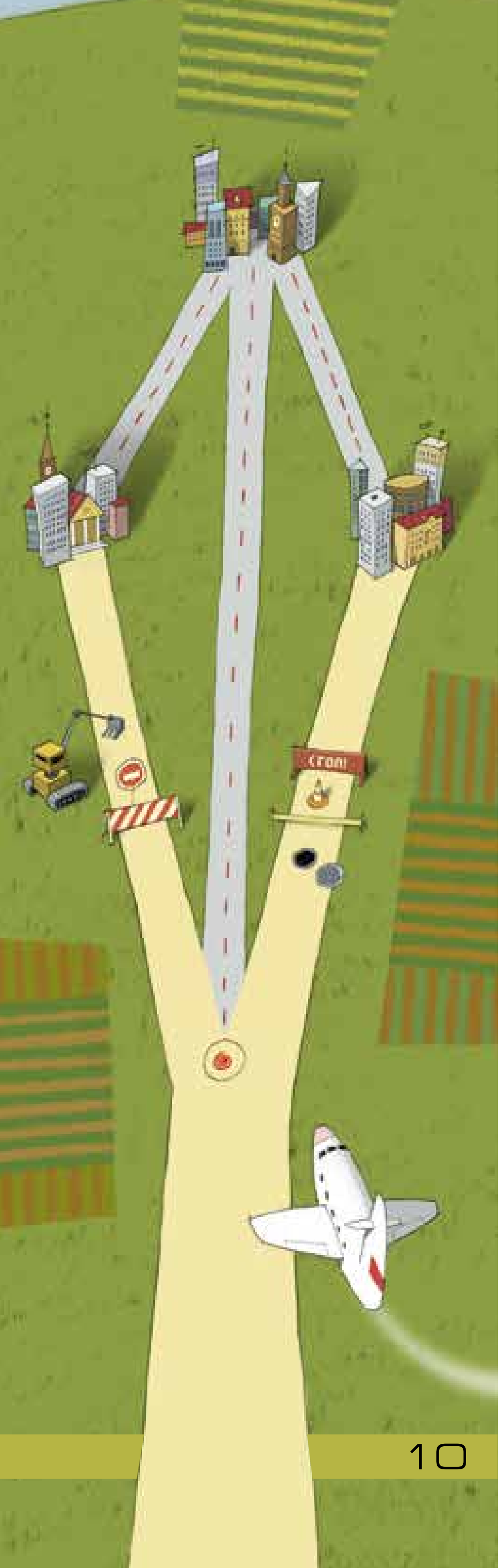
Так, уменьшая шаг за шагом число городов, придём к двум городам, а для них допустимая сеть – отрезок. Двигаясь обратно, мы можем, начиная с двух городов, восстановить всю сеть.

Теперь начинаем построение сетей. Будем строить их двумя способами, и в результате получим все допустимые сети, связывающие k городов

• Перебираем все наши города по одному, и для каждого города делаем такую процедуру.

Обозначим очередной город через A. Уберём его, и построим допустимую сеть, связывающую оставшиеся $k-1$ городов. А теперь соединяем A новой дорогой с любым другим городом B. Проверяем, что AB образует со второй дорогой, выходящей из B, угол, не меньший $120°$. Если это так, мы получили допустимую сеть для всех k городов. А если этот угол меньше $120°$, надо выбрать другой город вместо B. Так нам нужно перебрать все допустимые сети, связывающие наши $k-1$ городов, и для каждой сети – все возможные города B.

• Берём любую пару городов A, B и строим равносторонний треугольник ABD (их два, берём любой). Заменяем A, B одним городом D. Строим допустимую сеть для нового множества из $k-1$ городов, для которой город D тупиковый. На единственной дороге, выходящей из города D, найдём точку C, для которой $\angle ACB = 120°$, и делаем в ней новый перекрёсток. Заменяем дорогу DC двумя дорогами CA



и CB. Мы получили допустимую сеть для наших k городов. И так нам нужно перебрать все пары городов A и B. Для каждой пары рассматриваем обе возможности для точки D и в каждом случае перебираем все допустимые сети, для которых город D тупиковый.

Заметим, что точку C найти просто: в силу теоремы 1, угол ACD будет равен $60°$. Построим такую точку C на прямой, содержащей дорогу из точки D. И если C попала на саму дорогу, а не на её продолжение – получаем допустимую сеть.

Так мы построим все допустимые сети, и кратчайшая из них – сеть Штейнера.

ПРИМЕРЫ СЕТЕЙ ШТЕЙНЕРА

Треугольник. После примера с квадратом, когда вроде бы очевидный ответ оказался неверным, мы можем ожидать сюрпризов и от треугольника. Правда ли, что кратчайшая сеть дорог, связывающих три города, – это либо три дороги к единственному перекрёстку (точке Торричелли), либо две стороны, образующие угол не меньше $120°$ (когда таковой есть)? Применяем наш алгоритм построения сети Штейнера:

Случай 1. Убираем один город (скажем, A). Строим сеть Штейнера двух оставшихся городов – отрезок BC. Теперь возвращаем город A и соединяем его либо с B, либо с C. Пробуем B. Если угол ABC не меньше $120°$, то сеть Штейнера найдена – она состоит из дорог AB и BC (рис. 12а). Если нет, то пробуем C. Если угол ACB не меньше $120°$, то сеть Штейнера состоит из дорог AC и BC. Если же и это неверно, то переходим ко второму случаю.

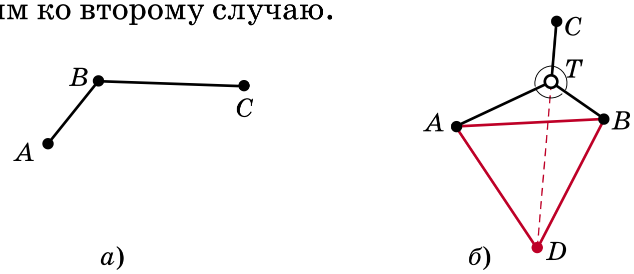


Рис. 12

Случай 2. Берём два любых города, скажем A и B. Строим на стороне AB равносторонний треугольник ABD. Убираем A и B и заменяем их городом D. Получили два города: C и D. Их сеть Штейнера – отрезок CD. Возвращаем A и B и находим на отрезке CD

точку T, для которой $\angle ATB = 120°$. Получаем точку Торричелли T и сеть Штейнера: дороги TA, TB, TC.

Итак, точка Торричелли определяет кратчайшую сеть для трёх городов. Здесь обошлось без сенсаций.

Квадрат. Какова кратчайшая система дорог для вершин квадрата? Пока можно точно сказать, что это не две диагонали. Во-первых, есть более короткая сеть (рис. 1). Во-вторых, в перекрёстке не могут сходиться четыре дороги. Будет ли сеть Штейнера иметь два перекрёстка или больше, сейчас узнаем.

Случай 1. Убираем один город. Из симметрии – неважно какой (пусть снова A). У оставшегося треугольника BCD углы меньше $120°$, поэтому у него есть точка Торричелли T, а его сеть Штейнера состоит из отрезков TB, TC, TD (рис. 13). Теперь мы должны вернуть город A и соединить его с одним из трёх городов, чтобы угол между дорогами получился не меньше $120°$. Таких городов нет. Значит, этот случай невозможен.

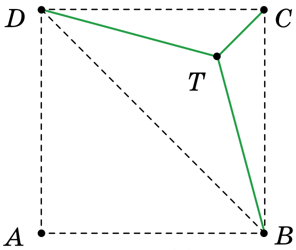


Рис. 13

Случай 2. Убираем два города. Это либо соседние вершины квадрата, либо противоположные. Начнём со второго случая – убрали вершины A и C. Строим равносторонний треугольник ACK и заменяем города A и C городом K. Получились три города на одной прямой: K, B и D. Их сеть Штейнера – дороги BD и DK. Теперь возвращаем точки A и C и делаем на отрезке DB перекрёсток M, для которого $\angle AMC = 120°$ (рис. 14). Тогда в этом перекрёстке будут сходиться 4 дороги, чего не может быть.

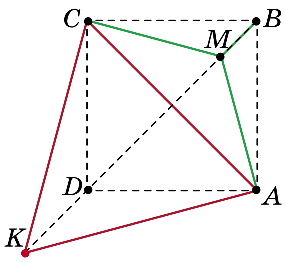
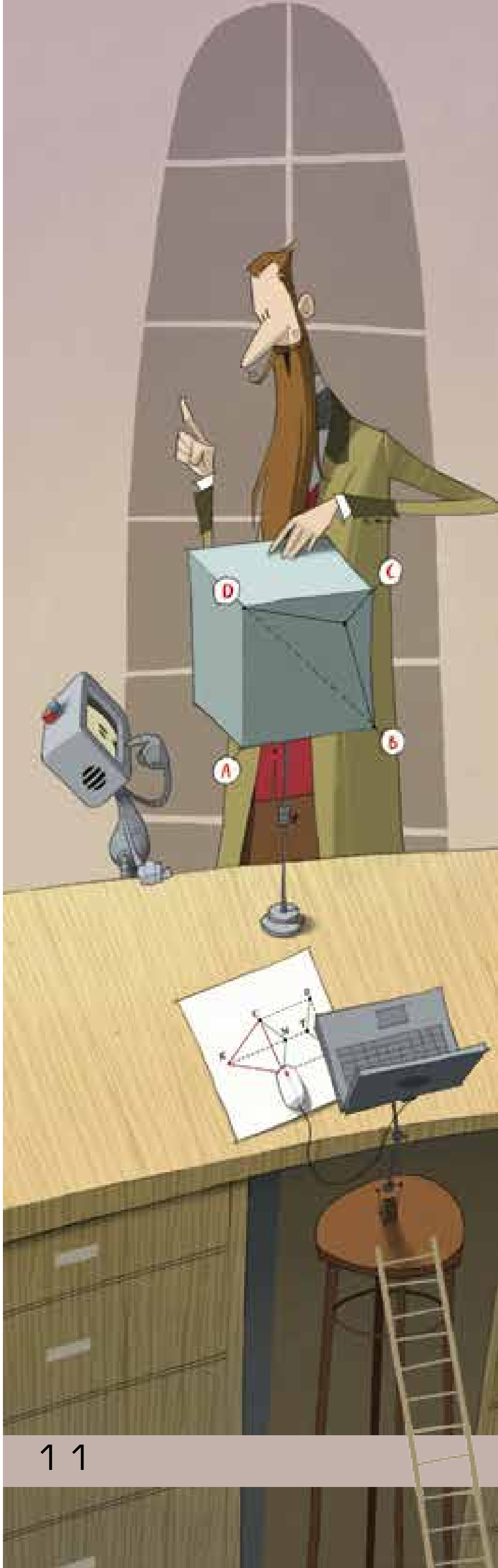


Рис. 14

А теперь предположим, что убрали две соседние вершины квадрата, пусть C и D. Строим равносторонний треугольник CDK и заменяем C и D городом K. Сеть Штейнера треугольника KAB – три дороги, соединяющие его вершины с его точкой Торричелли T. Теперь возвращаем C и D и находим на отрезке KT точку M, для которой $\angle CMD = 120°$. Всё, сеть Штейнера по-



строена. У неё два перекрёстка – в точках T и M (рис. 15).

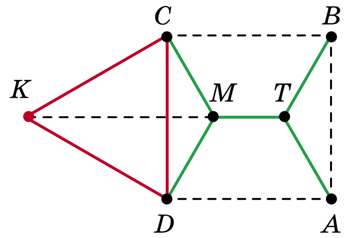


Рис. 15

Мы связали вершины квадрата кратчайшей системой дорог. Если сторона квадрата равна 100 км, то длина сети равна $100(\sqrt{3}+1)=273{,}2\ldots$ км.

Другие примеры сетей Штейнера – в упражнениях 7 – 11.

А ЧТО В ПРОСТРАНСТВЕ?

Если есть несколько точек в пространстве и паучок хочет связать их паутиной кратчайшей длины, мы снова получим задачу о кратчайшей системе «дорог». Интересно, что пространственная сеть Штейнера тоже будет обладать свойствами 1, 2, 3. Убедитесь сами, что доказательства мало чем отличаются. Например, если 4 точки расположены в вершинах правильного тетраэдра (то есть в вершинах пирамидки на одном и том же расстоянии друг от друга), то какова будет сеть Штейнера? Кажется, что нужно просто соединить 4 точки с центром тетраэдра. По аналогии с равносторонним треугольником: соединяем вершины с центром и получаем сеть Штейнера. Но нет, теперь так не получится. В перекрёстке не могут сходиться четыре дороги! А какая же будет сеть в этом случае? Об этом – упражнение 12.

НАПОСЛЕДОК – О МЫЛЬНЫХ ПЛЁНКАХ

Возьмём две параллельные прозрачные доски (например, сделанные из оргстекла), соединённые стержнями. Между досками должен быть зазор. Опустим эту конструкцию в мыльный раствор. А потом вытащим. Между стержнями образуются плёночные перегородки. Какую фигуру они образуют? Поскольку, как мы знаем, физическая система стремится уменьшить свою потенциальную энергию, общая длина перегородок должна быть минимальна. Естественно предположить, что перегородки образуют сеть Штейнера для «городов» – стержней. Однако, проделав этот эксперимент несколько раз, мы убедимся, что фигуры получатся разные. Как же так? На самом деле, всегда будут получаться допустимые сети (обладающие свойствами 1, 2, 3). Среди них, конечно, будет и сеть Штейнера, но могут получиться и другие. Дело в том, что мыльные плёнки примут положение, как скажут математики, *локального минимума* длины. Не будем углубляться в этот вопрос, скажем только, что допустимым сетям как раз соответствуют локальные минимумы. Для трёх точек допустимая сеть только одна, поэтому и мыльные плёнки всегда будут принимать одну и ту же форму. То же (с точностью до симметрии) – для квадрата (рис. 16).

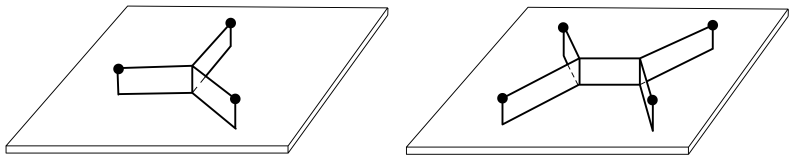
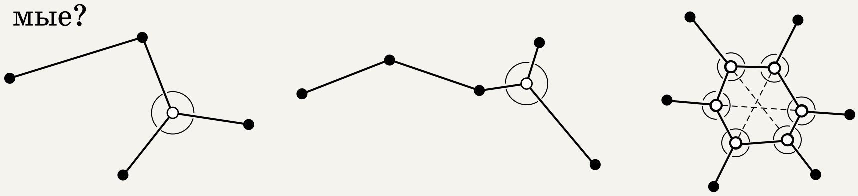


Рис. 16

Упражнение 6. Какие из сетей на рисунке 17 допустимые?



а) *б*) *в*)

Рис. 17

Упражнение 7. Четыре точки расположены в вершинах трапеции. Придумайте такую трапецию, чтобы сеть Штейнера состояла из трёх отрезков.

Упражнение 8. Постройте сеть Штейнера для четырёх вершин прямоугольника 3×4.

Упражнение 9. Даны 6 точек: вершины прямоугольника 1×2 и середины двух его больших сторон. Постройте несколько допустимых сетей для этих точек. Чем больше – тем лучше.

Упражнение 10. Как может выглядеть сеть Штейнера для вершин правильного пятиугольника? Предложите несколько вариантов. *Указание.* Можете провести эксперимент с мыльными плёнками, но можно и без этого.

Упражнение 11. Две деревни расположены с одной стороны от прямолинейной дороги на расстоянии 10 км друг от друга и на равном расстоянии 5 км от реки. Где нужно поставить магазин, чтобы сумма расстояний от него до деревень и до дороги была наименьшей? *Указание.* Может помочь симметрия относительно дороги.

Упражнение 12. Как вы думаете, как выглядит сеть Штейнера для вершин правильного тетраэдра?

Художник Алексей Вайнер

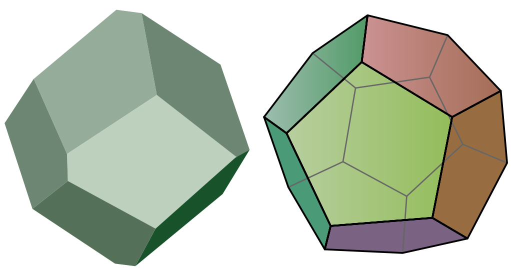
ПЕНТАГОНДОДЕКАЭДР – КАЛЕНДАРЬ

Наталья Нетрусова

Предлагаем вам склеить календарь на будущий год в виде... пентагондодекаэдра. У таких многогранников по 12 граней, все грани – равные пятиугольники с четырьмя равными сторонами и пятой особой стороной.

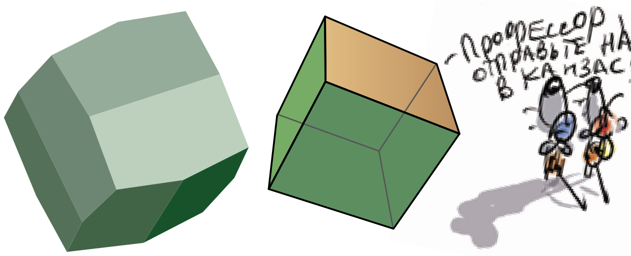
Если особую сторону взять равной нулю, получится ромбододекаэдр – многогранник, у которого 12 граней в виде ромба с отношением диагоналей $\sqrt{2}$. О том, что существует ровно два ромбододекаэдра (с отношением диагоналей, равным золотому сечению и $\sqrt{2}$), «Квантик» писал в № 8 за 2019 год, с. 9.

Если постепенно увеличивать сторону, в какой-то момент она станет равной остальным четырём сторонам – получится правильный додекаэдр.



В природе встречаются кристаллы пирита в виде пентагондодекаэдров. У таких кристаллов отношение длины особой стороны к остальным примерно 1,3.

Продолжим увеличивать сторону. Когда она будет в 2 раза длиннее остальных сторон, две соседние грани, разделённые особой стороной, окажутся в одной плоскости, и многогранник станет кубом.



Существуют также невыпуклые пентагондодекаэдры.

Для склейки календаря мы взяли пентагондодекаэдр, у которого особая сторона примерно в 1,7 раз больше остальных сторон. Вырежьте две части развёртки из двух следующих страниц, склейте соседние грани каждой части с помощью клапанов. Совместить две части друг с другом можно двумя способами. Выберите тот, в котором на каждой склейке есть один клапан.

Выкройку можно также найти по ссылке kvan.tk/pentagon

2022

ЯНВАРЬ 2022

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

ФЕВРАЛЬ

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28						

МАРТ

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

АПРЕЛЬ

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

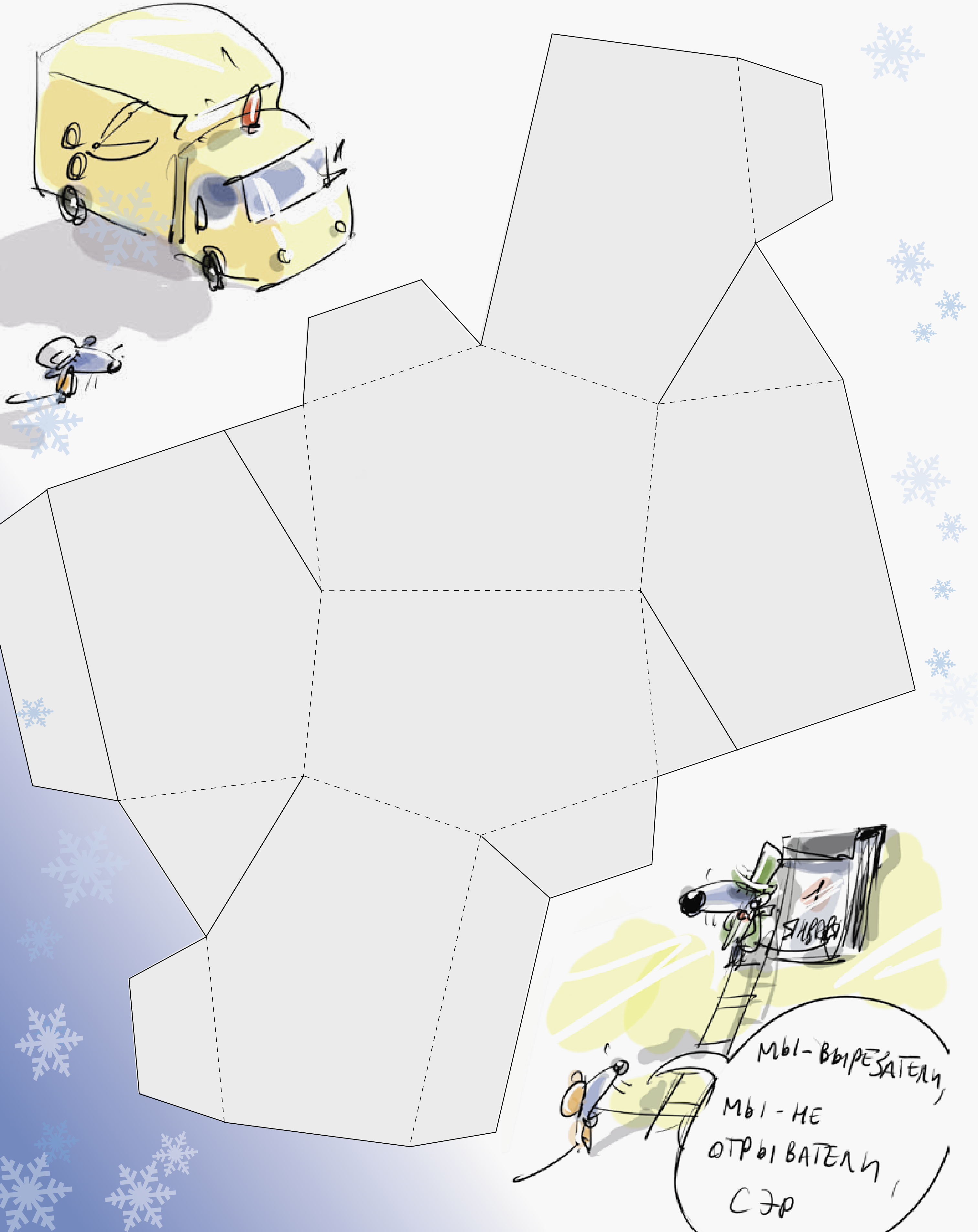
Разрежьте по сплошным и согните по пунктирным линиям.

МАЙ

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

ИЮНЬ

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			


Мы- вырезатели,
Мы - не
отрыватели,
Сэр

ДЕКАБРЬ

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

НОЯБРЬ

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				

ИЮЛЬ

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

СЕНТЯБРЬ

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

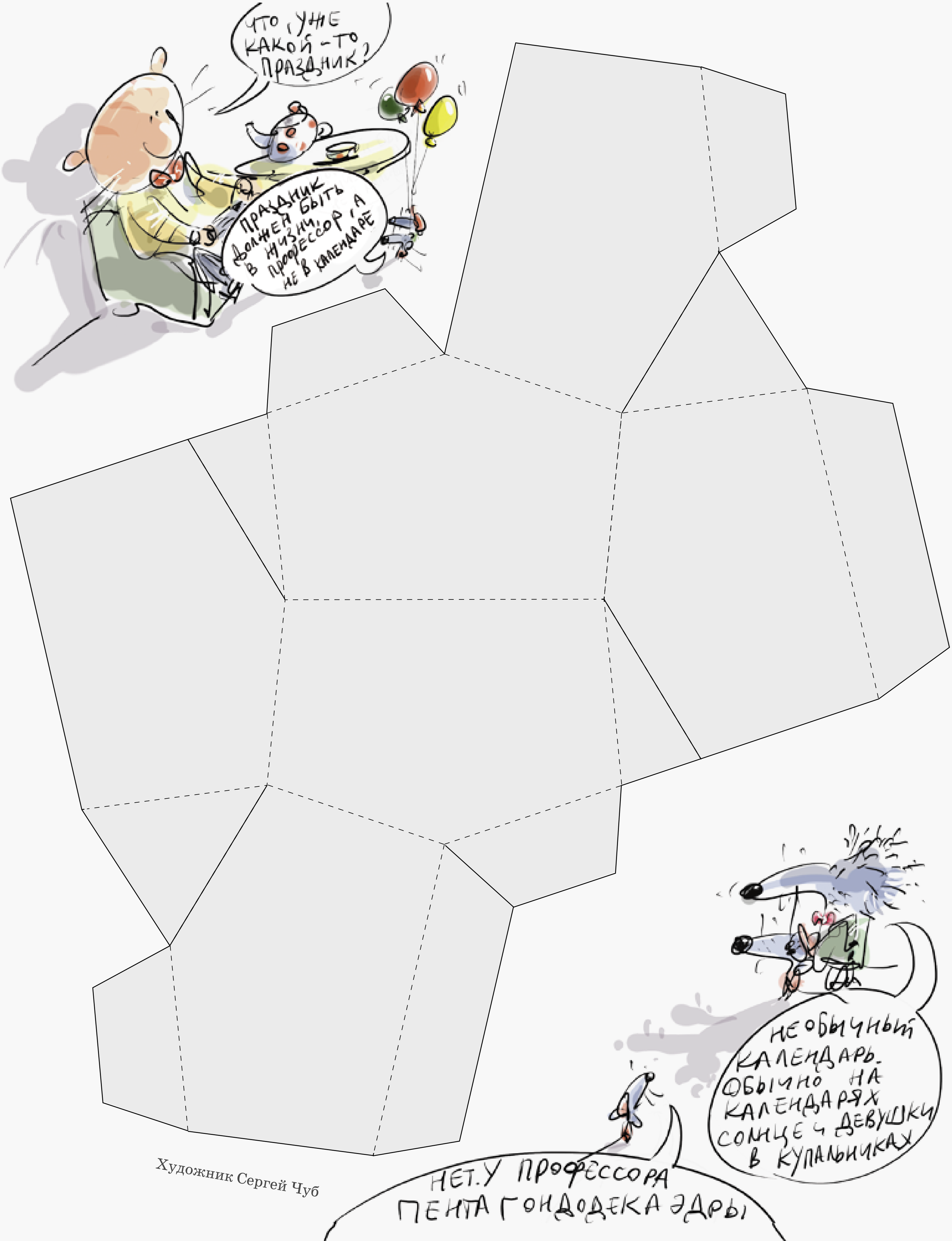
АВГУСТ

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

ОКТЯБРЬ

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

Разрежьте по сплошным и согните по пунктирным линиям.



Художник Сергей Чуб

Михаил Иомдин,
ученик 9 класса

СОМ АЛИ

Даны названия стран на русском языке и переводы некоторых из них на сомалийский язык, записанные письменностью *исмания*, которая была изобретена для этого языка в начале XX века.

Установите правильные соответствия. (Помните, что для некоторых русских названий соответствий в списке нет.)

Бангладеш	1. 𐒑𐒖𐒐𐒂𐒖
Габон	2. 𐒁𐒖𐒒𐒌𐒐𐒖𐒆𐒗𐒉
Казахстан	3. 𐒌𐒖𐒁𐒙𐒒
Лаос	4. 𐒁𐒗𐒇𐒚
Латвия	5. 𐒒𐒗𐒁𐒖𐒐
Мадагаскар	6. 𐒍𐒘𐒃𐒘
Малайзия	7. 𐒐𐒖𐒂𐒍𐒘𐒕𐒖
Мальта	8. 𐒑𐒙𐒐𐒆𐒙𐒍𐒖
Молдова	9. 𐒗𐒈𐒂𐒙𐒒𐒘𐒕𐒖
Непал	10. 𐒐𐒖𐒙𐒈
Панама	11. 𐒏𐒖𐒈𐒖𐒅𐒈𐒂𐒖𐒒
Перу	12. 𐒑𐒖𐒐𐒖𐒕𐒈𐒘𐒕𐒖
Сальвадор	
Того	
Узбекистан	
Фиджи	
Эстония	

Даны ещё четыре названия стран. Переведите их на русский язык.

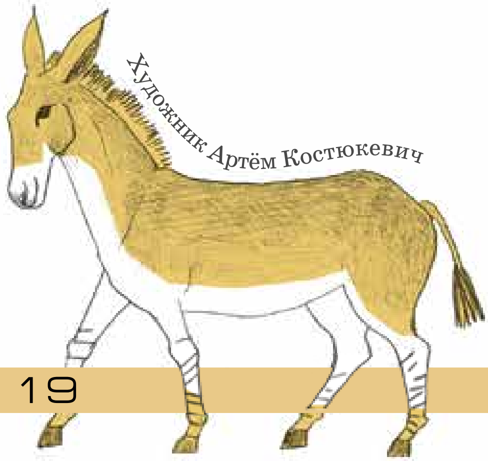
𐒍𐒖𐒇𐒖𐒒𐒈𐒕𐒈𐒏𐒖

𐒃𐒖𐒁𐒛𐒒

𐒏𐒝𐒒𐒍𐒚𐒇 𐒏𐒓𐒇𐒘𐒕𐒖

𐒏𐒝𐒒𐒍𐒚𐒇 𐒖𐒍𐒇𐒘𐒏𐒖

Распечатайте страницу, чтобы вам было удобно решать задачу: https://kvan.tk/somali



Художник Артём Костюкевич

Борис Иомдин, Илья Иткин

ПУШКИН, НАБОКОВ, ИСКАНДЕР

Две из этих историй известны, а одна полностью придумана. Надо догадаться, какая именно. Вычислить её можно по какой-нибудь нелепости, несуразности, спрятанной в тексте. Попробуйте!

ПУШКИН

Как известно, Александр Сергеевич Пушкин был правнуком выходца из Африки Ибрагима (Абрама Петровича) Ганнибала и с юных лет отличался поистине африканским темпераментом. Однажды на балу 18-летний Пушкин захотел пригласить понравившуюся ему девушку на танец, но оказалось, что та собирается танцевать с другим потомком «арапа Петра Великого», двоюродным дядей Пушкина Павлом Исааковичем Ганнибалом. Взбешённый поэт не нашёл ничего лучше, как немедленно вызвать обидчика на дуэль. Никакие уговоры не помогали, дело шло к катастрофе, но тут на Павла Исааковича снизошло вдохновение. Никогда не писавший стихов, он обратился к племяннику с остроумным экспромтом:

Хоть ты, Саша, среди бала
Вызвал Павла Ганнибала,
Но, ей-богу, Ганнибал
Ссорой не подгадит бал!

Тут уж о дуэли не могло быть и речи: растроганный Пушкин бросился в объятия дяди и после всегда сохранял с ним дружеские отношения.

НАБОКОВ

Знаменитый русский (а впоследствии – американский) писатель Владимир Набоков очень любил разные игры со словами, в том числе анаграммы – составление из букв одного слова или словосочетания других слов или словосочетаний. В качестве исходного словосочетания он часто использовал собственные имя и фамилию: в его романах и письмах появляются и *Вивиан Дамор Блок*, и *Блавдак Виномори*, и *Дориан Вивалкомб*, и *барон Клим Авидов*... Но больше всего Набоков гордился таким персонажем, как *адмирал Иван Бовк*. И недаром:

остальных своих героев он придумал сам, так что их могли бы звать и как-то иначе, а адмирал Иван Иванович Бовк – знаменитый русский флотоводец. В 1714 году во время сражения у мыса Гангут он командовал кораблём «Элефант» и за выдающийся вклад в победу над шведами получил от Петра I чин контр-адмирала. Больше того: по документам из семейного архива Набоковых получалось, что Иван Бовк приходился писателю очень дальним, но всё-таки родственником.

ИСКАНДЕР

Фазиль Искандер – замечательный русский писатель – родился и вырос в Сухуми, столице Абхазии, и всю жизнь писал об Абхазии на русском языке. Отец Искандера был родом из Персии, мать – из абхазского села Чегем. Неудивительно, что герои книг Искандера знают много языков: абхазский, русский, грузинский, армянский, турецкий, персидский... У Искандера есть цикл рассказов о приключениях Чика – этот мальчик живёт в городе Мухус, а лето проводит у дедушки в Чегеме. *Мухус* – конечно, «перевёрнутый» *Сухум* (так этот город называется по-абхазски, Сухуми – его грузинское название). Чик «унаследовал» от своего автора не только родные места, но и имя. Скорее всего, это сокращение от *Фазильчик*: так писателя называли в детстве. Героя другого произведения Искандера, плутовского романа «Сандро из Чегема», зовут Сандро. Роман написан от первого лица, рассказчик называет героя дядей. Но *Сандро* – сокращение от *Александр*, по-персидски *Искандер*. Выходит, автор назвал обоих героев своих самых известных произведений как самого себя: мальчика – своим детским именем, а взрослого – своей фамилией.

Художник Капыч

XLIII ТУРНИР ГОРОДОВ
ОСЕННИЙ ТУР, 8–9 КЛАССЫ

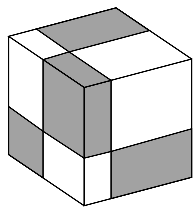
10 и 24 октября 2021 года состоялся осенний тур XLIII Турнира Городов – международного математического соревнования для школьников. Приводим базовый и сложный варианты для 8–9 классов. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов.

Базовый вариант

1 (4 балла). Турнир Городов проводится раз в год. Сейчас год проведения осеннего тура делится на номер турнира: $2021 : 43 = 47$. Сколько ещё раз человечество сможет наблюдать это удивительное явление?

Алексей Заславский

2 (5 баллов). Дан куб. Три плоскости, параллельные граням, разделили его на 8 параллелепипедов. Их покрасили в шахматном порядке. Объёмы чёрных параллелепипедов оказались равны 1, 6, 8, 12. Найдите объёмы белых параллелепипедов.



Олег Смирнов

3 (5 баллов). У пирата есть пять мешочков с монетами, по 30 монет в каждом. Он знает, что в одном лежат золотые монеты, в другом – серебряные, в третьем – бронзовые, а в каждом из двух оставшихся поровну золотых, серебряных и бронзовых. Можно одновременно достать любое число монет из любых мешочков и посмотреть, что это за монеты (вынимаются монеты один раз). Какое наименьшее число монет нужно достать, чтобы наверняка узнать содержимое хотя бы одного мешочка?

Михаил Евдокимов

4 (5 баллов). Выпуклый n-угольник ($n > 4$) обладает таким свойством: если диагональ отсекает от него треугольник, то этот треугольник равнобедренный.

Докажите, что среди любых четырёх сторон этого n-угольника есть хотя бы две равных.

Максим Дидин

5 (5 баллов). В турнире участвовали 20 шахматистов. Каждый играл с каждым один раз белыми и один раз чёрными. Обязательно ли найдутся такие два шахматиста, что один из них выиграл не меньше партий белыми и не меньше партий чёрными, чем другой?

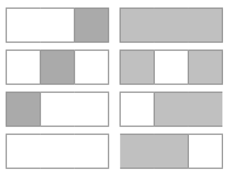
Борис Френкин

Сложный вариант

1 (5 баллов). В ряд записаны $n > 2$ различных ненулевых чисел, причём каждое следующее больше предыдущего на одну и ту же величину. Обратные к этим n числам тоже удалось записать в ряд (возможно, в другом порядке) так, что каждое следующее больше предыдущего на одну и ту же величину (возможно, иную, чем в первом случае). Чему могло равняться n?

Алексей Заславский

2 (6 баллов). На столе лежат 8 всевозможных горизонтальных полосок 1×3 из трёх квадратиков 1×1, каждый из которых либо белый, либо серый (см. рисунок). Разрешается переносить полоски в любых направлениях на любые (не обязательно целые) расстояния, не поворачивая и не переворачивая. Можно ли расположить полоски на столе так, чтобы все белые точки образовали многоугольник, ограниченный замкнутой несамопересекающейся ломаной, и все серые – тоже? (Полоски не должны перекрываться.)



Дмитрий Ильинский

3 (7 баллов). В прямоугольный треугольник с гипотенузой длины 1 вписали окружность. Через точки её касания с его катетами провели прямую. Отрезок какой длины может высекать на этой прямой описанная окружность исходного треугольника?

Максим Волчкевич

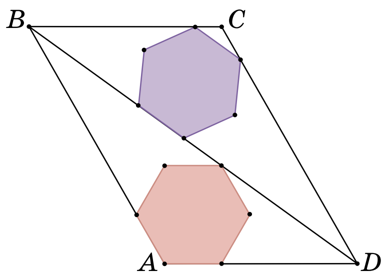
XLIII ТУРНИР ГОРОДОВ

ОСЕННИЙ ТУР, 8–9 КЛАССЫ

4 (8 баллов). На доске написано число 7. Петя и Вася по очереди приписывают к текущему числу по одной цифре, начинает Петя. Цифру можно приписать в начало числа (кроме нуля), в его конец или между любыми двумя цифрами. Побеждает тот, после чьего хода число на доске станет точным квадратом. Может ли кто-нибудь гарантированно победить, как бы ни играл соперник?

Александр Грибалко

5 (9 баллов). Параллелограмм $ABCD$ разделён диагональю BD на два равных треугольника. В треугольник ABD вписан правильный шестиугольник так, что две его соседние стороны лежат на AB и AD, а одна из вершин – на BD. В треугольник CBD вписан правильный шестиугольник так, что две его соседние вершины лежат на CB и CD, а одна из сторон – на BD. Какой из шестиугольников больше?



Константин Кноп

6 (9 баллов). Пусть $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа x (то есть наибольшее целое число, не превосходящее x). Докажите для любых натуральных чисел a_1, $a_2, \ldots, a_n$ неравенство

$$\left\lfloor \frac{a_1^2}{a_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2^2}{a_3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{a_n^2}{a_1} \right\rfloor \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Максим Дидин

7 (12 баллов). На столе в ряд лежат 20 плюшек с сахаром и 20 с корицей в произвольном порядке. Малыш и Карлсон берут их по очереди, начинает Малыш. За ход можно взять одну плюшку с любого края. Малыш хочет, чтобы ему в итоге досталось по десять плюшек каждого вида, а Карлсон пытается ему помешать. При любом ли начальном расположении плюшек Малыш может достичь своей цели, как бы ни действовал Карлсон?

Александр Грибалко

Художник Сергей Чуб

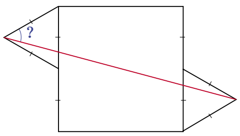
НАШ КОНКУРС, II тур («Квантик» № 10, 2021)

6. *Кресла в самолёте расположены в 30 рядов. Расстояние между рядами одно и то же, расстояние между спинками кресел, идущих друг за другом, равно 80 см. С целью добавить новые ряды, пустое пространство перед каждым креслом решили уменьшить на 5 см. Сколько теперь поместится рядов в салоне самолёта?*

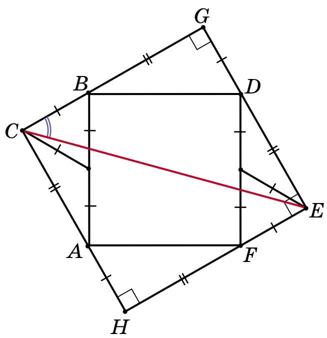
Ответ: 32. Всего добавилось $30 \cdot 5 = 150$ см свободного места, его как раз хватит на два новых ряда кресел (с расстоянием 75 см между спинками кресел, идущих друг за другом).

Замечание. Если изначально могло быть лишнее свободное место, но его не хватало на ещё один ряд (скажем, 75 см), то после уменьшения расстояния могло поместиться и 3 новых ряда.

7. *Во внешнюю сторону от квадрата построены два равносторонних треугольника с вдвое меньшей стороной (см. рисунок). Чему равен угол, отмеченный знаком вопроса?*



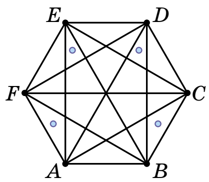
Ответ: 45°. Заметим, что вершины A, B и C образуют прямоугольный треугольник (по условию его медиана из вершины C равна половине стороны AB, к которой она проведена.) То же верно и для треугольника DEF. Продлив стороны CA, CB, ED и EF, получим ещё два таких же прямоугольных треугольника BGD и AFH, а значит, $CGEH$ – квадрат, и искомый угол между его диагональю CE и стороной CG равен 45°.



8. *Несколько интровертов и экстравертов хотят разбиться на четыре команды. Каждый по очереди выбирает команду, причём интроверты выбирают какую-то команду минимального размера на момент выбора, а экстраверты – максимального. Могли ли команды получиться попарно различного размера?*

Ответ: нет. Посмотрим на размеры трёх меньших команд. Изначально они равны (нулю). Добавление экстраверта не меняет эти размеры, а интроверт может увеличить разницу между ними, только если до него они были равны, причём разница увеличится до 1. Значит, размеры трёх меньших команд отличаются не больше чем на 1. Тогда три размера принимают два значения, и какие-то два размера совпадают.

9. *Дан правильный шестиугольник ABCDEF. Любые три его вершины образуют треугольник, всего таких треугольников 20. Квантик хочет отметить внутри шестиугольника как можно меньше точек, чтобы внутрь каждого из этих 20 треугольников попала хоть одна отмеченная точка. Приведите пример, как отметить точки, чтобы выполнялось это условие, и докажите, что меньше точек отметить нельзя.*



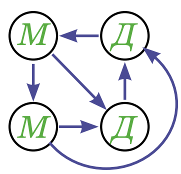
Пример, как отметить 4 точки, см. на рисунке. Менее чем 4 точками не обойтись: отрезки EA, AC и CE делят шестиугольник на 4 непересекающихся треугольника, в каждом должна быть хоть одна отмеченная точка.

10. *В классе в турнире по армрестлингу каждый сыграл с каждым (ничьих в армрестлинге не бывает). Каждый мальчик одержал вдвое больше побед, чем потерпел поражений, а каждая девочка – вдвое меньше побед, чем поражений.*

а) Приведите пример, как такое могло быть.

б) Обязательно ли при этом какая-нибудь девочка победила какого-нибудь мальчика?

Ответ: а) см. рисунок; б) да.



б) Игр у всех было поровну, поэтому у мальчиков поровну поражений (треть от числа игр). Пусть каждый мальчик выиграл у каждой девочки. Тогда все поражения у мальчиков были от мальчиков, и раз поражений поровну, то и побед у каждого мальчика над мальчиками одинаково.

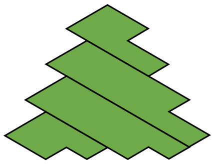
Пусть мальчиков $М$, а девочек $Д$. Тогда каждый мальчик сыграл $М-1$ партий с мальчиками и $Д$ партий с девочками. Из них $(М-1)/2+ + Д$ побед и $(М-1)/2$ поражений. Но тогда $Д=(М-1)/2$. Из аналогичного рассуждения для девочек $М=(Д-1)/2$, что невозможно.

ГРОМ И МОЛНИЯ («Квантик» № 11, 2021)

Звук грома доходит от места, где ударила молния, не сразу: скорость звука – около 330 м/с, это примерно 1 км за 3 секунды (а скорость света почти в миллион раз больше, так что вспышку молнии мы видим практически мгновенно).

Звук распространяется ото всех частей молнии, а молния имеет заметную длину. Кроме того, звук может отражаться от препятствий. Из-за этого гром и звучит долго.

ЁЛОЧКА – 2022



ТОЧКА ТОРРИЧЕЛЛИ И СЕТИ ШТЕЙНЕРА

6. Ответ: сеть из пункта б). В сети из пункта а) есть две дороги под углом меньше 120°, в сети из пункта в) есть замкнутый путь из дорог.

7. Например, подойдёт трапеция, у которой углы при меньшем основании равны 120° и меньшее основание равно боковым сторонам. Разбор всех случаев в алгоритме даёт единственную допустимую сеть из двух боковых сторон и меньшего основания.

8. Аналогично случаю квадрата получаем всего две допустимые сети (рис. 1). Сеть слева имеет меньшую суммарную длину дорог, значит, это сеть Штейнера.

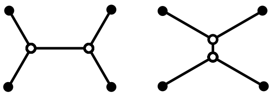


Рис. 1

9. Вот допустимые сети, которые удалось нам найти (рис. 2). Сети, получающиеся поворотом или переворотом этих, мы отбрасывали.

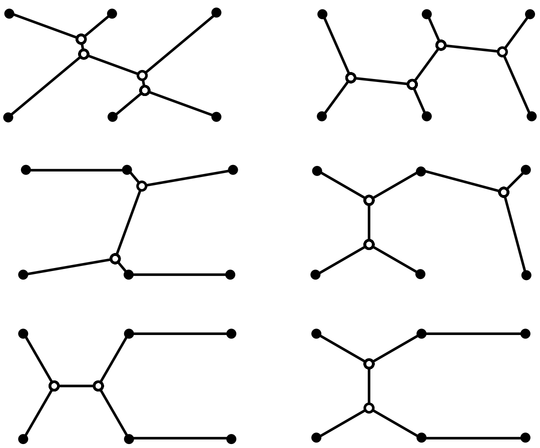


Рис. 2

10. Бывает всего 5 допустимых сетей, которые получаются поворотом из той, что на рисунке 3.

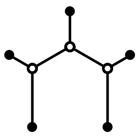


Рис. 3

11. Установим магазин в произвольной точке, соединим её с деревнями и проведём перпендикуляр к дороге. Отразим всю эту картинку относительно прямой, на которой лежит дорога. Получим сеть, соединяющую четыре деревни: две настоящие и две воображаемые (зеркальные копии настоящих). Сумма длин дорог этой сети вдвое больше суммы расстояний от магазина до деревень и дороги. Деревни лежат в вершинах квадрата со стороной 10 км, и, как мы знаем, у квадрата есть ровно две минимальных сети. Только у одной из них перекрёстки симметричны друг другу относительно дороги. Поэтому магазин нужно расположить в перекрёстке этой сети, чтобы сумма расстояний до деревень и дороги была минимальна.

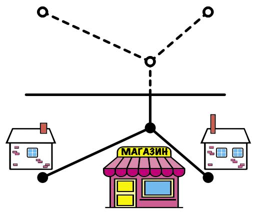


Рис. 4

12. См. рисунок 5.

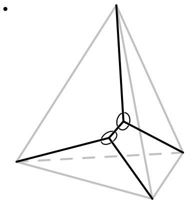
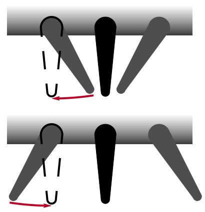


Рис. 5

ДВЕ МНОГОНОЖКИ

Заметим, что местами ноги сведены в тесные пучки, а в промежутках они растопырены. Эти скопления и разряжения ног и движутся вдоль многоножек как волны. У многоножки № 1 пучки состоят из поднятых ног, а стоящие ноги растопырены, у многоножки № 2 – всё наоборот.

Пусть волны движутся по многоножкам влево, куда тогда движутся сами многоножки? Посмотрим на поднятые ноги и их левых соседей. Волна перейдёт к этим соседям, то есть они поднимутся вертикально. Для многоножки № 1 это означает поворот ноги влево, а для многоножки № 2 – вправо (см. рисунок). Значит, первая шагает по ходу движения волны, а вторая – навстречу.



Увидеть по-разному ползущих многоножек можно по ссылкам kvan.tk/mnogonog1 и kvan.tk/mnogonog2 на видео.

СОМ АЛИ

Решая задачи на письменность, нужно сначала определить, что в ней обозначает один символ. По этому признаку письменности делятся на три типа (кроме некоторых более сложных):

– иероглифические (1 символ – 1 слово, как в китайском языке);

– слоговые (1 символ – 1 слог, как в японском языке);

– алфавитные (1 символ – 1 звук, как в русском и английском языках).

Здесь, очевидно, не иероглифическая система письма, не слоговая (потому что слишком много символов), а алфавитная.

Затем надо определить направление письма, то есть читаются ли буквы справа налево (как в арабском языке или языке иврит) или слева направо (как в русском или английском языках). Судя по тому, что сомалийские слова выровнены по левому краю, читать надо слева направо.

Для начала можно предположить, что слово 6 (𐒍𐒘𐒃𐒘) – это «Того», ведь это единственное четырёхбуквенное слово с одинаковыми второй и четвёртой буквой. Но это ловушка: как только мы решим, что 𐒘 – это ‘о’, и подпишем его в остальных местах, окажется, что у нас целых три слова, которые после ‘о’ заканчиваются одинаково (это слова 7, 9 и 12), а поскольку таких слов среди русских нет (у всех слов с ‘о’ – «Габон», «Лаос», «Молдова», «Сальвадор» и «Эстония» – после ‘о’ идут разные части), приходится признать, что слово 6 – это всё-таки не «Того».

Посмотрим на начала и концы сомалийских слов: в начале слов 3 раза повторяется буква 𐒑, а в конце 5 раз повторяется буква 𐒖. Здесь мы ещё раз убеждаемся в том, что читать сомалийские слова следует слева направо (ведь самая частая начальная буква русских слов, ‘м’, повторяется только 4 раза, и 5 раз в сомалийских словах повторяться не может, зато может 3 раза – в задаче сказано, что некоторые русские слова на сомалийский не переведены), и сопоставляем букву ‘м’ со знаком 𐒑. Самые частые конечные буквы в русских словах – это буквы ‘а’, ‘н’ и ‘я’, встречающиеся по 3 раза, но, учитывая то, что русская буква ‘я’ на самом деле обозначает сочетание звуков [йа], можно объединить слова, оканчивающиеся на буквы ‘я’ и ‘а’, в слова, которые заканчиваются на звук [а], и сделать вывод, что 𐒖 читается именно так.

Тогда по количеству букв слово 1 – это «Мальта», слово 12 как единственное оставшееся слово вида «Ма…а» – это «Малайзия», слово 8 – «Молдова» (если бы это был «Мадагаскар», там должно было бы быть три ‘а’), слово 10 – это «Лаос», слово 2 – это «Бангладеш» и так далее.

Вот значения не определённых ранее слов: слово 3 – это «Габон», 4 – «Перу», 5 – «Непал», 7 – «Латвия», 9 – «Эстония», 11 – «Казахстан».

А слово 6 «?и?и», которое сначала можно было ошибочно принять за «Того», – это слово «Фиджи», и отсюда видно, что сочетание звуков [дж] записывается в этой письменности одним знаком (как *J* в английском алфавите).

Установив верные соответствия, можно выписать несколько различий между русским алфавитом и письменностью исмания:

– русский записывает [йа] одной буквой ‘я’, а исмания – двумя;

– русский записывает [дж] двумя буквами, а исмания – одной;

– русский различает ‘э’ и ‘е’, а исмания – нет;

– после мягкого [л’] в русском пишется мягкий знак, исмания не различает мягкое и твёрдое ‘л’;

– русский различает звуки ‘с’ и ‘з’ и записывает их по-разному, а в сомалийском языке нет звука ‘з’ и поэтому оба звука записываются как 𐒈;

– аналогично в сомалийском языке, как и в арабском, нет звука ‘п’ и исмания записывает его как ‘б’ (𐒁);

– и ещё в сомалийском языке нет звука ‘в’ и исмания записывает его как ‘ф’ (𐒍).

Вот как решается задание 2:

𐒍𐒖𐒇𐒖𐒒𐒈𐒕𐒈𐒏𐒖 – (Ф/В)арансйска (на самом деле Фарансииска) – Франция;

𐒃𐒖𐒁𐒛𐒒 – Джа(б/п)?н – (на самом деле Джабаан) – Япония;

𐒏𐒝𐒒𐒍𐒚𐒇 𐒏𐒓𐒇𐒘𐒕𐒖 – К?нфур К?рийа (на самом деле Коонфур Куурийа) – Южная Корея (как выбрать между Южной и Северной, см. ниже);

𐒏𐒝𐒒𐒍𐒚𐒇 𐒖𐒍𐒇𐒘𐒏𐒖 – Коонфур Африка – ЮАР, ведь страны «Северная Африка» или «Северно-Африканская республика» нет, следовательно, Коонфур – «южный».

В заключение можно сказать, что сомалийский язык, в отличие от русского, различает краткие и долгие гласные (но из задачи этого понять нельзя). 𐒕 в слове «Фарансииска» – это долгое «и», 𐒛 в слове «Джабаан» – это долгое «а», а 𐒝 и 𐒓 в словосочетании «Коонфур Куурийа» – это долгие «о» и «у» соответственно.

ПУШКИН, НАБОКОВ, ИСКАНДЕР

Выдумана история про Набокова. Выдумана, да не совсем: писатель действительно очень любил анаграммы. *Вивиан Дамор Блок*, *Блавдак Виномори*, *Дориан Вивалкомб*, *барон Клим Авидов* – все эти персонажи у Набокова и в самом деле есть, а вот адмирала Ивана Бовка нет и быть не могло.

И дело не в том, что такого человека никогда не существовало. На это указывают две явные исторические ошибки: «Элефант» (то есть «Слон») был флагманским кораблём не русского, а шведского флота и в ходе сражения при Гангуте достался русским в качестве боевого трофея; чин контр-адмирала был введён в России только в 1732 году.

Дело в том, что в словах *Владимир Набоков* – два *а* и два *о*, а в словах *адмирал Иван Бовк* – три *а* и одно *о*, так что анаграмма получилась бы неправильная. Такой небрежности эстет и педант Набоков никогда бы не допустил.

XLIII ТУРНИР ГОРОДОВ. ОСЕННИЙ ТУР

Базовый вариант

1. Ответ: ещё четыре раза. Номер турнира N на $2021-43=1978$ меньше номера года M, в котором проводится осенний тур этого турнира, и так будет всегда. Поэтому $M:N=1+1978:N$. Таким образом, требуется, чтобы число 1978 нацело делилось на номер очередного Турнира.

Но $1978=43\cdot 23\cdot 2$, оно делится (из чисел, больших 43) на 46, 86, 989 и на себя. Тогда явление повторится в 2024, 2064, 2967 и 3956 гг.

2. Ответ: 2, 3, 4, 24. Обозначим точку пересечения трёх плоскостей, разрезающих куб, через A. Заметим, что объём любого из 8 полученных параллелепипедов равен произведению трёх его рёбер, выходящих из A.

Как найти объём какого-то белого параллелепипеда α? Перемножим объёмы трёх чёрных параллелепипедов, примыкающих к α. Получим произведение длин 9 отрезков: рёбра параллелепипеда α, выходящие из A, войдут в произведение по два раза, а рёбра противоположного к α чёрного параллелепипеда β, выходящие из A, – по разу. Поделив полученное число на объём β, получим квадрат объёма α.

Таким образом, перемножая тройки чисел из условия и деля на четвёртое, мы получим квадраты объёмов белых параллелепипедов; останется извлечь корни.

3. Ответ: 5 монет. *Пример.* Достанем по одной монете из каждого мешочка. Среди этих пяти монет есть монеты всех трёх видов, поэтому какого-то вида есть только одна монета. Если она, например, золотая, то её достали из мешочка с золотыми монетами. Действительно, для каждой монеты из «смешанного» мешочка есть парная из соответствующего «однородного» мешочка.

Оценка. Пусть мы достали только 4 монеты (или меньше). Заметим, что не имеет смысла доставать больше одной монеты из одного и того же мешочка, так как они могут оказаться одинаковыми, а тогда никакой дополнительной информации мы не получим. Поэтому можно считать, что мы достали по одной монете из четырёх разных мешочков. Тогда мы могли достать монеты З, З, С, Б, и в этом случае есть по крайней мере два варианта распределения соответствующих мешочков: [З, смеш., С, смеш., Б] и [смеш., З, смеш., Б, С], не совпадающих ни в одной из позиций (последним указан мешочек, из которого монеты не доставались).

4. Рассмотрим группы равных сторон, расположенных подряд. Заметим, что на стыке таких групп находится острый угол n-угольника – угол при основании равнобедренного треугольника. Но в многоугольнике не может быть больше трёх острых углов (сумма внешних углов равна 360°, поэтому среди них не больше трёх тупых), значит, этих групп не больше трёх. Следовательно, среди каждых четырёх сторон найдутся две из одной группы, то есть равные.

5. Ответ: обязательно. Будем говорить, что шахматист A не слабее шахматиста B, если A выиграл и белыми, и чёрными не меньше партий, чем B. Предположим, что такой пары нет.

Если у каких-то двух игроков одинаковое число побед белыми, один из них не слабее другого. То же верно, если у каких-то двух игроков одинаковое число побед чёрными. Значит, число побед белыми у всех разное и число побед чёрными – тоже. Отсюда следует, что количества побед белыми у 20 игроков равны числам 19, 18, ..., 2, 1 и 0, и то же для количеств побед чёрными. Пусть 19 партий белыми выиграл A, а 19 партий чёрными выиграл другой шахматист B. Тогда игру A с B, где A играл белыми, а B – чёрными, выиграли и A, и B. Но это невозможно, откуда 19 партий белыми и чёрными выиграл один и тот же шахматист. Но тогда он не слабее всех остальных. Противоречие.

Сложный вариант

1. Ответ: 3 или 4.

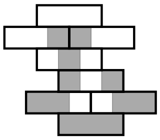
Примеры: –1, 1/2, 2 и –3, –1, 1, 3.

Оценка. Если чисел больше 4, то среди них есть три одного знака (пусть положительных). Выберем три наименьших из них: $a-d$, a, $a+d$, где $0<d<a$. Обратные числа идут в обрат-

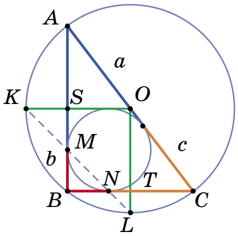
ном порядке: $\frac{1}{a-d} > \frac{1}{a} > \frac{1}{a+d}$, но

$$\frac{1}{a-d} - \frac{1}{a} = \frac{d}{a(a-d)} \neq \frac{d}{a(a+d)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+d}.$$

2. Ответ: можно, см. пример на рисунке.



3. Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Пусть ABC – наш треугольник с прямым углом B, точка O – центр его описанной окружности, M и N – точки касания вписанной окружности с катетами AB и BC соответственно, K и L – середины дуг AB и BC. Достаточно доказать, что M и N лежат на KL.

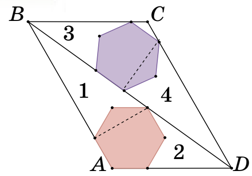


Опустим перпендикуляры OS и OT на катеты AB и BC и продлим их до пересечения с описанной окружностью в точках K и L. Обозначим длины касательных из точек A, B, C к вписанной окружности через a, b, c соответственно. Треугольник KOL равнобедренный прямоугольный. Заметим, что $KS = OK - OS = \frac{a+c}{2} - \frac{b+c}{2} = \frac{a-b}{2}$. Если M' – точка пересечения KL с AB, то $SM' = SK = \frac{a-b}{2}$, откуда $SM' + MB = SK + MB = \frac{a-b}{2} + b = \frac{a+b}{2} = BS$, а значит, M' и M совпадают. Аналогично KL содержит N.

4. Ответ: нет. На первом ходу Вася не проиграет, так как нет двузначных квадратов с цифрой 7. Покажем, что далее каждый может приписать в конец текущего числа 2 или 3 так, чтобы соперник не выиграл следующим ходом.

Пусть у нас было число A, и соперник может сделать квадрат, приписав цифру как к числу $\overline{A2}$, так и к числу $\overline{A3}$. Поскольку точные квадраты не оканчиваются ни на 2, ни на 3, он припишет цифру в конец: скажем, x – в первом случае, и y – во втором. Тогда оба числа $\overline{A2x}$ и $\overline{A3y}$ – точные квадраты, разность между которыми меньше 20. Но каждое из этих чисел хотя бы трёхзначное, и тогда разность между соседними точными квадратами не меньше $11^2 - 10^2 > 20$. Противоречие.

5. Ответ: тот, который примыкает к вершине A. Приведём решение, найденное на турнире семиклассником Макаром Чудновским.



Параллелограмм разделён на 2 данных шестиугольника, 4 невыпуклых четырёхугольника, обозначенные на рисунке цифрами 1, 2, 3, 4, и треугольник, примыкающий к вершине C. Заметим, что четырёхугольники 1 и 4 подобны – они получаются вырезанием из двух подобных прямоугольных треугольников равнобедренных треугольников с углом 120° при вершине. Аналогично, подобны четырёхугольники 2 и 3.

Но коэффициенты подобия равны отношению сторон шестиугольников. А площади половинок параллелограмма ABD и CBD равны, причём первая состоит из первого шестиугольника и четырёхугольников 1 и 2, а вторая – из второго шестиугольника, четырёхугольников 3 и 4 и ещё белого треугольника. Значит, сторона шестиугольника, примыкающего к вершине A, больше.

6. Очевидное неравенство $(a_k - a_{k+1})^2 \geqslant 0$ перепишем в виде $\frac{a_k^2}{a_{k+1}} \geqslant 2a_k - a_{k+1}$. Так как число справа – целое, то и $\left[\frac{a_k^2}{a_{k+1}}\right] \geqslant 2a_k - a_{k+1}$. Сложив такие неравенства, получим требуемое.

7. Ответ: при любом. Пронумеруем плюшки в ряду числами от 1 до 40. Ясно, что Малыш всегда может взять плюшку с номером любой чётности, а после каждого его хода Карлсон вынужден брать плюшку с номером другой чётности.

Пусть среди плюшек с нечётными номерами не меньше 10 с сахаром (если с корицей, то рассуждения аналогичны). Тогда Малыш сначала берёт плюшки с нечётными номерами и после каждого хода Карлсона вычисляет такую величину: количество полученных плюшек с сахаром + количество оставшихся на столе плюшек с сахаром с чётными номерами. Изначально эта величина не больше 10, а если Малыш будет брать плюшки только с нечётными номерами, в конце она будет не меньше 10. После каждой пары ходов Малыша и Карлсона эта величина изменяется не более чем на 1. Значит, в какой-то момент она будет равна 10. После этого Малыш может брать только плюшки с чётными номерами и в итоге получит ровно 10 плюшек с сахаром, а значит, и 10 плюшек с корицей!

итоги нашего конкурса

ПОЗДРАВЛЯЕМ!

Подведены итоги математического конкурса, проходившего с сентября 2020 года по август 2021 года. В нём участвовали более 400 школьников из разных стран. Новый конкурс уже идёт (см. с. 32).

ПОЗДРАВЛЯЕМ НАШИХ ПОБЕДИТЕЛЕЙ! ИМИ СТАЛИ

Ануфриева Ульяна	Лесосибирск, Красноярский край	Школа № 9	9 кл.
Барков Артём	Москва	Школа № 444	7 кл.
Бирюлин Алёша	Москва	Школа № 179	8 кл.
Вараксин Андрей	Магнитогорск, Челябинская обл.	Школа № 5	7 кл.
Ермолаев Арсений	Москва	Школа № 2007	7 кл.
Зеленова Мария	Ногинск, Московская обл.	Православная гимназия	8 кл.
Ковалев Игорь	Пенза	Школа № 76	8 кл.
Krvavych Leonie	Лондон (Великобритания)	Wimbledon Chase Primary School	4 кл.
Куцук Елена	Маунтин-Вью, Калифорния (США)	Graham Middle School	6 кл.
Назаренко Павло	Киев (Украина)	Лицей «Наукова зміна»	8 кл.
Нестеренко Александра	Москва	Школа № 1287	8 кл.
Окунева София	Москва	Школа №1533 «ЛИТ»	7 кл.
Подгорнов Иван	Курган	Школа № 48	9 кл.
Приходько Тамара	Красноярск	Школа № 3	8 кл.
Прохоров Павел	Москва	Лицей «Вторая школа»	8 кл.
Ровинский Кирилл	Москва	Школа № 17	5 кл.
Салдаев Лев	Магнитогорск, Челябинская обл.	Школа № 5	7 кл.
Соколова Алёна	Одинцово, Московская обл.	Лицей № 2	8 кл.
Ушаков Севастьян	Санкт-Петербург	Школа № 543	4 кл.
Часовских Иван	Химки, Московская обл.	Школа № 14	7 кл.
Яриков Михаил	Липецк	Гимназия № 19 им. Н.З. Поповичевой	8 кл.

Команда 5-х классов Центра образования № 44 г. Тулы: Горбачёва Валерия, Гусаков Никита, Казандайкин Дмитрий, Конев Максим, Кремень Александра, Кузенков Владислав, Матвеева Алёна, Мокроусов Егор, Парамонова Анна, Парамонова Ксения, Фалдина Александра, Федоров Алексей, Шорохов Никита

ПОЗДРАВЛЯЕМ НАШИХ ПРИЗЁРОВ! ИМИ СТАЛИ

Беляков Александр	Москва	Школа № 1543	6 кл.
Бугаева Элина	Курган	Гимназия № 19	7 кл.
Вараксина Наталия	Магнитогорск, Челябинская обл.	Школа № 5	6 кл.
Ганичев Филипп	Киров	Вятская гуманитарная гимназия	5 кл.

Гильманова Залина	с. Измя, Сабинский р-н, Республика Татарстан	Изминская средняя общеобразовательная школа	6 кл.
Джаошвили Анна	Москва	Курчатовская школа	7 кл.
Жусупов Данияр	пос. Новопавловка, Костанайская обл. (Казахстан)	Ключевая общеобразовательная школа	6 кл.
Карпенко Артём	Зеленоград	Школа № 1557	6 кл.
Копылов Александр	Москва	Инженерно-техническая школа им. П. Р. Поповича	7 кл.
Костиков Владислав	Самара	Гимназия № 2	5 кл.
Лыкова Ольга	Петра Дубрава, Самарская обл.	Средняя общеобразовательная школа	5 кл.
Наместников Егор	Харьков (Украина)	Школа № 27	5 кл.
Савин Михаил	Протвино, Московская обл.	Лицей «Протвино»	7 кл.
Шарипова Зарина	Уфа	Гимназия № 3	7 кл.

*Победителям и призёрам будут высланы дипломы журнала «Квантик»,
а также призы – научно-популярные книги издательства МЦНМО,
фонда «Математические этюды» и фонда «Траектория»*

ТАКЖЕ ОТМЕЧАЕМ УСПЕШНОЕ ВЫСТУПЛЕНИЕ РЕБЯТ:

Абрамочкина Екатерина	Самара	Лицей авиационного профиля №135	8 кл.
Башкиров Евгений	Чебоксары	Школа № 6 им. В. И. Чапаева	7 кл.
Бежаева Дзерасса	Владикавказ	Лицей г. Владикавказа	7 кл.
Боднарчук Алексей	Киев (Украина)	Гимназия № 17	3 кл.
Бойченко Павел	Балаково, Саратовская обл.	Гимназия № 2	7 кл.
Войтанович Элина	Волжский, Волгоградская обл.	Школа № 30	5 кл.
Газизов Гарифулла	Уфа	Лицей № 83 им. Пинского УГНТУ	6 кл.
Елисеева Алиса	Екатеринбург	Гимназия № 94	2 кл.
Звоник Михаил	Лида, Гродненская обл. (Беларусь)	Школа № 9	6 кл.
Канаш-Фонберштейн Лев	Москва	Лицей «Воробьёвы горы»	7 кл.
Колесникова Екатерина	Мурманск	Гимназия № 2	6 кл.
Ленская Наталия	Москва	Школа № 1329	8 кл.
Плеханова Мария	Иркутск	Гимназия № 1	6 кл.
Птушкин Иван	Киров	Кировский физико-математический лицей	4 кл.
Скивко Тимур	Магнитогорск, Челябинская обл.	Школа № 5	4 кл.
Тимонина Ирина	Саров, Нижегородская обл.	Лицей № 15	8 кл.
Фёдоров Артём	Москва	Школа №1514	4 кл.
Шкурдей Александр	Москва	Школа № 1575	7 кл.
Шувалова Диана	Москва	Школа № 179	7 кл.

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Первый этап состоит из четырёх туров (с I по IV) и идёт с сентября по декабрь.

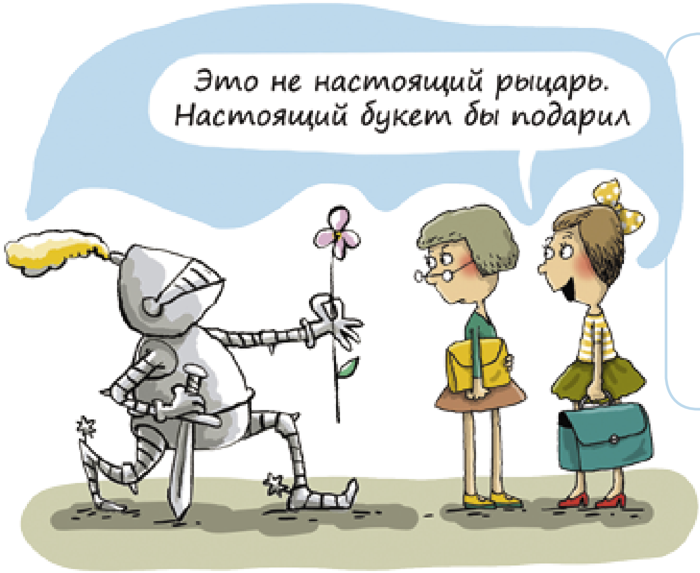
Высылайте решения задач IV тура, с которыми справитесь, не позднее 5 января в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик»**.

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

IV ТУР



16. На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжёт). Житель A рассказал такую историю:

– Встретил я жителей B и C. Первый говорит: «Мы оба лжецы». А второй кивает: «Это правда».

Про кого из A, B, C можно однозначно определить, кто он – рыцарь или лжец?

17. Расшифруйте ребус:

ТУК + ТУК + ТУК + ТУК + ТУК = СТУК.

(Найдите все ответы и докажите, что других нет. Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными – разные, и ни одно число не начинается с ноля.)

Авторы: Алексей Заславский (16), Назар Агаханов (17), Сергей Дворянинов (18), Михаил Евдокимов (19, 20)

18. Когда Робинзон Крузо попал на необитаемый остров, у него было 200 ружейных зарядов. Ради их экономии он решил каждый день тратить на охоте не более 5% имеющихся на то утро зарядов. В какой-то момент Робинзон уже не мог делать выстрелы, придерживаясь своего правила. Сколько патронов он истратил к этому моменту?

19. При каких N большой клетчатый уголок, состоящий из трёх квадратов $N \times N$, можно разрезать по линиям сетки на обычные трёхклеточные уголки?

20. а) Маша испекла торт, имеющий форму квадрата со стороной 21 см. Затем она выбрала внутреннюю точку на одной из сторон и сделала надрез длиной 20 см из этой точки перпендикулярно выбранной стороне. В итоге Маша сделала так для каждой из 4 сторон. Обязательно ли при этом был отрезан хотя бы один кусок?

б) Решите ту же задачу, если Маша испекла торт в форме правильного шестиугольника диаметра 35 см и сделала от каждой стороны разрез длиной 20 см перпендикулярно этой стороне.

Художник Николай Крутиков

Железнодорожная петля

Зачем железнодорожный путь делает петлю
и проходит сам под собой?

Автор Александр Бердников

Художник Мария Усеинова

ISSN 2227-7986 21012

9 772227 798213