ЖУРНАЛ КВАНТИК
ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 8 | август 2021
Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования
e-mail: kvantik@mccme.ru

№ 8
август
2021

УМ БЕЗ МОЗГА

ЗАДАЧИ ПРО МАГНИТЫ

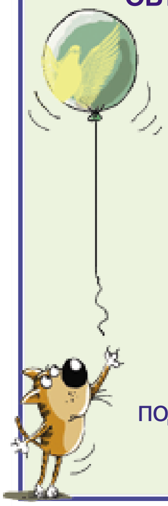
ИХ СИЯТЕЛЬСТВО ГРАФ

Enter

ПРОДОЛЖАЕТСЯ ПОДПИСКА на II полугодие 2021 года!

Подписаться на журнал можно в отделениях Почты России и через интернет

ОБЪЕДИНЁННЫЙ КАТАЛОГ «ПРЕССА РОССИИ»



подписной индекс **11346**

akc.ru/itm/kvantik

На «Квантик» теперь можно подписаться в КАЗАХСТАНЕ и УКРАИНЕ!

УКРАИНА

Подписное агентство «ПРЕСЦЕНТР КИЕВ»
www.prescentr.kiev.ua

Чтобы подписаться, нужно позвонить
по тел.: **044-451-51-61**
или написать на e-mail: **podpiska1@prescentr.kiev.ua**

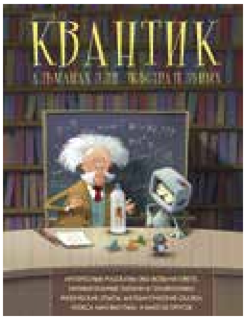
КАЗАХСТАН

1) Подписное агентство «ЭКСПРЕСС-ПРЕСС»
(ТОО «Express Press Astana»)
телефоны: **+7 7172-25-24-35**
+7 747-266-05-77
+7 7172-49-39-29
e-mail: **express-press-astana@mail.ru**

2) Подписное агентство «ЕВРАЗИЯ ПРЕСС»
телефон: **(727) 382-25-11**; факс: **(727) 382-34-87**
e-mail: **evrasia_press@mail.kz**

3) КАЗПОЧТА
Узнавайте о возможностях подписки на «Квантик» на **Казпочте**

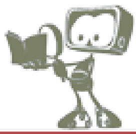
НАШИ НОВИНКИ



АЛЬМАНАХ ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ «КВАНТИК», выпуск 17

В него вошли материалы журнала **«КВАНТИК»** за первое полугодие 2020 года

Купить этот и предыдущие альманахи можно в магазине «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КНИГА» (адрес: г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11), в интернет-магазинах **biblio.mccme.ru** и **kvantik.ru** и других (см. список на сайте **kvantik.com/buy**)



www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 8, август 2021 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Е. А. Котко, Р. В. Крутовский, Г. А. Мерзон, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Фил Дунский

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**
Подписка на журнал в отделениях Почты России:
- бумажный каталог – Объединённый каталог «Пресса России» (индекс **11346**)
- электронная версия Каталога Почты России (индекс **ПМ068**)

Онлайн-подписка на сайте:
- агентства АРЗИ **akc.ru/itm/kvantik**
- Почты России **podpiska.pochta.ru/press/ПМ068**

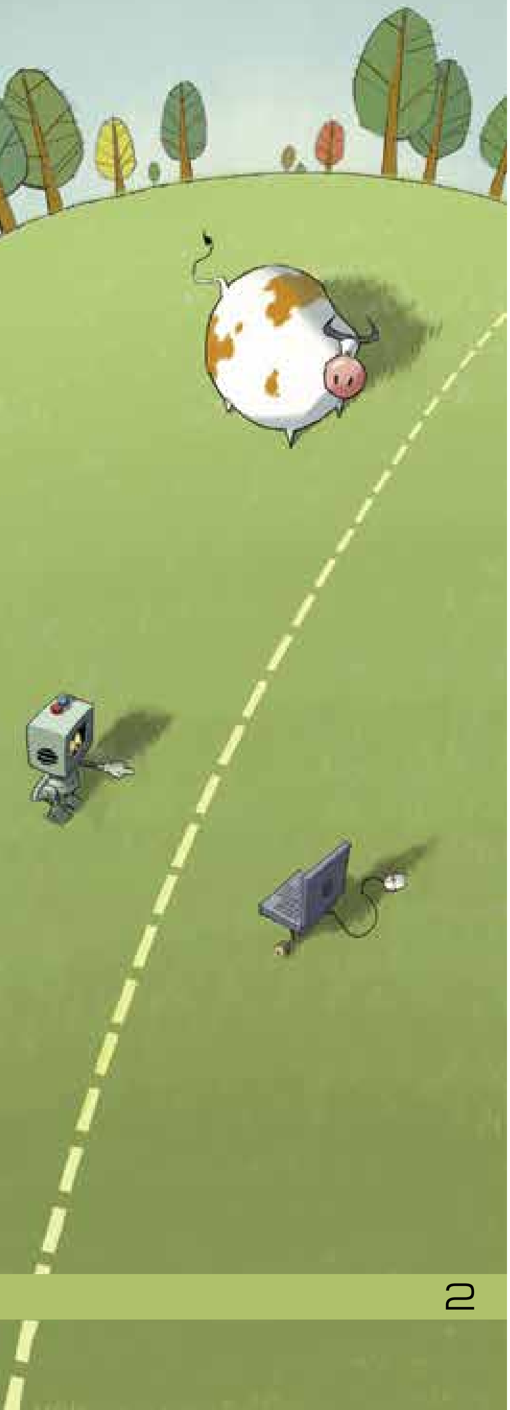
По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84x108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 15.07.2021
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831)216-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+

СОДЕРЖАНИЕ

Математический кружок

Сергей Дориченко

БЕГОТНЯ ПО ПОЛЯМ И ДОРОГАМ



Квантик и Ноутик стояли посреди огромного поля и размышляли.

– А вот интересно, куда я добегу быстрее тебя? – спросил Квантик.

– Только давай по-честному: бежим с одинаковой скоростью, – ответил Ноутик.

– Тогда ничего интересного, – сказал Квантик. – Быстрее я добегу туда, куда мне ближе, то есть в точки на моей половине поля.

– А что такое «твоя половина поля»?

– Надо соединить нас с тобой отрезком и провести к нему срединный перпендикуляр. Он разделит поле на «мою» и «твою» половины.

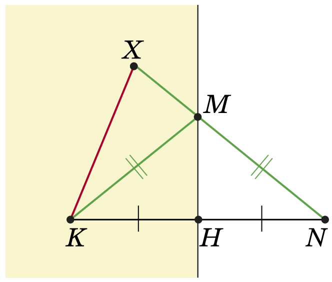


Рис. 1

– И правда: если X на твоей половине, то $KX < NX$ (рис. 1). А это надо доказывать или очевидно?

– Можно вывести из того, что кратчайший путь между точками на плоскости – отрезок. Твой путь пересекается с перпендикуляром в точке M и делится на два куска NM и MX. Отрезки MN и MK равны по симметрии. Поэтому твой путь равен $KM + MX$, что больше KX (это ещё неравенством треугольника называют).

– Здорово! Хотя и занудно – и так же всё понятно.

– Тогда реши такую задачу. *Мы снова стоим в поле, но ты – на прямой дороге, идущей через поле. Как отметить ту часть дороги, куда ты добежишь быстрее? Скорости у нас равны.*

– А в чём разница? Проводим перпендикуляр и отмечаем ту часть дороги, которая в моей половине.

– Молодец. Гляди, что это там виднеется?

За телегой

– Телега едет как раз по прямой. И скорость вроде как у нас, когда мы бежим. Давай догоним?

– Погоди, сначала решим! *Телега едет из точки A по прямой l вправо с постоянной скоростью (рис. 2). Откуда её можно догнать, двигаясь с той же скоростью?*

– А бежать надо с упреждением или просто за ней?

– Просто за ней безнадёжно: скорости же равны. Пожалуй, надо выбрать точку, где мы хотим догнать телегу. И мчаться туда по прямой, это короче всего.

– Мне кажется, мы её догоним, только если мы в той части поля, которая как бы «перед» телегой.

– Я тебя понял. Рисую через точку A прямую m, перпендикулярную дороге (рис. 2). Если мы в той части, куда едет телега, то догоним её. Иначе – нет.

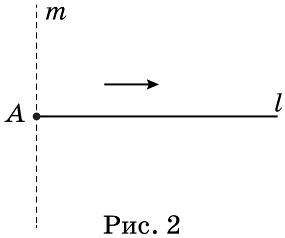


Рис. 2

– А ты теперь опять скажешь, что это надо доказывать?

– Так это почти предыдущая задача. Мы ищем точки дороги, куда можем попасть не позже телеги. Значит, соединяем наше положение B с телегой A и строим срединный перпендикуляр к AB (рис. 3).

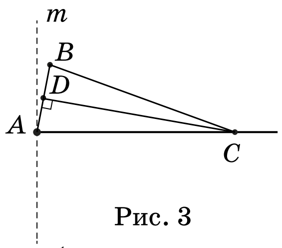


Рис. 3

– Да! Если он пересечёт дорогу – бежим в точку пересечения C (или в любую точку дороги правее C). Если не пересечёт – телегу не догнать.

– А сообразишь, как понять: пересечёт или нет?

– Ну, если мы на прямой m, перпендикуляр параллелен дороге. Если мы справа от m, перпендикуляр «наклонится» к дороге и пересечёт её. Если мы слева от m – отклонится от дороги. Так?

– Не вполне строго, но верно. Можно, кстати, чуть иначе объяснить. Пусть мы догоним телегу в точке C. Бежим в точку C по прямой. А из каких точек мы успеем в C одновременно с телегой или раньше?

– Если с той же скоростью... Телега сейчас в A... Ой, это же просто круг с центром C и радиусом CA.

– Именно. Так давай для каждой точки дороги нарисуем такой круг. Все круги вместе и дадут область, откуда телегу можно догнать. Но они все касаются прямой m и лежат справа от неё (рис. 4). Значит, ничего из левой половины не захватят. А любую точку правой половины – пожалуйста, только, может, радиус придётся огромный брать. Это потому, что...

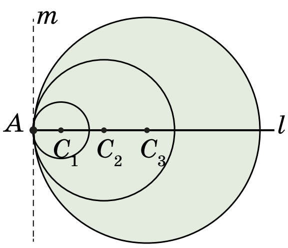


Рис. 4

– Гляди, велосипед едет! – перебил Ноутик.

Немного ускоряемся

– Он, пожалуй, раза в два быстрее движется, чем мы бегаем, – заметил Квантик. – И едет по прямой. А его мы из каких точек догоним?

– Ой. Тут уже фора какая-то нужна. Не знаю...

– Давай рассуждать как раньше. Пусть мы догоним велосипед в точке C. Бежим в точку C по прямой. Пробежать надо в 2 раза меньше, чем проедет велосипед (ну или ещё меньше). Значит... Значит, мы были в круге с центром C и радиусом $CA/2$... Рисуем в каждой точке дороги такой круг. Что все такие круги захватят?

– Какую-то часть плоскости. Она сначала узкая, потом расширяется... Может, это угол какой-то?

– Угол?.. Очень похоже! Но какой?..

Квантик и Ноутик задумались.

– Я тут взял циркуль и нарисовал несколько кругов, – прервал тишину Ноутик. – Вроде и правда они как бы угол составляют. А дорога его пополам делит. Я транспортиром измерил – похоже на 60° (рис. 5).

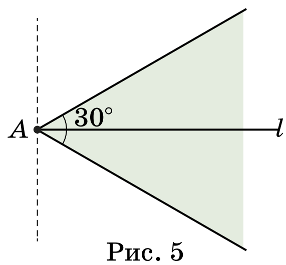


Рис. 5

– Ноутик, ты герой! Математика – это же экспериментальная наука. Итак, твой эксперимент говорит, что угол равен 60°. Полдела сделано!

– Почему?

– Мы уже знаем, что надо доказывать.

– Интересно, что легче доказать: что изнутри этого угла догоним велосипед или что извне – нет?

– Догоним не только изнутри, но и из любой точки X на границе угла. Я понял, куда надо бежать!

– Ясно куда: по перпендикуляру к дороге, так короче всего.

– Нет, нам же не просто к дороге надо, а велосипед поймать. Смотри, мы в точке X на стороне угла – значит, на границе какого-то круга. Бежать надо в его центр! Круг выступает на границу угла всего одной точкой, то есть... касается стороны угла в точке X.

– Погоди, погоди... Мы побежим по радиусу... Касательная перпендикулярна радиусу... Надо бежать перпендикулярно стороне угла???

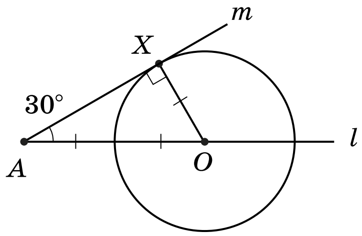


Рис. 6

– Именно. Проведём через X перпендикуляр к AX, он пересечёт дорогу в точке O (рис. 6). Тогда треугольник XAO с углами 30°, 90°, 60° – половинка равностороннего треугольника. Поэтому XO как раз в два раза короче, чем AO, и мы попадём в O одновременно с велосипедом.

– Ух ты! И круг действительно касается сторон угла. Но тогда все эти круги лежат внутри угла! Значит, из точек снаружи мы велосипед не догоним!

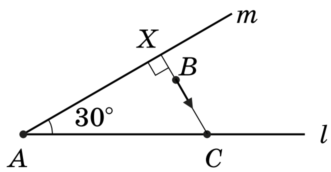


Рис. 7

– Верно. Кстати, а почему догоним изнутри угла?

– Ну, это просто: из точки B бежим перпендикулярно стороне угла и успеем даже раньше велосипеда (рис. 7).

Тут друзей прервал какой-то гул...

Самолёт

– Похоже на самолёт, – задрал голову Квантик. – Но я его не вижу, хотя смотрю туда, откуда звук идёт.

– Наверно, это сверхзвуковой самолёт.

– Тогда у меня задача. *Самолёт летит по прямой со скоростью, в два раза большей скорости звука. В точке A он начал испускать звук во все стороны и долетел до точки B. Где успели услышать самолёт к этому моменту?*

– Как тут рисовать, это же всё в пространстве?

– Ну мы как раз под путём самолёта стоим, и нас только вертикальная плоскость интересует, в которой мы с ним находимся.

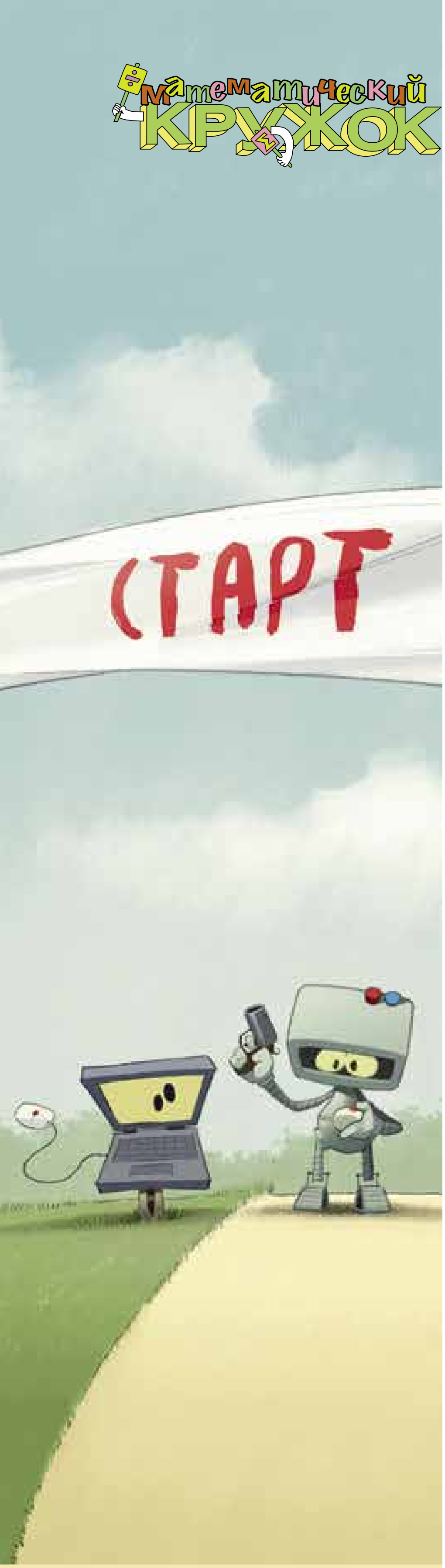
– Похоже на предыдущую задачу «наоборот»... Там мы догоняли транспорт, а тут от него звук убегает.

– А давай мысленно запустим время вспять. Самолёт полетит обратно из B в A, а звук – к самолёту.

– Так это ты решение рассказал! Рисуем угол в 60° с вершиной B...

– ... но не весь угол!

– А, ну да. Надо нарисовать не все круги... Последний круг тот, что с центром в A. Ну ясно – треугольник, и к нему полкруга приделано.



– А вот и не полкруга. Забыл? Все круги касаются сторон угла, в том числе и последний.

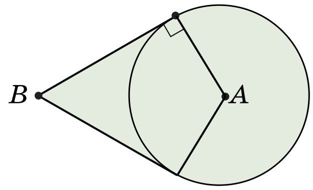


Рис. 8

Ноутик хлопнул себя по монитору и выдал верный ответ (рис. 8). Вскоре друзья выбрались на дорогу.

Одна дорога

– А по дороге гораздо легче идти, чем по полю.

– Это повод для задачи. *Ты стоишь на прямой дороге, идущей через поле. Твоя скорость по дороге – не более* 6 *км/ч, а по полю – не более* 3 *км/ч. Куда ты можешь дойти за* 1 *час?*

– Сложно. Я же могут сначала пойти по дороге, потом по полю, потом вернуться на дорогу...

– Нет.

– Что «нет»?

– Так идти не имеет смысла. Представь, что ты хочешь попасть в точку X. Если на пути в X ты сошёл с дороги, а потом на неё вернулся, ты шёл не оптимально: быстрее было просто идти по дороге.

– Выходит, оптимально идти – это сначала сколько-то по дороге, а потом сколько-то по полю?

– Именно.

– Ну, если всё время по дороге – это от исходной точки A по 6 км в обе стороны: получается отрезок MN длиной 12 км. А если не всё время? Иду я по дороге, а потом схожу – и уже пройду в два раза меньше, чем если бы и дальше по дороге шёл...

– Ничего не напоминает?

– Это же задача про самолёт и звук! Только теперь два самолёта летят из A: один – в M, другой – в N. – И Ноутик выдал на экране ответ (рис. 9).

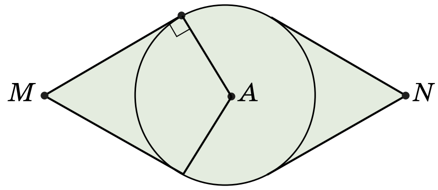


Рис. 9

– Точно, – подтвердил Квантик. – Но, кажется, мы дошли до перекрёстка.

Две дороги

– Ура, перекрёсток! Я тоже придумал задачу, – обрадовался Ноутик. – *По полю проходят две перпендикулярные друг другу прямые дороги. Ты стоишь* *на перекрёстке, твоя скорость по дорогам – не более 6 км/ч, а по полю – не более 3 км/ч. Куда ты можешь попасть за 1 час?*

Друзья сверили свои ответы (рис. 10).

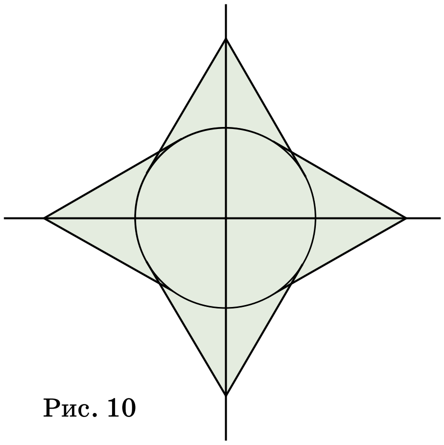


Рис. 10

– Ну да, объединяем два «прошлых» рисунка. Кстати, границы получились прямые, – заметил Квантик. – А может быть так, что круг наружу выступит?

– Пожалуй, так будет, если в поле скорость не в два раза, а только чуть-чуть падает.

– Согласен. Пограничный случай – когда на дороге скорость больше в $\sqrt{2}$ раз.

– Чем это он пограничный?

– А ты нарисуй ответ, удивишься.

– Ладно, дома попробую.

Хитрая задача

Дома Квантик и Ноутик увлеклись такой задачей:

Из пункта A, находящегося в лесу в 5 км от прямой дороги, пешеходу нужно попасть в пункт B, расположенный на этой дороге в 13 км от A. Скорость пешехода на дороге – 5 км/ч, а в лесу – 3 км/ч. За какое наименьшее время пешеход сможет попасть из A в B?

– Так, так, так… Опять делаем наоборот, – предложил Ноутик. – Как быстрее всего попасть из *B* в *A*? Если знать, сколько времени мы идём, можно картинку нарисовать, как раньше с одной дорогой, куда попадём за это время. Но время как раз и неизвестно. Что же, рисовать картинки для разных времён, пока точку *A* не захватим? И ещё угол будет другой, у нас же скорости относятся как 3 к 5.

– Сам угол нарисовать легко: пририсовываем к дороге прямоугольный треугольник с катетом 3 и гипотенузой 5. Вычислять угол не надо, время надо найти.

– И как дальше?

– А пусть читатели журнала сами дорешают! А мы своё решение в конце номера напишем.

Так они и сделали.

Художник Алексей Вайнер

Пётр Волцит

УМ БЕЗ МОЗГА, *или* ПОЧЕМУ ДЕМОКРАТИЯ ЛУЧШЕ ДИКТАТУРЫ

Мозг человека состоит из почти 100 миллиардов нейронов – иначе разумным не станешь. У некоторых коловраток – это такие мелкие черви с двумя дисками вращающихся ресничек около рта – в головном ганглии чуть более двух сотен клеток. Удивительно, но и эти двести клеток позволяют им совершать массу вполне «разумных» действий. При опасности коловратки сжимаются, почуяв запах пищи – плывут к ней, а «увидев» сокращение светового дня осенью – откладывают специальные зимовочные яйца в твёрдой оболочке.

Конечно, никакого мышления у червей нет, но набор безусловных рефлексов, «прошитых» в нейронах, позволяет в очень многих ситуациях делать именно то, что нужно для выживания. Учитывая, что и обладатели ста миллиардов нейронов порой совершают чудовищные глупости, «разумность» низших существ просто поразительна. Но ещё поразительнее, что на адекватные действия способны одноклеточные существа, у которых нет и не может быть даже одного нейрона – всё их тело состоит из одной-единственной клетки. И при этом, не имея нервной системы, инфузория-туфелька, например, умеет:

– уплывать от повышенной концентрации соли, кислот, щелочей;

– чувствовать «запах» бактерий, которыми она питается, и плыть в их сторону;

– чувствовать «запах» углекислого газа и плыть к нему (там вероятнее нахождение бактерий);

– при нехватке в воде кислорода плыть к поверхности, чтобы подышать.

У инфузорий известно более 20 таких реакций. Их называют не рефлексами, а *таксисами*. Если существо плывёт к раздражителю, таксис считают положительным. Если уплывает от него – отрицательным.

Убедиться в наличии у инфузории таксисов очень легко. Поместите на предметное стекло микроскопа три капли: слева – раствора соли, посередине – воды с инфузориями, а справа – чистой воды (только ни в коем случае не кипячёной!). Палочкой или иголкой соедините капельки водяными «мостиками» и наблюдайте в микроскоп. Инфузории массово переплывут из средней капли в правую – подальше от просачивающейся по «мостику» соли. Налицо отрицательный *хемотаксис* (от «хемо» – имеющий отношение к химии) – то есть реакция на химические вещества.

Если слева окажется капелька настоя сена, где массово размножились бактерии, то инфузории поплывут туда, продемонстрировав положительный хемотаксис. Бывает и *гео-* (реакция на поле тяготения), и *рео-* (способность плыть против течения), и *фото-*, и *магнито-*, и *электро-*, и множество других таксисов.

Такой большой набор реакций в большинстве случаев позволяет инфузориям и другим одноклеточным (в том числе бактериям) спастись от опасности, найти корм, кислород, не быть унесёнными течением и т.п.

Но где внутри клетки можно записать кучу реакций: от соли удаляйся, к источнику углекислого газа приближайся? Как клетка умудряется замерить концентрацию соли? А замерив и «поняв» (чем?!), что концентрация растёт и надо развернуться, как принимает такое «решение»? Где в одной-единственной клетке центр принятия решений? И как он даёт команды?

Нигде и никак. Никакого внутриклеточного «мозга» у простейших нет. Хотя кое-какое сходство с нашим нейроном имеется. Как и мембрана нервных клеток, наружная мембрана инфузории электрически заряжена. Снаружи от неё скапливаются положительные ионы (у нас – в основном калия, у инфузории – кальция), а внутри – отрицательные ионы органических кислот. И «плюс» притягивается к «минусу»: ионы только и ждут, чтобы в мембране открылись каналы, по которым можно будет попасть внутрь.

Что периодически и происходит. Однако, как и в наших нервных клетках, на мембране простейших есть белки́, способные перекачивать положительные ионы обратно наружу – так называемый *ионный насос*.

И что же? Как наличие заряда на мембране позволяет инфузории совершать адекватные действия?

Дело в том, что только наличие заряда позволяет ей плыть. Реснички инфузории работают согласованно только при условии, что разность потенциалов достигает определённой величины. И немаленькой – около одной десятой вольта. Пока мембрана заряжена, малютка плывёт, и плывёт в одном направлении.

Но как только происходит пробой и ионы кальция устремляются внутрь клетки, реснички начинают биться вразнобой, а инфузория беспомощно кувыркается на месте. И будет кувыркаться до тех пор, пока ионный насос не восстановит нормальный заряд.

Тогда она снова поплывёт по прямой. Но вот куда... А куда придётся. Кувыркания-то совершенно случайны; предсказать, из какого положения клетка снова начнёт движение, невозможно.

Теперь нужно добавить ещё пару деталей, и наша «кувыркательно-вычислительная машина» заработает! Первая деталь очень простая: частота пробоев заряда на мембране должна зависеть от силы раздражителя: концентрации соли, интенсивности света и т. д.

Причём при повышении концентрации вредных веществ (соли, кислоты) частота пробоев должна увеличиваться. Тогда при приближении к опасности инфузория начнёт кувыркаться чаще. И рано или поздно кувыркание развернёт её в другую сторону.

Зато как только инфузория начнёт удаляться от опасности, частота пробоев снизится, и малютка будет плыть и плыть, демонстрируя удивительно правильную реакцию. При приближении к вредным веществам пробои будут случаться чаще, и длина пробега между ними будет сокращаться. А при удалении – наоборот. В итоге в нужном направлении инфузория движется статистически чаще, чем в неправильном.

Если таксис положительный, система работает по тому же принципу, только «правильным» считается не уменьшение силы раздражителя, а её увеличение.

Если же курс выбран неверно, инфузория снова закувыркается, получая шанс выбрать направление получше. И так – пока не получится.

Осталось встроить в нашу машину совсем простенькую деталь. На мембране клетки нужно расположить белки, чувствительные к тем или иным раздражителям. Например, к той же соли. И каким-то образом соединить белки-рецепторы с ионными каналами.

Тогда в соприкосновении с ионами солей «солевой» рецептор будет открывать каналы, вызывая кувыркание, а при соединении с углекислым газом соответствующий белок будет, наоборот, тормозить пробой, оттягивая смену курса как можно дольше.

Фактически число таксисов, доступных одноклеточному существу, равно числу типов белковых рецепторов, которые можно разместить на его мембране.

Описанный выше механизм ещё довольно грубый. Если концентрация полезного вещества высокая, то пробоев не происходит, и клетка всё плывёт и плывёт вперёд. Эдак недолго и выплыть за пределы кормного места! Чтобы такое случалось пореже, в клетки дополнительно встроен механизм *сенсорной адаптации* (то есть приспособления, подлаживания рецепторов). При высокой концентрации «вкусненького» на молекулы соответствующих рецепторов навешиваются метильные группы. Это делает их менее чувствительными – они реже включаются и отменяют пробой. Значит, попав в кормовое поле, инфузория станет кувыркаться чаще и с меньшей вероятностью покинет его.

Но и это ещё не всё. Процесс метилирования и деметилирования идёт медленнее, чем запуск или отмена кувыркания. Это наделяет клетку своего рода памятью. Если секунду назад инфузория была в зоне меньшей концентрации «вкусненького», её рецепторы метилированы ещё слабо и сохраняют высокую чувствительность. Значит, «почуяв» более высокую концентрацию, они, скорее всего, отменят пробой – клетка продолжит плыть в сторону повышения концентрации.

А если малютку развернуло не туда и концентрация полезного вещества с каждым миллиметром падает? Рецепторы ещё остаются сильно метилированными, и низкая концентрация на них не подействует – высока вероятность, что случится пробой и клетка прервёт движение в невыгодном направлении.

Мы получили механизм, позволяющий клетке чувствовать изменение концентрации по мере движения. Хотя основан он всего-навсего на запаздывании одних биохимических реакций относительно других.

«Интеллект» инфузорий уступает даже арифмометру – у того 2 + 2 всегда 4, а не «наиболее вероятно». Но сколько жизненно важных задач он способен решить!

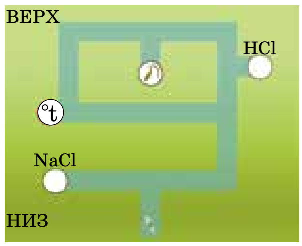
Между прочим, «умные» действия безмозглых инфузорий позволяют если не доказать, то проиллюстрировать вопрос из совсем другой области знаний, а именно политологии. Большинство людей в современном мире согласны, что демократия лучше дик-

татуры. Но вот убедительно обосновать свою точку зрения в споре с поклонниками «сильной руки» им зачастую не удаётся. Например, утверждение, будто при всенародных выборах в парламент или в правительство попадают лучшие из лучших, явно не соответствует истине. И диктатор может оказаться образованным и компетентным, может искренне «болеть» за развитие страны. И демократически избранный депутат частенько бывает болваном и коррупционером.

Но пример с инфузориями показывает: долго двигаться в одном и том же направлении опасно – можно заплыть не туда. Да, периодическая смена власти (республиканцев и демократов в США, лейбористов и консерваторов в Британии и т.п.) может иногда порождать правительственные кризисы – «кувыркание» на месте. Зато она позволяет обществу нащупывать новые пути развития, сменить курс, если он гибелен для страны.

Те же инфузории «подсказывают»: если курс удачный, стоит на нём задержаться. Поэтому даже в демократических странах выборы проводятся не каждый год, а по меньшей мере раз в четыре года – чтобы дать победившей партии реализовать свою программу.

Задача 1. В начале статьи мы подчеркнули, что вода, которую вы наливаете простейшим, не должна быть кипячёной. Почему?



Задача 2. Каким минимальным набором таксисов должна обладать инфузория, посаженная в лабиринт на рисунке, чтобы **как можно скорее** добраться до вкусных бактерий и не угодить при этом в соляную кислоту (HCl)? Наличие каких таксисов может завести инфузорию в тупик? Что нужно, чтобы даже при их наличии инфузория достигла цели?

Примечание: не забывайте, что таксисы могут различаться по силе, а также что сила воздействия почти всех факторов убывает с расстоянием (за исключением тяготения).

Задача 3. На дне океанов в местах расхождения литосферных плит бьют горячие гейзеры – «чёрные курильщики», выбрасывающие раствор сероводорода (H_2S). Температура раствора у жерла гейзера достигает 400 °C (из-за высокого давления вода не закипает), но быстро падает по мере удаления от него.

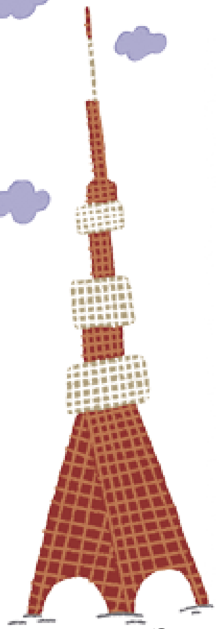
Серобактерии используют H_2S как источник энергии для синтеза органических веществ. Конечно, у них есть положительный таксис на сероводород, побуждающий их двигаться в сторону большей его концентрации. Какой ещё таксис нужен этим бактериям, чтобы удерживаться в зоне оптимума и не погибнуть?

Художник Мария Усеинова

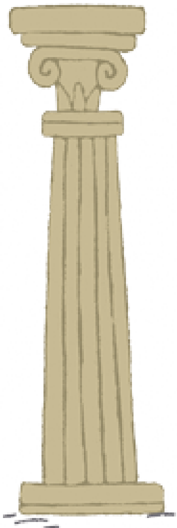
Сергей Цитовский

С грузинского на русский

Перед вами – грузинские названия 15 известных городов мира:



ლონდონი
პარიზი
ბერლინი
ტოკიო
სან-ფრანცისკო
რომი
ნიუ-იორკი
რიო-დე-ჟანეირო



ჰელსინკი
ბუდაპეშტი
მოსკოვი
ჰამბურგი
ათენი
ერევანი
თბილისი

Запишите эти названия на русском языке.

Задача предлагалась в ноябре 2008 года на Традиционной олимпиаде по лингвистике.

Художник Елена Цветаева

Владимир Красноухов

ДОМИНО ОТШЕЛЬНИКА – 2, ИЛИ «ПОЛТОРА ДОМИНО»

Домино, как известно, игра коллективная. А вот в предлагаемую игру можно играть и в компании, и в одиночку. Правда, эту головоломку точнее будет назвать «полтора домино». Впрочем, давайте всё по порядку.

Если взять домино (прямоугольник 1×2) и диагональную половинку домино (рис. 1), а затем состыковать их сторонами образующих клеток 1×1 всеми возможными способами, получится 8 различных фигур (рис. 2). Это и есть наши игровые элементы. Площадь каждого составляет 3 клетки, а их суммарная площадь равна $3 \cdot 8 = 24$ клеткам.

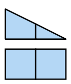


Рис.1

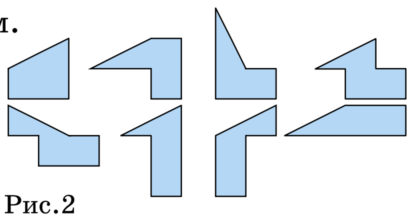


Рис.2

А теперь предлагаем вам собрать из этих неудобных на первый взгляд элементов красивые фигуры. Как обычно, элементы можно как угодно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.

В каждой из задач 1–4 надо использовать все 8 элементов по одному разу.

Задача 1. Соберите прямоугольник 6×4.

Задача эта сравнительно несложная, она имеет несколько решений, приводим одно из них на рисунке 3.

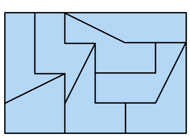


Рис. 3

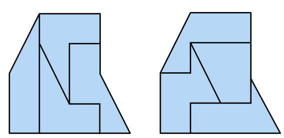
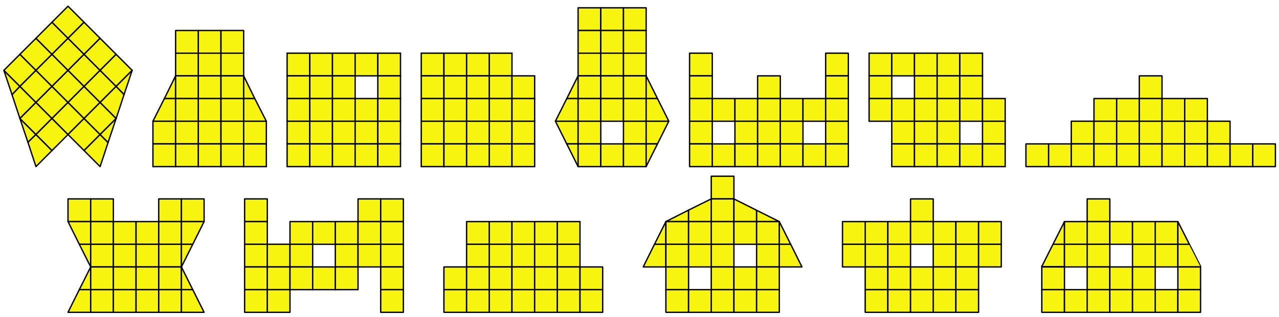


Рис. 4

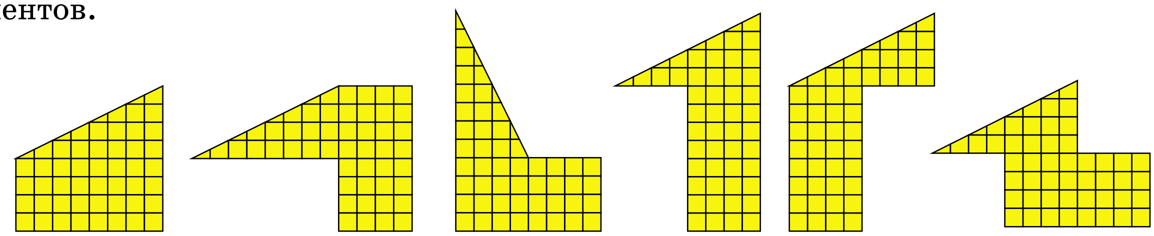
Задача 2 (более сложная). Соберите прямоугольник 3×8. Решение единственное.

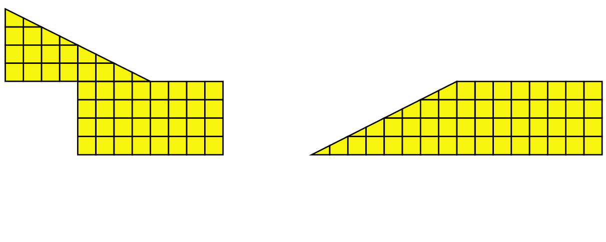
Задача 3. Соберите одновременно две одинаковые фигуры. Приводим одно из решений (рис. 4).

Задача 4. Составьте фигуры по заданным силуэтам:



Задача 5. Замостите последовательно фигуры, подобные элементам «полтора домино». Для построения каждой фигуры потребуется два комплекта игровых элементов.





Желаем успехов!

Художник Алексей Вайнер

Четыре задачи

Валерия Сирота

Задачи про магниты

Магнитное поле создаётся движением заряженных частиц – электрическим током в проводе или микроскопическими токами внутри магнита. И само оно, в свою очередь, может действовать на движущиеся заряженные частицы, заставляя их менять направление своего движения.

1. Все, наверно, видели, что случается с кучкой железных опилок, насыпанной на лист бумаги, если снизу поднести к этому листу магнит: опилки выстраиваются вдоль линий магнитного поля. Они намагничиваются – попав в магнитное поле, и сами превращаются в магнитики. Но линии магнитного поля есть везде, они проходят через каждую точку. Почему же, намагнитившись, опилки не остаются каждая на своей магнитной линии, а «переползают» по бумаге на соседние места и строятся в цепочки?

2. Почему компас не работает под проводами ЛЭП?

3. Земля – тоже большой магнит. Где северный полюс у этого магнита?

4. Майкл Фарадей знал, что электрический ток создаёт магнитное поле, и догадался, что изменение магнитного поля может создавать ток – без всякой батарейки.

Он сделал большой электромагнит, вокруг него намотал провод и подключил к нему амперметр для измерения тока.

Легенда гласит, что магнит занял всю комнату, и амперметр пришлось поставить в соседней. Много раз Фарадей включал и выключал электромагнит, магнитное поле менялось – но ток никак не удавалось обнаружить.

И только когда Фарадей нанял помощника, он обнаружил появление тока в проволоке! Почему же ему не удавалось открыть это явление раньше? Чем помог ассистент?

Художник Мария Усеинова

Математический кружок

Игорь Акулич

Треугольная формула Пика

Знаменитая формула Пика получила своё название по имени автора – австрийского учёного Георга Александра Пика, опубликовавшего её на рубеже XIX и XX веков. Формула Пика удивительно красива, и потому является любимой темой популярных публикаций (можно порекомендовать статью Г.Мерзона «Площадь многоугольников и тающий лед» из 9-го номера «Квантика» за 2018 год либо более раннюю статью Н. Васильева «Вокруг формулы Пика» из 12-го номера «Кванта» за 1974 год – в этих статьях приводится и её доказательство).

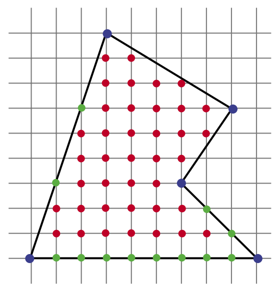


Рис. 1

Поскольку, возможно, не все читатели в курсе дела, вкратце изложим суть. Пусть бесконечная плоскость разбита вертикальными и горизонтальными прямыми на одинаковые квадраты, площадь каждого из которых равна s_0 (обычно для простоты принимают $s_0 = 1$, но нам здесь удобнее именно так – в общем виде). Назовём *узлами* точки, являющиеся вершинами квадратов, и нарисуем произвольный многоугольник, все вершины которого лежат в узлах. При этом стороны многоугольника не обязаны быть вертикальными или горизонтальными (хотя это и не возбраняется). Например, у пятиугольника на рисунке 1 только одна сторона горизонтальна, а остальные – наклонны.

Подсчитаем количество узлов, попавших *строго внутрь* многоугольника (на рисунке 1 они выделены красным цветом), а также количество узлов, оказавшихся *на границе* многоугольника. Заметим, что на границе находятся, во-первых, все вершины многоугольника (синие), а также те узлы, что волею случая оказались на сторонах (зелёные). В частности, у нашего пятиугольника имеется 39 красных узлов, а синих, разумеется, 5 (в каждой вершине), и плюс ещё 12 зелёных на сторонах. Итого на границе $5 + 12 = 17$ узлов.

Георг Пик доказал, что площадь S любого такого многоугольника зависит только от количества вершин каждого типа, то есть S есть функция от числа вершин $В$, лежащих внутри многоугольника, и от числа вершин $Г$, попавших на границу, и эту функцию можно записать в виде формулы (её-то и называют формулой Пика):

$$S\,(В,\,Г) = (В + 0{,}5Г - 1) \cdot s_0.$$

Вернувшись к тому же пятиугольнику на рисунке 1, мы без труда найдём его площадь. Здесь $В = 39$, $Г = 17$, и потому площадь равна $S\,(39,\,17) = (39 + 0{,}5 \cdot 17 - 1) \cdot s_0 = 46{,}5 \cdot s_0$. А попробуйте-ка подсчитать «вручную»![1]

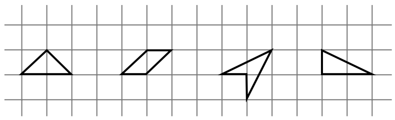


Рис. 2

Сила формулы Пика ещё и в том, что форма многоугольника, оказывается, в каком-то смысле «вторична», главное – количество тех или иных узлов. Например, на рисунке 2 изображены несколько разных многоугольников, но у них всех $В = 0$ и $Г = 4$, потому площади их одинаковы (кстати, чему они равны?).

Формула Пика столь изящна, что не хочется верить, будто она работает только для квадратной решётки. И действительно, формула Пика применима для *любой* бесконечной сетки, состоящей из *равных параллелограммов*, и внешне выглядит точно так же (если площадь «элементарного» параллелограмма равна s_0). То есть все «растяжки» и «перекосы», превращающие квадрат в параллелограмм, ничуть не сказываются на её справедливости.

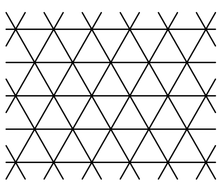
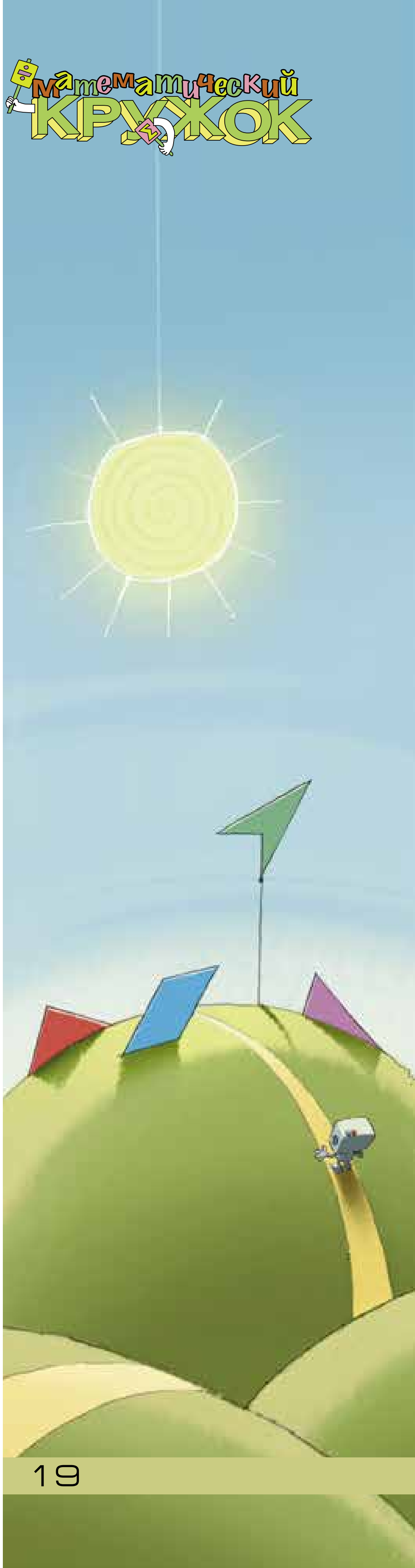


Рис. 3

Но и это далеко не всё. С не меньшим успехом можно разбить плоскость прямыми *трёх направлений* (под углами 60° друг к другу) на одинаковые *треугольники* (рис. 3). Представим себе многоугольник, вершины которого лежат в узлах этой треугольной решётки, и зададимся вопросом: не будет ли площадь S

[1] Конечно, тоже не ахти какая сложность – надо лишь разбить многоугольник на прямоугольники и прямоугольные треугольники, но повозиться придётся всё-таки дольше.



этакого многоугольника тоже зависеть только от количества узлов, попавших внутрь (B) и на границу ($Г$) многоугольника, и если да – то какова эта зависимость $S\ (B,\ Г)$? Площадь каждого из «элементарных» треугольников, на которые разбита плоскость, мы считаем равной s_0. Иными словами, существует ли для такой сетки аналог формулы Пика (которую уместно назвать *треугольной* формулой Пика)?

Оказывается, да! Чтобы в этом убедиться, сначала у сетки, изображённой на рисунке 3, удалим все прямые одного из трёх направлений (например, идущие с «северо-запада» на «юго-восток»). Получится «ромбическая» сетка, где каждый ромб образован объединением двух треугольников (рис. 4), и потому площадь такого «элементарного» ромба равна $2s_0$. Вместе с тем, после удаления всех прямых одного направления *ни один узел не пропал* – просто теперь в каждом узле пересекаются не три, а две прямые. И если на сетке был нарисован многоугольник с вершинами в узлах, то его граница будет проходить через столько же узлов, сколько и ранее, да и количество узлов внутри многоугольника не изменится.

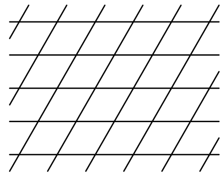


Рис. 4

А поскольку ромб – частный случай параллелограмма, для указанной сетки можно применить формулу Пика (помня, что площадь элементарного ромба равна не s_0, а $2s_0$). Разумеется, она же окажется верной и для исходной треугольной сетки. Итак, для треугольной сетки площадь многоугольника с вершинами в узлах сетки находится по формуле:

$$S_{треуг.}\ (B,\ Г) = (B + 0{,}5Г - 1) \cdot 2s_0 = (2B + Г - 2) \cdot s_0.$$

Можно двинуться и дальше. Рассмотрим сетку, напоминающую кирпичную кладку (рис. 5), на которой одинаковые «прямоугольники-кирпичи» образуют полосы, сдвинутые на «полкирпича» относительно соседней полосы. Не поискать ли для неё аналог формулы Пика? Здесь, разумеется, узлами считаем все

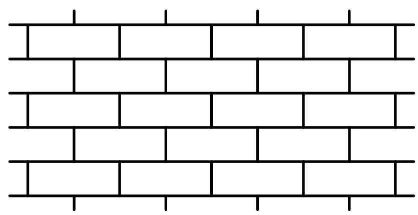


Рис. 5

точки, являющиеся вершинами какого-либо элементарного прямоугольника, площадь которого, по традиции, примем равной s_0.

К счастью, и здесь успех гарантирован. Надо всего лишь каждый прямоугольник разбить по вертикали на два «полукирпича». В результате получится «типовая» сетка из прямоугольников, образуемых двумя семействами прямых, для которой формула Пика очень даже применима. Надо лишь учесть, что здесь (в противоположность рассмотренной выше треугольной сетке) элементарный прямоугольник будет вдвое меньше исходного, и потому его площадь равна $0{,}5s_0$. Поэтому для «кирпичной» сетки формула Пика такова:

$$S_{кирп.}(В, Г) = (В + 0{,}5Г - 1) \cdot 0{,}5\,s_0 = (0{,}5В + 0{,}25Г - 0{,}5) \cdot s_0.$$

А сейчас предлагаем читателю самостоятельно найти аналог формулы Пика для сетки, состоящей из равных прямоугольных треугольников. Она получается из обычной квадратной сетки, если каждый её квадрат обеими диагоналями разрезать на четыре равные части (рис. 6). Разумеется, здесь s_0 – площадь каждого прямоугольного треугольника, на которые разделена плоскость. А потом сверьтесь с ответом на с. 31.

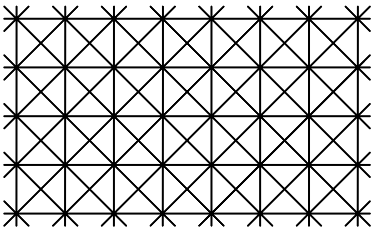


Рис. 6

В заключение вспомним, что плоскость можно разделить не только на равные квадраты и треугольники, но и на шестиугольники – наподобие пчелиных сот (рис.7). Может, и для такой сетки существует аналог формулы Пика? Попробуйте это выяснить.

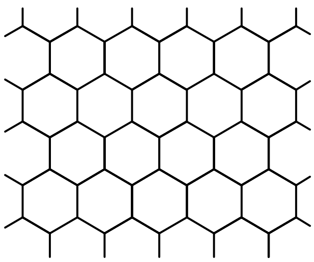
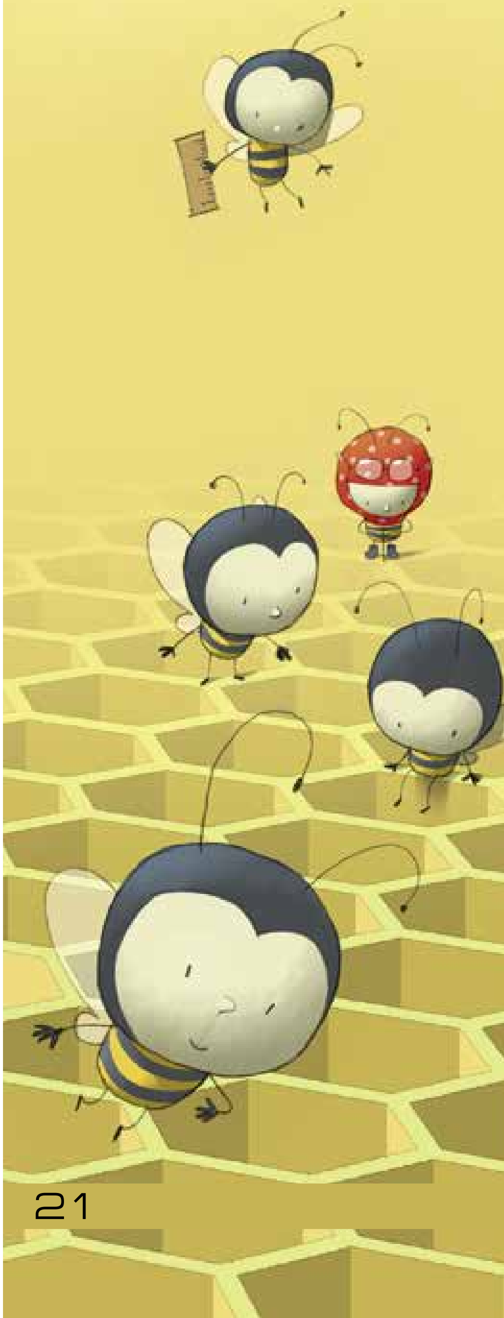


Рис. 7

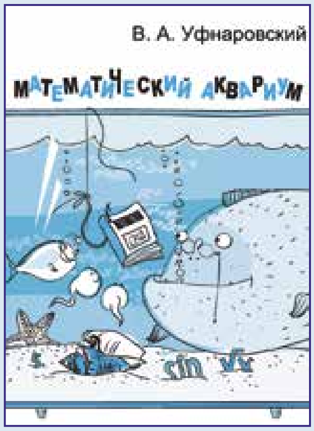
Существуют, кстати, обобщения формулы Пика для определения объёмов тел в трёхмерном пространстве (и даже в пространствах более высоких размерностей) – так называемый *многочлен Эрхарта*. Но это очень сложная тема, уводящая слишком далеко. Поэтому углубляться не будем.

Художник Алексей Вайнер



Виктор Уфнаровский

ОТ РЕДАКЦИИ. Издательство МЦНМО выпустило уже несколько переизданий замечательной книги Виктора Уфнаровского «Математический аквариум». Вот названия первых глав: «На газете до Венеры», «Искусство обозначать, или принцип бяки», «Умение сделать вид», «Как бороться с модулями, или искусство перебора», «О противных доказательствах», «Как считать, чтобы не считать».



Уфнаровский В.А. Математический аквариум. – М.: МЦНМО, 2016

А вот несколько небольших отрывков из главы о графах.

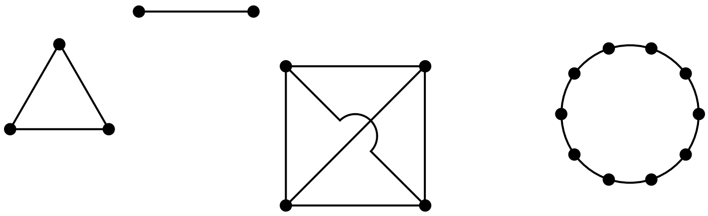
ИХ СИЯТЕЛЬСТВО ГРАФ

Как можно без содрогания помыслить о бедствиях, которые способна причинить хотя бы одна опасная связь!

Шодерло де Лакло. Опасные связи
(пер. Н. Рыкова)

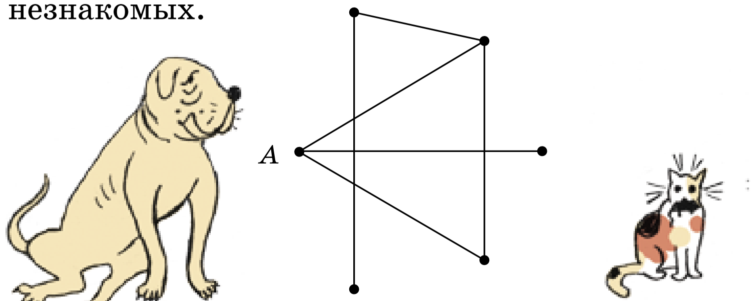
Мы начинаем главу об одном из самых гордых (по названию) обитателей математического аквариума – о графе. Под этим красивым и благозвучным словом скрывается удивительно простое и понятное определение. Граф – это всего-навсего несколько точек, часть из которых друг с другом соединены (не обязательно отрезками, можно просто линиями или же вообще ничем, лишь бы они считались соединёнными). Точки называются вершинами, соединяющие линии – рёбрами графа. Например, на любой треугольник мы можем смотреть как на граф, у которого три вершины и три ребра. Отрезок – это граф с двумя вершинами и одним ребром. Возьмём квадрат и проведём в нём две диагонали, причём не будем обращать внимания на точку пересечения диагоналей, как бы считая, что они не пересекаются. Тогда получим граф с четырьмя вершинами и шестью рёбрами. Если на окружности нарисуем девять точек, получим граф с девятью вершинами и девятью рёбрами, которыми

будут служить дуги окружности. Две изолированные точки – это тоже граф с двумя вершинами и без рёбер. Ещё приятнее строить граф в пространстве: там всегда можно добиться того, чтобы соединяющие линии не пересекались (в пространстве больше места).



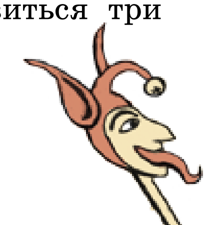
Примеры графов

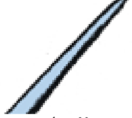
Задача. Доказать, что из шести любых людей найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.



К задаче о знакомствах

Поиск решения. Самая главная неприятность в задаче – слишком «нематематическая» постановка вопроса. Что значит «знакомы»? Как это строго записать, какой формулой? А может, и не формулой вовсе, а геометрически? А что, если граф поможет? Надо как-то попробовать поставить в соответствие задаче граф, тогда она, по крайней мере, станет «виднее». Значит, так. Берём шесть точек (по точке на каждого человека) – это вершины. А рёбра будем строить так: если люди знакомы между собой, то и точки соединим. Не знакомы – не соединяем. Хорошо! Как же теперь выглядит наша задача в такой интерпретации? А вот как: в любом графе с шестью вершинами найдутся либо три попарно соединённые вершины (по существу, треугольник, хотя, быть может, с кривыми сторонами), либо три попарно не соединённые вершины. Чисто геометрически это довольно ясно: если линий много, то должен быть треугольник, а если мало, то должны появиться три





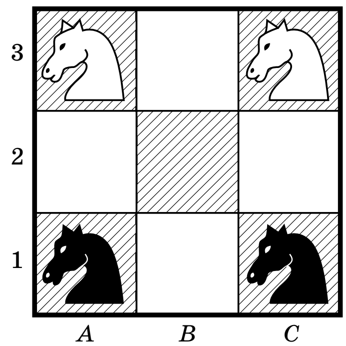
не связанные между собой вершины. Попробуем это как-то более тщательно обосновать. Допустим, что линий много. Например, из одной вершины их выходит более половины возможного. Всего возможно пять, так как остальных вершин осталось пять, а более половины – это три. Итак, пусть из одной вершины выходит три ребра. Рассмотрим вершины, лежащие на другом конце этих рёбер. Если какие-то две из них соединены, то и получаем треугольник вместе с двумя рёбрами, соединяющими их с исходной вершиной. Значит, они не соединены и… всё, что надо, получено – нашли три вершины, попарно не соединённые. С этим случаем разобрались.

Случай, когда рёбер меньше, мы оставим читателю. Заметим только, что этот случай совершенно аналогичен уже рассмотренному. Маленькая подсказка в форме вопроса: что мы получили бы, если бы строили граф наоборот, соединяя те вершины, которые соответствуют незнакомым людям? (Такой граф, кстати сказать, называют дополнительным к исходному.)

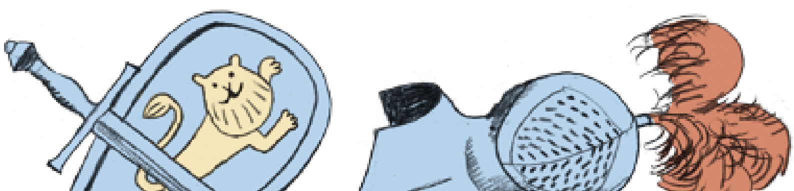
Что же выяснилось из этого решения? Мы поняли, где и зачем нужен граф. Граф приходит на помощь тогда, когда имеются какое-то множество и связи между его элементами. При этом характер связей несуществен, а важен только один вопрос: есть связь или её нет. Именно эту ситуацию и отражает адекватно граф. Преимущества такого подхода понятны: мы можем привлечь неплохо развитую у человека геометрическую интуицию, мы можем что-то *увидеть*, а значит, лучше оценить.

***

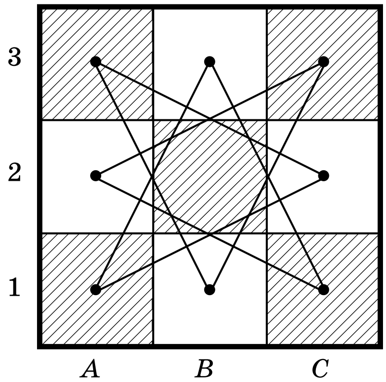
Задача. На шахматной доске 3×3 стоят по углам снизу два чёрных коня, сверху – два белых (см. рисунок). За какое наименьшее количество ходов белых и чёрных коней можно поменять местами?



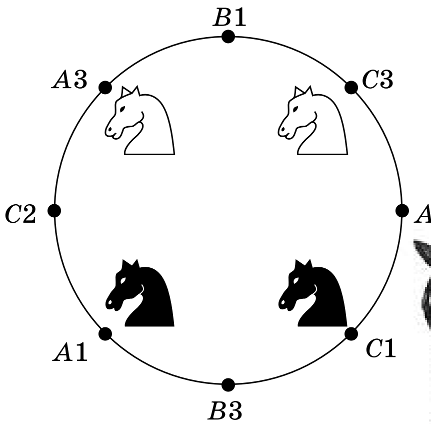
Как поменять коней местами?



Поиск решения. Сравнительно быстро можно указать одного из нескольких возможных кандидатов на кратчайшую перегруппировку кавалерии. Но вот как можно было бы доказать, что не может быть ничего короче? Это – вопрос вопросов. Попытаемся проанализировать схему коммуникаций. Каждая клетка связана ровно с двумя другими. Связана… А ведь связь – это слово «графское». Не пора ли припомнить теорию графов? Попробуем. Рассмотрим граф с восемью вершинами, каждая из которых отвечает одной из клеточек на краю доски (центральную клетку не будем рассматривать: в неё всё равно не попасть). И нарисуем граф связей. Ой, какой красивый граф получается: окружность и на ней восемь точек. Значит, наши ходы конём с этой точки зрения – сдвиг по дуге окружности. А вот в такой интерпретации совершенно ясно, как убедиться, что выбранный способ перегруппировки минимальный (как, читатель, действительно ясно?).



Граф связей



Кони бегают по кругу

Метод, который мы сейчас привели, по существу есть метод нити и пуговиц, состоящий в следующем: пришить пуговицы, стоящие на клеточках, друг к другу нитками в соответствии со связями. Затем всю эту комбинацию приподнять и распутать, что мы и проделали.

Художник Артём Костюкевич

Русский медвежонок

Избранные задачи 2020 года

Материал подготовил Илья Иткин

1. По мнению ряда учёных, одно из значений некоторого глагола появилось из-за представлений о колдовстве: колдуны разбрасывали некий продукт, предварительно произнеся над ним заклинание. Человек, который наступал на то, что было рассыпано, подвергался «порче». Что рассыпали колдуны?

(А) *перец*; (Б) *муку*; (В) *горох*;
(Г) *сахар*; (Д) *соль*.

С. В. Дьяченко

2. *Мы отсеяли всё ненужное.* В этой фразе можно поменять одну букву на другую, и смысл почти не изменится. На какую?

(А) *б*; (Б) *и*; (В) *к*; (Г) *н*; (Д) *я*.

Б. Л. Иомдин

3. Выступая с совместными статьями, учёный-экономист Н. Ф. Анненский и писатель В. Г. Короленко печатали их под псевдонимом «О. _ А.».

(А) А.; (Б) Б.; (В) В.; (Г) Г.; (Д) Д.

И. Б. Иткин

4. Даны числительные на языке бакаири́, на котором говорит около 950 человек в Бразилии:

4 – ahage ahage;
5 – ahage ahage tokale;
9 – ahage ahage ahage ahage tokale.

Как будет 7 на языке бакаири?

(А) ahage ahage ahage ahage;
(Б) ahage ahage tokale tokale tokale;
(В) tokale tokale tokale ahage;
(Г) ahage ahage ahage tokale;
(Д) tokale ahage ahage ahage.

А. И. Пучкова

Художник Николай Крутиков

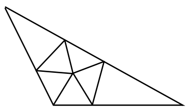
ЖАРКО И ЕЩЁ ЖАРЧЕ

Почему жители пустынь и жарких стран (например, бедуины) носят плотную одежду, закрывающую тело и голову, а мы обычно поступаем наоборот – в жару носим меньше одежды, и она открытая (футболка, шорты и т. д.)?

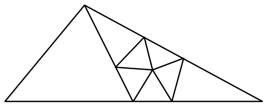
Художник Евгений Паненко

НАШ КОНКУРС, X тур
(«Квантик» № 6, 2021)

46. *Петя пытался разрезать тупоугольный треугольник на остроугольные треугольники, но у него ничего не получалось. В какой-то момент он узнал из одной книги, что такое разрезание возможно для 7 треугольников (см. рисунок). А можно ли разрезать какой-нибудь тупоугольный треугольник на 8 остроугольных треугольников?*



Ответ: да. Надо сначала разрезать треугольник на два, проведя разрез через вершину *тупого* угла так, чтобы получился *остроугольный* и *тупоугольный* треугольники, а потом применить для нового тупоугольного треугольника разрезание на 7 остроугольных треугольников (см. рисунок). Если нужно получить ещё больше остроугольных треугольников, применяем это правило к новому тупоугольному треугольнику, и т.д.

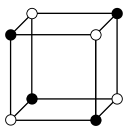


47. *а) Ноутик записал по числу в вершинах треугольной пирамидки и про каждое из шести её рёбер сообщил Квантику, какова сумма чисел на концах этого ребра. Как Квантику восстановить числа в вершинах? б) Удастся ли однозначно восстановить числа, если Ноутик запишет числа в вершинах куба и сообщит сумму на каждом ребре?*

Ответ: а) да; б) нет.

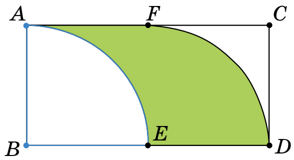
а) Сумма чисел на паре противоположных рёбер равна сумме чисел во всех вершинах. Теперь сложим числа на рёбрах, исходящих из одной вершины, скажем, A. В полученной сумме вершина A учтена трижды, а остальные – единожды. Вычтя уже известную сумму чисел во всех вершинах и поделив пополам, найдём число в вершине A. Аналогично для остальных вершин.

б) Покрасим вершины куба в шахматном порядке (см. рисунок). Если мы уменьшим числа в белых вершинах на 1, а в чёрных – увеличим на 1, числа на рёбрах не изменятся.



48. *Дан ржавый циркуль с фиксированным раствором 10 см. С его помощью нарисуйте несколько линий на прямоугольнике 10 см × 20 см так, чтобы после разрезания по этим линиям среди кусков нашлась фигура площади 100 см^2.*

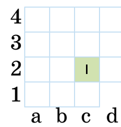
Пусть в прямоугольнике $ABCD$ короткая сторона – это AB. Проведём дугу с центром в вершине B (см. рисунок). Она пройдёт от вершины A до середины E стороны BD. Теперь проведём дугу с центром в E от вершины D до середины F противоположной стороны. Площадь полученной фигуры $AEDF$ будет равна половине площади прямоугольника. Действительно, оставшиеся части при совмещении образуют квадрат со стороной 10 см.



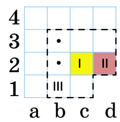
49. *На экране дан белый клетчатый квадрат 4×4 без угловой клетки. Одна из оставшихся 15 клеток призовая. За одну попытку игрок нажимает на любую клетку, и та становится зелёной, если она призовая, жёлтой, если призовая клетка соседняя (по стороне или углу), и красной иначе. Может ли игрок наверняка узнать, какая клетка призовая, после трёх попыток?*

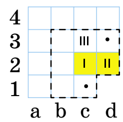
Ответ: да. Введём координаты на нашей доске как на шахматной (по горизонтали a–d, по вертикали 1–4) и будем считать, что удалена клетка d1. Первым ходом нажимаем на c2.

0-й случай: c2 зелёная – конец. С этого места мы опускаем разбор тех случаев, когда кнопка, на которую мы нажали на некотором ходу, зелёная.

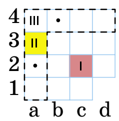


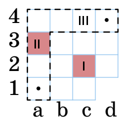
1-й случай: c2 жёлтая. Тогда вторым ходом нажимаем на d2. Если d2 красная, то призовая b1, b2 или b3. Тогда, нажав третьим ходом на b1, мы сможем определить призовую. Если же d2 жёлтая, то призовая на c1, c3 или d3. Нажимая последним ходом на c3, мы определим, где призовая.





2-й случай: c2 красная. Тогда призовая клетка либо на вертикали a, либо на горизонтали 4. Нажимаем на a3. Если она жёлтая, то призовая клетка a2, b4 или a4, и третьим ходом мы определим, где призовая, нажав на a4. Если a3 красная, осталось три клетки на выбор: a1, c4 и d4. Тогда нажимаем на c4 и по её цвету определим, где призовая.





50. *В строку записаны несколько букв О и Р в произвольном порядке (назовём это «словом»). Первым ходом между каждыми двумя соседними буквами исходного слова впишем дополнительные буквы по таким правилам:*

• *если соседние буквы одинаковые, между ними вписывается О;*

• если соседние буквы разные, между ними вписывается Р.

Вторым ходом по тем же правилам впишем буквы между каждыми двумя соседними буквами полученного слова, и т.д. (например: ООР, ОOOРР, ОООООРРОР, ...). Пусть мы начали со слова ОР и сделали 55 ходов. Каких букв – О или Р – будет в получившемся слове больше и во сколько раз?

Ответ: букв Р будет в 2 раза больше, чем О.

После первого хода на доске будет написано ОРР, после второго – ОРРОР, после третьего – ОРРОРРОРР. Докажем, что и дальше после нечётных ходов слово на доске будет состоять из подряд идущих троек ОРР, а после чётных ходов – несколько троек ОРР и в конце ОР.

Если в слове есть тройка ОРР, после которой идёт ещё одна буква О, эта тройка превратится в ОРРОРР (мы учли букву, которая появится после тройки, а букву перед тройкой не учитываем). Если тройка ОРР – последняя, она превратится в ОРРОР. Если же на конце слова была лишь пара ОР, она перейдёт в тройку ОРР. Значит, после всех чётных ходов на доске будет слово вида ОРР ОРР ... ОРР ОР, а после нечётных – слово вида ОРР ОРР ... ОРР.

Тогда после 55-го хода слово на доске будет разбиваться на тройки ОРР, а значит, букв Р в нём будет ровно в 2 раза больше, чем О.

КОСЫЕ КВАДРАТЫ: ОТ ПИФАГОРА ДО ФЕРМА («Квантик» № 7, 2021)

1. а) 2 клетки; 5 клеток.

б) Да: возьмём квадрат площадью 2 клетки из п. а) и увеличим его сторону в 10 раз.

2. Нет: разделим клетку пополам. Но эта площадь – всегда целое или полуцелое число. *Указание:* докажите это сначала для треугольников (а треугольник легко вписать в прямоугольник).

3. а) Квадрат, чья сторона – диагональ квадрата площади N, состоит из четырёх половинок исходного. Его площадь равна $2N$.

б) Если $2N$ – сумма двух нечётных квадратов, то на клетчатой бумаге можно нарисовать квадрат площади $2N$, причём центр этого квадрата тоже лежит в узле сетки. А квадрат со стороной от вершины исходного квадрата до его центра как раз будет иметь площадь N.

Приведём и чисто алгебраические решения.

а) Записав рядом формулы $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ и $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, можно сообразить, что если $N=a^2+b^2$, то $2N=(a+b)^2+(a-b)^2$.

б) Ту же формулу можно переписать в виде $\frac{N}{2}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. Если a и b одной чётности, то числа в скобках целые.

4. Нарисуем поверх старых клеток новые – из квадратов площади M. По условию, мы можем нарисовать квадрат площади N новых клеток – его площадь будет MN (старых) клеток.

И снова можно решить задачу и чисто алгебраически. Если $M=a^2+b^2$, $N=c^2+d^2$, то $MN= = a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2 = a^2c^2+b^2d^2-2abcd+ +2abcd+a^2d^2+b^2c^2=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$.

Пожалуй, геометрическое решение проще.

5. Любое целое положительное число представимо в виде суммы четырёх квадратов (но доказать это совсем не просто!).

КОЛЬЦЕВАЯ ДОРОГА («Квантик» № 7, 2021)

Когда поезд движется по кольцу, одна сторона колёс изнашивается больше другой, и колёса приходится обтачивать. Чтобы делать это реже, полезно периодически менять сторону, которой поезд обращён к центру кольца. Интересно, что история взята из жизни: на Московском центральном кольце в депо не предусмотрена возможность разворота, поэтому каждую ночь один из поездов едет за город к окружной железной дороге, чтобы просто развернуться.

БЕГОТНЯ ПО ПОЛЯМ И ДОРОГАМ

Время будет наименьшим, когда A попадёт на границу области, как на рисунке 1 (AK проходим по полю и KB – по дороге). Время при этом будет таким же, как если пройти MB по дороге. По условию, $AB=13$ и $AH=5$, откуда $HB=12$. Так как по дороге идти в 5/3 раза быстрее, угол α таков, что если $AK=3x$, то $MK= =5x$, откуда $MA=4x$ (по теореме Пифагора), то есть стороны прямоугольного треугольника с углом α относятся как $3:4:5$. Но и в треугольнике MAH тогда $MH:AH=4:3$, то есть $MH=\frac{5\cdot 4}{3}$, откуда $MB=MH+HB=\frac{20}{3}+12=\frac{56}{3}$, а искомое время равно $\frac{56}{15}$ ч.

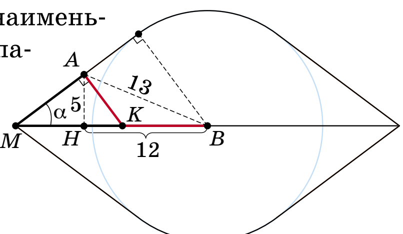


Рис. 1

Вот идея чуть другого решения. Отложим угол α от точки B. Тогда идти KB по дороге – то же самое, что пройти KX по полю (рис. 2, $KX\perp XB$),

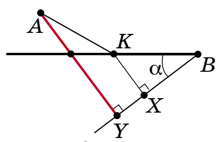


Рис. 2

и нам достаточно минимизировать путь $AK + KX$ по полю. Ясно, что для этого надо опустить перпендикуляр AY на сторону угла.

УМ БЕЗ МОЗГА, или ПОЧЕМУ ДЕМОКРАТИЯ ЛУЧШЕ ДИКТАТУРЫ

1. В кипячёной воде, даже после её полного остывания, нет или очень мало кислорода. Простейшие в ней просто задохнутся.

2. Быстрее добраться до бактерий и не погибнуть в кислоте инфузория сможет при наличии:

– отрицательного хемотаксиса на соль (NaCl);

– отрицательного хемотаксиса на кислоту;

– положительного хемотаксиса на выделения бактерий.

Ещё могут помочь слабые (!) положительные электро-, гео- и фототаксисы. Но если они окажутся сильнее положительной реакции на бактерий, то могут «не пустить» инфузорию к пище.

3. Бактерии должны обладать по меньшей мере отрицательным термотаксисом. Иначе, плывя в сторону увеличения концентрации сероводорода, они сварятся в кипятке.

Другое решение: при превышении определённой концентрации сероводорода реакция на него сменяется с положительной на отрицательную. Но это явно хуже – если H_2S мало, а вода горячая, бактерия может и погибнуть.

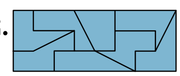
С ГРУЗИНСКОГО НА РУССКИЙ

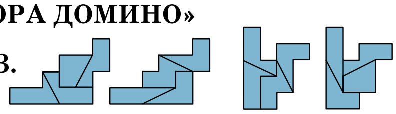
Едва ли не единственный из известных городов мира, название которого состоит из трёх частей, – Рио-де-Жанейро; его можно отождествить с грузинским словом с двумя дефисами. Теперь мы знаем достаточно букв, чтобы пытаться отождествлять и другие названия. Например, перед Рио-де-Жанейро в таблице находится город *ни...-иор...и*, то есть, очевидно, Нью-Йорк. Ещё один город с дефисом – *...ан-...ран...и...ко*, очевидно, Сан-Франциско. Значительная часть оставшихся городов отождествляется уже почти автоматически: *...ондони* – Лондон, *...ерлини* – Берлин (тут уже можно заметить, что названия, по-русски заканчивающиеся на согласный, по-грузински кончаются на *-и*), *...океио* – Токио, *...елсинки* – Хельсинки, *буда...е...ти* – Будапешт, *хамбурги* – Гамбург, *ере...ани* – Ереван, *...билиси* – Тбилиси (с каким-то не таким «*т*», как в Токио). Остались города: *пари...и*, очевидно, Париж, хотя надо заметить, что по-грузински в этом слове не тот же звук, что в Рио-де-Жанейро; *роми* – очевидно, Рим (ср. названия этого города на европейских языках, например английское *Rome* или немецкое *Rom*); *москови* – Москва (ср. европейское название Русского царства «Московия»). Сложнее всего перевести название *атени*, однако можно догадаться, что это Афины (ср. англ. *Athens*).

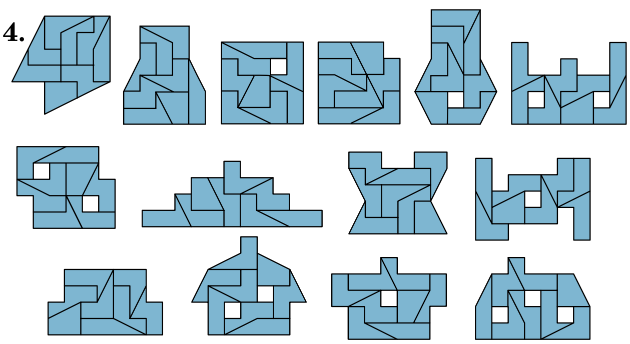
На самом деле буква ზ читается как [з], буквы პ, ტ и კ обозначают звуки [п], [т] и [к], произносимые с особым движением гортани вверх (обозначим их за [п’], [т’] и [к’]), а буквы ფ и თ – звуки [п] и [т] с придыханием (обозначим их за [п^{х}] и [т^{х}]).

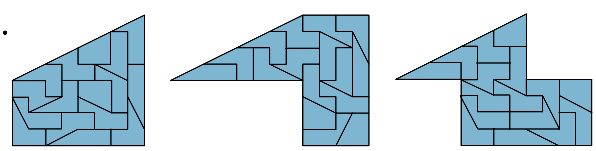
ლონდონი	лондони	Лондон
პარიზი	п’аризи	Париж
ბერლინი	берлини	Берлин
ტოკიო	т’ок’ио	Токио
სან-ფრანცისკო	сан-п^{х}ран-циск’о	Сан-Франциско
რომი	роми	Рим
ნიუ-იორკი	ниу-иорк’и	Нью-Йорк
რიო-დე-ჟანეირო	рио-де-жане-иро	Рио-де-Жанейро
ჰელსინკი	хелсинк’и	Хельсинки
ბუდაპეშტი	будап’ешт’и	Будапешт
მოსკოვი	моск’ови	Москва
ჰამბურგი	хамбурги	Гамбург
ათენი	ат^{х}ени	Афины
ერევანი	еревани	Ереван
თბილისი	т^{х}билиси	Тбилиси

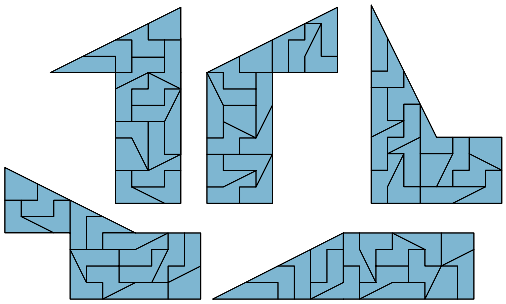
ДОМИНО ОТШЕЛЬНИКА – 2, ИЛИ «ПОЛТОРА ДОМИНО»

2. 

3. 

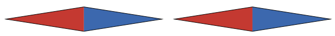
4. 

5. 



ЗАДАЧИ ПРО МАГНИТЫ

1. У магнитов притягиваются разноимённые полюса – южный к северному. А одноимённые (например, южный и южный) отталкиваются. Поставленные рядом два компаса развернутся стрелками друг к другу, «нос в хвост»:



Ровно так же выстраиваются и опилки – они «сцепляются» друг с другом своими маленькими магнитными полями. Вся цепочка вытянута вдоль линии магнитного поля – от северного полюса большого магнита к южному, как стремится вытянуться каждая опилка-магнит.

Итак, большой магнит только намагничивает опилки, а их смещение по листу бумаги вызвано их магнитным взаимодействием с соседними магнитиками-опилками.

2. Провода с током создают вокруг себя магнитное поле. Это магнитное поле отклоняет стрелку компаса в направлении, перпендикулярном направлению проводов ЛЭП.

3. Одинаковые полюса магнитов отталкиваются, разные – притягиваются. Поэтому северный конец магнита-стрелки компаса притягивается к южному полюсу магнита-Земли. Он находится примерно в 5 градусах от географического Северного полюса, и его называют Северным магнитным полюсом. Но это лишь название, на самом деле этот полюс магнита-Земли – южный! А северный находится в Антарктиде.

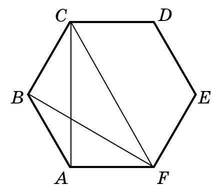
4. Ключевое слово в формулировке закона электромагнитной индукции – ***изменение*** магнитного поля. Ток через провод (и через амперметр) шёл только при включении и выключении электромагнита; в остальное время магнитное поле было большим, но не менялось, и тока не было. По легенде, пока Фарадей работал один, он, включив электромагнит, бежал в другую комнату, чтобы посмотреть на амперметр – за это время возникший при включении кратковременный ток прекращался. Когда появился помощник, он мог включать магнит, а Фарадей – смотреть в это время на стрелку амперметра и заметить, как она на секунду качнулась.

Нам не удалось найти подтверждение этой легенды. Но поиски Фарадея действительно увенчались успехом после того, как он догадался, что всё дело в изменении магнитного поля.

ТРЕУГОЛЬНАЯ ФОРМУЛА ПИКА

В разбиении плоскости на прямоугольные треугольники уберём все горизонтальные и вертикальные прямые. Получится квадратная сетка, образованная пересекающимися наклонными прямыми, в ней каждый квадрат «склеен» из двух прямоугольных треугольников (и «пропавших» узлов нет!). Площадь такого квадрата равна $2s_0$, и потому формула Пика выглядит точь-в-точь как для сетки из правильных треугольников:

$$S(В,\,Г) = (В + 0{,}5Г - 1)\cdot 2s_0 = (2В + Г - 2)\cdot s_0$$



А для шестиугольной сетки аналога формулы Пика нет! Чтобы в этом убедиться, рассмотрим одну шестиугольную ячейку $ABCDEF$ сетки (рисунок справа). Сравним треугольники ABF и ACF. У них основание AF – общее, но третьи вершины (B и C) находятся на *разных* расстояниях от прямой AF. Тогда площади их заведомо *различны*. С другой стороны, количества точек, попавших на границу и внутрь каждого треугольника, одинаковы: $Г = 3$, $В = 0$. Поэтому аналог формулы Пика (если бы он существовал) дал бы одинаковые значения их площадей. Противоречие!

ЖАРКО И ЕЩЁ ЖАРЧЕ

Закрытая одежда предохраняет кожу от солнечного излучения и от обезвоживания. Она изолирует тело от потока горячего воздуха – так же, как мы зимой защищаемся одеждой от холодного воздуха. Плотная ткань, даже чёрная, хоть и сильно нагревается снаружи, не передаёт этот жар внутренним слоям ткани и коже.

При этом одежда должна быть достаточно свободной, чтобы воздух внутри мог циркулировать и позволять поту испаряться. Именно при испарении пота кожа охлаждается.

Плотная одежда также нужна обитателям пустынь для защиты от колючих кустарников, насекомых и скорпионов. Кстати, ночью в пустынях бывает довольно холодно, и тёплая плотная одежда опять же не помешает.

В наших широтах жара не такая сильная (но и у нас можно обгореть летом на жарком солнце).

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Третий этап состоит из четырёх туров (с IX по XII) и идёт с мая по август.

Высылайте решения задач XII тура, с которыми справитесь, не позднее 5 сентября в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

XII ТУР

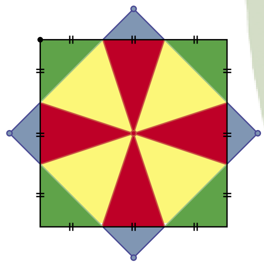
56. Каждый из 10 школьников должен был купить в поход по 2 кг крупы. Но крупа продавалась в пачках, весивших меньше килограмма, и часть школьников взяли по три пачки (с запасом), а часть – по две (с недостачей). В итоге всё равно получилось ровно 20 кг крупы. Сколько весила одна пачка, если её масса в граммах целая?

57. На шахматной доске 8×8 надо отметить несколько клеток так, чтобы не нашлось ни одного равнобедренного треугольника с вершинами в центрах отмеченных клеток. Легко отметить 8 клеток – например, все клетки любой вертикали: их центры лежат на одной прямой и не образуется вообще ни одного треугольника, в том числе и равнобедренного. А можно ли отметить больше 8 клеток? (Возможно, в решении вам пригодится теорема Пифагора.)

Авторы: Сергей Дориченко, Сергей Шашков (56), Игорь Акулич (57), Михаил Евдокимов (58), Татьяна Корчемкина (59), Борис Френкин (60)

58. За круглым столом сидят 40 человек, каждый из которых либо правдолюб (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжёт), либо хитрец (если он произносит два утверждения, то обязательно какое-то из них будет правдивым, а другое ложным). Каждый из сидящих заявил: «Рядом со мной сидит лжец» и «Рядом со мной сидит хитрец». Какое наименьшее число хитрецов может быть за столом?

59. Два квадрата с общим центром расположены так, что стороны одного в точках пересечения делят стороны другого на три равные части. Синяя площадь равна 1. Найдите зелёную, красную и жёлтую площади.



60. Имеется клетчатое кольцо шириной в 1 клетку. Квантик и Ноутик делают ходы по очереди, начинает Квантик. В свой ход Квантик ставит крестик в свободную клетку (где ещё нет никакого значка). Ноутик в свой ход ставит в свободную клетку нолик. Крестик и нолик не могут стоять в соседних клетках. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У кого из игроков есть гарантированный способ выиграть, если всего клеток в кольце а) 2020; б) 2021?

Художник Николай Крутиков

ХИТРЫЙ МОСТ

Если хочется идти прямо вдоль берега этой реки, рядом с водой, придётся с одного берега перейти по мосту на другой. Но зачем мост сделан так сложно? Какую проблему в старину решала эта конструкция?

Художник Мария Усеинова

ISSN 2227-7986 21008
9 772227 798213