№ 12 | декабрь 2020
Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования
e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№12
декабрь 2020

ЁЛОЧКИ 2021

ВОЛШЕБНЫЙ СВЕТ

СФЕРИКОНЫ И ГЕКСАКОН

Enter

www.kvantik.com

kvantik@mccme.ru

instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12

vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 12, декабрь 2020 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Е. А. Котко, Р. В. Крутовский, И. А. Маховая, Г. А. Мерзон, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Yustas

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях Почты России:
• Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индекс **84252**)
• Объединённый каталог «Пресса России» (индексы **11346** и **11348**)
Онлайн-подписка
на сайте агентства «Роспечать» **press.rosp.ru**
на сайте агентства АРЗИ **www.akc.ru/itm/kvantik**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 09.11.2020
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8. Тел.: (831)216-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

СОДЕРЖАНИЕ

ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ

Андрей Андреев,
Полина Ачева,
Алексей Панов

В школьной геометрии *угол* – это фигура, состоящая из двух лучей, выходящих из одной точки (рис. 1). Эта точка называется *вершиной* угла, а лучи – его *сторонами*. Угол разбивает плоскость на две части: на рисунке 2 они окрашены в зелёный и жёлтый цвет. Эти части называются *плоскими углами*.

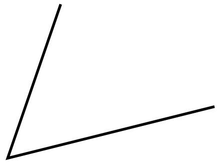


Рис.1. Угол

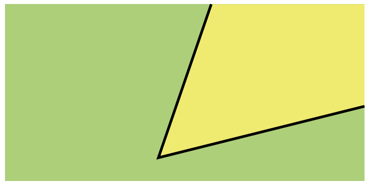


Рис. 2. Два плоских угла – зелёный и жёлтый

Измерить угол можно обычным транспортиром, который размечен в градусах от 0° до 180° (рис. 3, слева). Плоские углы удобно измерять круговым транспортиром, размеченным от 0° до 360° (рис. 3, справа).

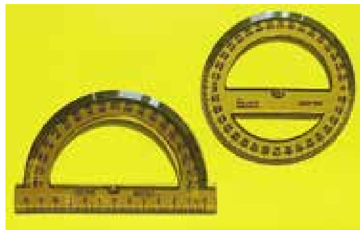


Рис. 3. Транспортиры – полукруговой и круговой

Конечно, для научных и технических измерений углов нужны более точные приборы: например, такие, как на рисунке 4. Слева там изображён один из астрономических инструментов Тихо Браге, с которым он проводил свои высокоточные наблюдения. Результаты этих наблюдений позволили Кеплеру вывести законы движения планет. Справа – современный электронный теодолит, используемый в геодезии.

Рис. 4. Секстант Тихо Браге и современный теодолит

А можно ли измерять углы, не применяя вообще никаких инструментов?

«Ручное измерение» углов. Об этом методе мы прочли в книге «Музыка сфер. Математика и астрономия», написанной Розой Марией Рос. Цитируем:

...Существует очень простой, хотя и не слишком точный, способ измерения углов вручную. Если мы вытянем руку перед собой, то растопыренная ладонь будет указывать интервал в 20°, кулак – 10°, большой палец – 2°, мизинец – 1°. Этот способ могут использовать и взрослые, и дети, так как размеры ладони человека увеличиваются пропорционально длине его руки.

Рис. 5. Ручное измерение углов

Поясним сказанное. Пусть мы наблюдаем за двумя звёздами, расположенными на небе недалеко друг от друга. Направление взгляда на каждую из них задаёт луч. Угол между этими двумя лучами (с вершиной в глазу наблюдателя) мы и хотим измерить. Его величина называется *угловым расстоянием* между звёздами. Вытянем правую руку с растопыренной ладонью, как на рисунке 5 справа. Если кончик большого пальца закрывает одну звезду, а кончик мизинца – другую, угловое расстояние между звёздами можно оценить в 20°. Прикладывая ладони друг к другу, можно измерять углы до 40° (рис. 5, справа внизу).

Задача 1. Звёздной ночью найдите на небе ковш Большой Медведицы (рис. 6) и «вручную» оцените угловое расстояние между звёздами Мерак и Дубхе.

Напомним: в направлении Мерак → Дубхе расположена Полярная звезда, указывающая путь на север.

Рис. 6. Ковш Большой Медведицы.

Задача 2. Отыщите на небе Полярную звезду и найдите угловое расстояние между ней и звездой Дубхе.

Решив задачи, вы сможете проверить себя, так как известно, что расстояние Дубхе – Полярная звезда примерно в 5 раз больше расстояния Мерак – Дубхе.

Конечно, ручное измерение углов не позволяет добиться хорошей точности. Сейчас мы опишем бесприборный метод измерения углов, позволяющий проводить измерения со сколь угодно высокой точностью. Начнём с нескольких экспериментов.

Эксперименты с треугольниками: «60°» $\neq$ 60°. Мы купили несколько одинаковых треугольников, как на рисунке 7. Углы этого треугольника по стандарту должны быть равны 30°, 60° и 90°, но мы хотим проверить, так ли это на самом деле. Начнём со среднего по величине из этих углов, обозначив его α. Итак, верно ли, что $\alpha = 60°$?

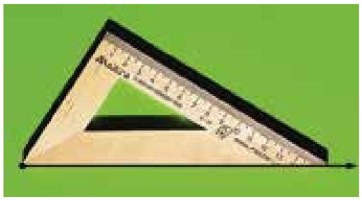


Рис. 7. Треугольник

Эксперимент № 1: поворачиваем треугольники. Выложим на плоскость один за другим шесть треугольников, как на рисунке 8: каждый получен из соседнего поворотом на угол α.

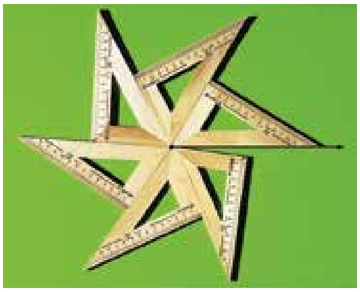


Рис. 8. Каждый треугольник получается из соседнего поворотом на угол α, kvan.tk/ugolnik-1

Видно, что первый и последний треугольники не сомкнулись, и это означает, что в сумме шесть одинаковых углов α дают меньше 360°, то есть $6\alpha < 360°$ и, значит, $\alpha < 60°$. Выходит, мы купили дефектные треугольники.

На рисунке 8 также видно, что в промежуток между первым и последним треугольником ещё один такой же треугольник никак не поместится. Это говорит о том, что в сумме семь одинаковых углов α больше 360°, то есть $7\alpha > 360°$, откуда $\alpha > 360°/7$. Объединим полученные два неравенства и запишем их в виде

$$\frac{360°}{7} < \alpha < \frac{360°}{6}.$$

Эксперимент № 2: переворачиваем треугольники. На рисунке 9 представлен другой способ выкладывания треугольников. Каждый треугольник получается из соседнего переворотом вокруг их общей стороны на 180°. Этот способ даёт такую же оценку измеряемого угла, но он будет удобнее для нас в дальнейшем.

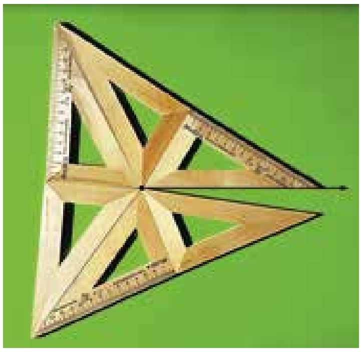


Рис. 9. Каждый треугольник получается из соседнего переворотом на 180° вокруг их общей стороны, kvan.tk/ugolnik-2

Практический совет: чтобы треугольники не смещались при малейшем прикосновении, не укладывайте их на скользкую поверхность. На видео мы воспользовались оборотной стороной коврика для ванной: она сделана из материала, не скользящего даже по влажному гладкому полу ванной комнаты, и идеально подходит для наших экспериментов.

Уменьшаем число треугольников, увеличиваем точность измерения. Первое усовершенствование: будем использовать единственный экземпляр треугольника. Опять обозначим один из его углов через α. Нарисуем на плоскости луч и совместим вершину угла с вершиной луча, а одну из сторон угла направим вдоль луча, как на рисунке 7. Перевернём треугольник вокруг другой стороны угла (не лежащей на луче). Потом перевернём треугольник вокруг другой стороны угла, опять перевернём и т. д., пока максимально не приблизимся к нарисованному лучу. Так мы определим максимальное k, для которого $k\alpha < 360^\circ$ и при этом $(k+1)\alpha > 360^\circ$, то есть

$$\frac{360^\circ}{k+1} < \alpha < \frac{360^\circ}{k}.$$

На видео kvan.tk/ugolnik-3 показан новый процесс измерения для уже знакомого треугольника с углом, близким к 60°, где k получилось равным 6.

Следующая цель – максимально увеличить точность оценки угла. Понятно, что, делая наши перевороты треугольника, совсем не обязательно останавливаться перед начальным лучом. Можно сделать ещё один или даже несколько полных оборотов вокруг

начальной точки луча! Пусть n – общее число сделанных оборотов, k – экспериментально полученное нами число, такое, что $k\alpha < n \cdot 360°$ и одновременно $(k+1)\alpha > n \cdot 360°$. Тогда выполняется двойное неравенство:

$$\frac{n \cdot 360°}{k+1} < \alpha < \frac{n \cdot 360°}{k}.$$

С увеличением n дроби, стоящие слева и справа, сближаются, и угол α определяется всё точнее – и безо всяких приборов!

Как выглядит это измерение для $n = 3$ и нашего треугольника, вы можете посмотреть на видео kvan.tk/ugolnik-4, там k оказалось равным 18. Мы провели измерения для $n = 1, 2, \ldots, 8$ и для каждого n нашли соответствующее k. Результаты см. в таблице.

n	k	$\frac{n \cdot 360°}{k+1}$	$\frac{n \cdot 360°}{k}$
1	6	51,4°	60°
2	12	55,3°	60°
3	18	56,8°	60°
4	24	57,6°	60°
5	30	58,0°	60°
6	36	58,3°	60°
7	42	58,6°	60°
8	49	57,6°	58,8°

Судя по последней строке, $57{,}6° < \alpha < 58{,}8°$. Но можно поступить чуть хитрее и заменить значение 57,6° стоящим над ним в седьмой строке 58,6°, получив гораздо более точную оценку $58{,}6° < \alpha < 58{,}8°$.

Об измерении плоских углов. Всё сказанное об измерении угла треугольника применимо и к измерению плоского угла, который можно представлять себе вырезанным из очень тонкого и жёсткого листа пластика (рис. 10). В связи с этим задача.

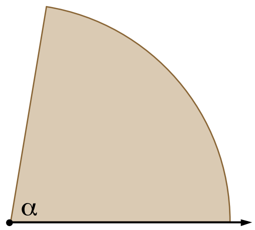


Рис. 10. Плоский угол α

Задача 3. На рисунке 10 представлен угол α. Увеличьте рисунок и по этому шаблону из тонкого жёсткого листа пластика вырежьте соответствующий плоский угол. Используя разобранный нами метод измерения, с помощью переворотов оцените величину этого угла. Тут вас ждёт небольшой сюрприз. Угол на рисунке подобран специальным образом. Существует такое небольшое число n, что величина α укладывается в $n \cdot 360°$ целое число раз. Так что с помощью нашего метода вы сможете определить это n и найти точное значение угла α.

Задача 4 (Г. Фельдман, Д. Баранов, XXXI Турнир городов). Нарисован угол, и ещё имеется только циркуль.

а) Какое наименьшее число окружностей надо провести, чтобы наверняка определить, является ли данный угол острым?

б) Как определить, равен ли данный угол 31° (разрешается проводить сколько угодно окружностей)?

В пункте *б* можно обойтись и без циркуля, если есть деревянный угольник с данным углом, о котором мы хотим выяснить, равен ли он 31°.

И напоследок – небольшой список увлекательных книг, в которых обсуждается измерение углов в астрономии и геометрии, с небольшими аннотациями.

1. Роза Мария Рос. *Музыка сфер. Астрономия и математика* (М.: Де Агостини, 2014). В этой замечательной книге рассказывается о планетах и звёздах, об измерении углов, космических расстояний и времени.

2. Александр Шень. *Космография* (М.: МЦНМО, 2019). В книге разбираются основные вопросы космографии: как движутся звёзды по небу, отчего бывают зима и лето, почему Луна видна в форме серпа, когда и как происходят затмения. Прочитав её, вы поймёте, что астрономия не может обойтись без измерения углов.

3. Яков Перельман. *Занимательная геометрия на вольном воздухе и дома*, 7-е изд. (М.-Л.: ГИТТЛ, 1950). Обязательно обратите внимание на эту книгу. В третьей главе разобрано много задач на измерение углов подручными средствами и подробно рассказано о простейших устройствах для измерения углов, в том числе о *посохе Якова* и о *грабельном угломере*.

Особо рекомендуем раздел «Определение величины данного угла без всяких измерений» (с. 138–140), где описан метод измерения углов, «предложенный в 1946 г. З. Рупейка из Каунаса». По-видимому, этот раздел был добавлен редактором седьмого издания книги Б.А. Кордемским. Сам Яков Перельман скончался в 1942 году в блокадном Ленинграде.

4. Александр Шень. *Геометрия в задачах* (М.: МЦНМО, 2017). Второй раздел этой книги как раз называется «Измерение углов». Там много интересных задач, над которыми стоит подумать. Среди них мы выделим задачу № 38.

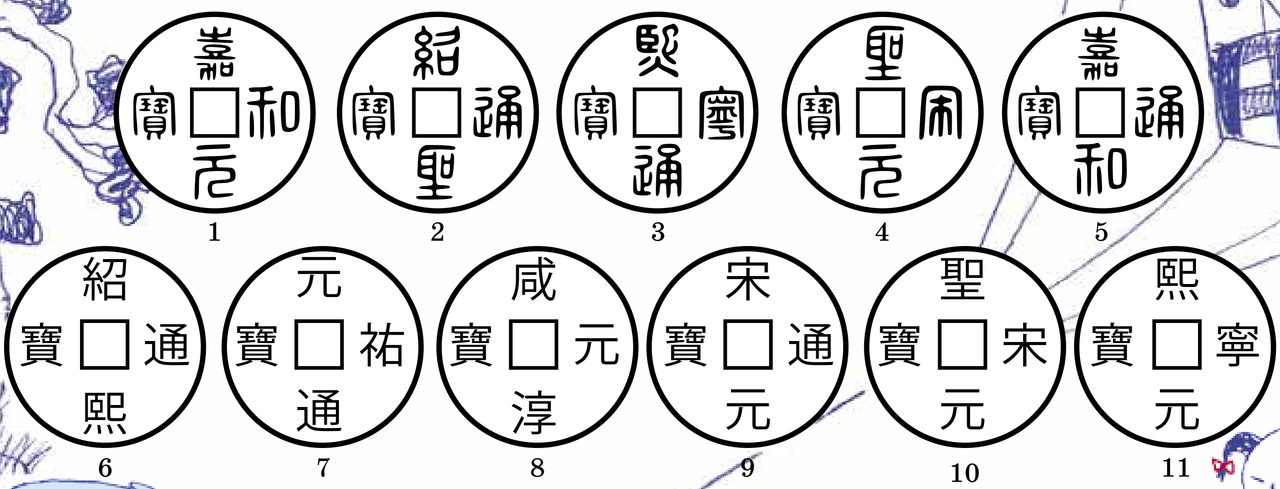
Художник Мария Усеинова

Михаил Гельфанд
Художник Артём Костюкевич

КИТАЙСКИЕ МОНЕТЫ

Нумизмат подготовил этикетки для китайских монет. Он сделал приблизительные прорисовки монет, с учётом двух разных способов написания иероглифов: обычным шрифтом (нижний ряд) и «шрифтом печатей» (верхний ряд), но без мелких различий и в стандартном размере. Он также записал, как читаются надписи на монетах, но перепутал их порядок. Восстановите правильные соответствия.

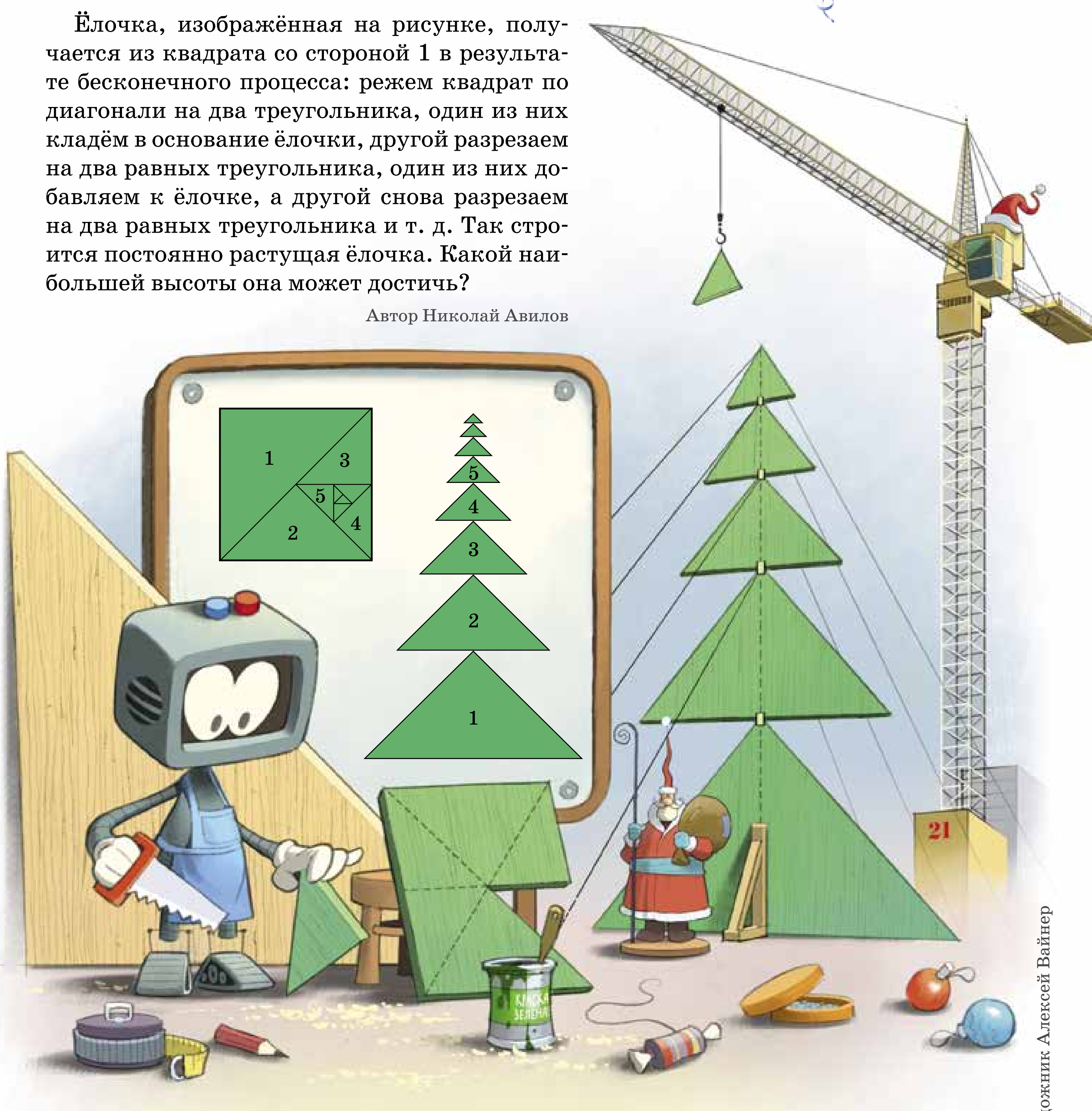
A) *Шао-си тун-бао.*
B) *Сун-юань тун-бао.*
C) *Шэн-сун юань-бао.*
D) *Шао-шэн тун-бао.*
E) *Си-нин юань-бао.*
F) *Чжи-хэ тун-бао.*
G) *Сянь-чунь юань-бао.*
H) *Шэн-сун юань-бао.*
I) *Юань-ю тун-бао.*
J) *Чжи-хэ юань-бао.*
K) *Си-нин тун-бао.*



«РАСТУЩАЯ» ЁЛОЧКА

Ёлочка, изображённая на рисунке, получается из квадрата со стороной 1 в результате бесконечного процесса: режем квадрат по диагонали на два треугольника, один из них кладём в основание ёлочки, другой разрезаем на два равных треугольника, один из них добавляем к ёлочке, а другой снова разрезаем на два равных треугольника и т. д. Так строится постоянно растущая ёлочка. Какой наибольшей высоты она может достичь?

Автор Николай Авилов



Художник Алексей Вайнер

Вера Винниченко

ВОЛШЕБНЫЙ СВЕТ

На глубине трёх тысяч метров, в кромешной тьме, куда солнечные лучи никогда не проникают, живут замечательные рыбы – глубоководные удильщики. Огромная голова и острые зубы удильщиков могут напугать кого угодно. На голове у самок есть отросток с приманкой, который светится в темноте благодаря особым бактериям. Так удильщики охотятся с помощью света.

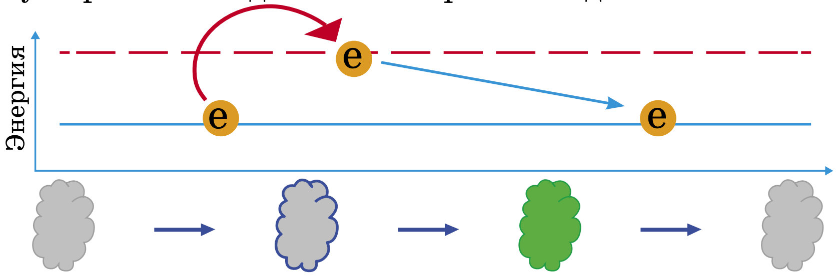
Фото: J. Marshall, 2005

Фото: William E. Browne, Science

Эта способность живых существ излучать свет называется *биолюминесценцией* (bios переводится как «жизнь», а lumen – как «свет»). На сегодняшний день известно более восьмисот видов растений и животных, способных к биолюминесценции: кальмары, гребневики, медузы, водоросли. Животные используют биолюминесценцию для охоты, общения между собой, предупреждения об опасности, для маскировки. Креветки Heterocarpus ensifer сами по себе не светятся, но при опасности выбрасывают светящееся облачко, чтобы обмануть хищника и успеть убежать.

Фото: Sönke Johnsen и Katie Thomas, CC BY SA 2.0

Свечение происходит благодаря особым *белка́м*. Все белки состоят из кирпичиков, которые называются *аминокислотами*. Аминокислоты, в свою очередь, состоят из *атомов*, ещё более маленьких кирпичиков. А атом состоит из *ядра* и *электронов*, которые летают вокруг ядра. Так вот, когда светящийся белок активируется, некоторые электроны забрасываются на более далёкую орбиту. Но электронам там «неудобно»[1]. И они возвращаются обратно, на свою орбиту. При этом выделяется энергия в виде света.



1) Белок в невозбуждённом состоянии

2) Белок в возбуждённом состоянии, электрон на высокоэнергетической орбитали

3) Электрон возвращается на место, при этом выделяется свет, белок светится

4) Электрон на месте, белок в невозбуждённом состоянии

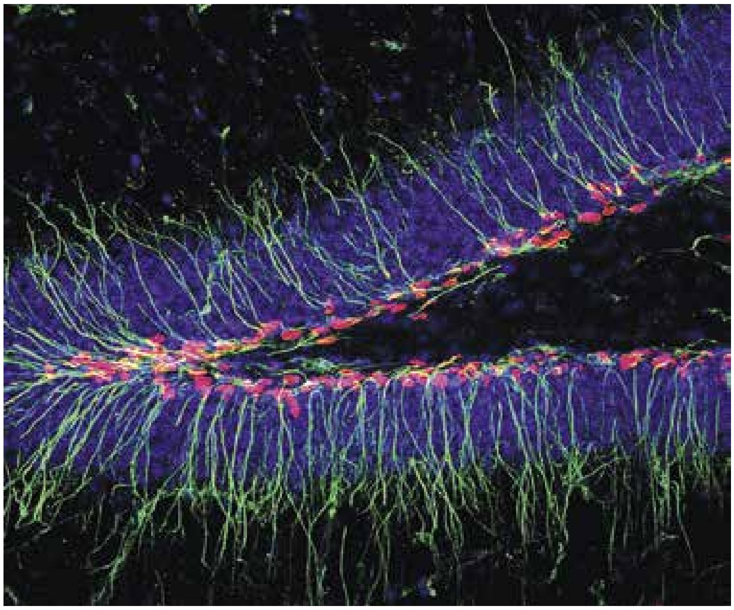
Некоторые идеи великих открытий учёным подсказала сама природа. Так получилось и с биолюминесценцией. В 2008 году учёные О. Симомура, Р. Тсьен и М. Чалфи получили Нобелевскую премию за открытие и использование зелёного светящегося белка. Симомуре удалось выделить светящееся вещество из медуз Aequorea victoria.

Медуза Aequorea victoria. Фото: Sierra Blakely

Благодаря этому белку учёным удалось увидеть некоторые невидимые процессы: например, как растут клетки мозга – *нейроны*. Учёные научились создавать синие, красные, жёлтые светящиеся белки, чтобы заставить светиться разные клетки или даже различные части одной клетки разными цветами. На с. 12 на микрофотографии мозга (вернее, его участка под названием *гиппокамп*) зелёной меткой окрашены молодые нервные клетки, синим – ядра взрослых нервных клеток, а красным – отростки взрослых нервных клеток.

[1] Подробности см. в статье: В. Сирота. «Дом для электронов» («Квантик» № 12 за 2018 год).

Художник Мария Усеинова



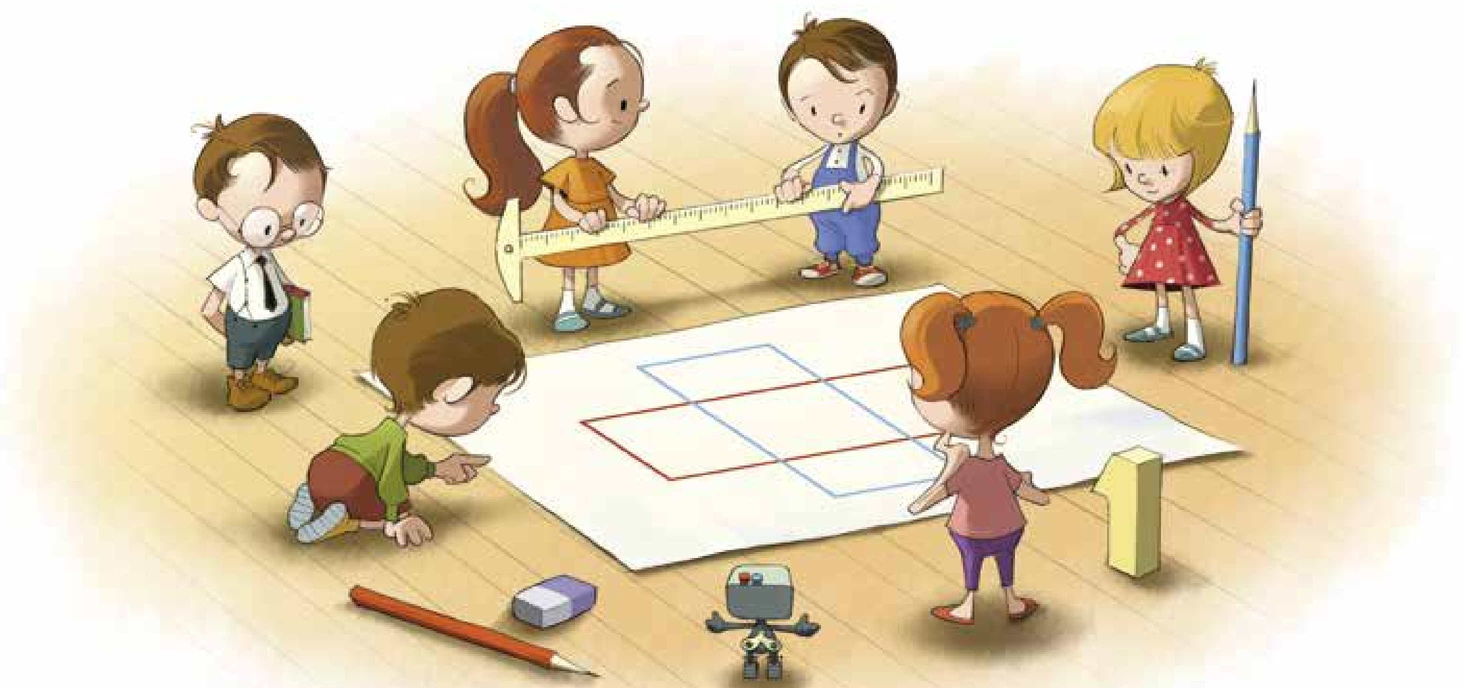
Гиппокамп мыши.
Фото: Journal of Comparative Neurology, V. 519, № 1, фрагмент обложки; фото сделано в лаборатории Григория Ениколопова

Но учёные на этом не успокоились. Им захотелось проверить: а можно ли управлять поведением животных с помощью света? В 2005 году группа исследователей (К. Дейссерот, Э. Бойден, Ф. Чжан, Э. Бамберг, Г. Нагель) смогли активировать отдельные нервные клетки с помощью света. Для этого им пришлось доставить в нейроны мышей *ген* водоросли. Этот ген – инструкция по сборке белка. В результате нервные клетки стали делать «чужой» светочувствительный белок – *опсин* – и встраивать его в свою оболочку. Опсин может находиться в двух состояниях: активном и неактивном. Неактивный опсин просто сидит в оболочке клетки. Активный опсин открывает в оболочке нейрона поры и по нейрону бежит электрический ток. Свет активирует опсин и возбуждает нервную клетку. Так с помощью оптоволоконного кабеля можно активировать или тормозить отдельные клетки мозга, и учёным уже удалось заставить подопытную мышь пошевелить усами, повернуть налево или направо, почесаться, встать на задние лапы. Вероятно, водоросли доктора Дейссерота и их опсин скоро принесут исследователям Нобелевскую премию.

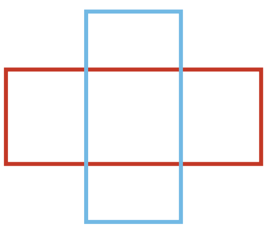
Фото: Karl Deisseroth

СТРАНИЧКИ ДЛЯ МАЛЕНЬКИХ

Валерия Сирота



На листе бумаги нарисовали два прямоугольника, и их стало... одиннадцать.



Увидели? Два больших, которые мы нарисовали красным и синим, четыре поменьше и пять маленьких. Обведите их разными цветами.

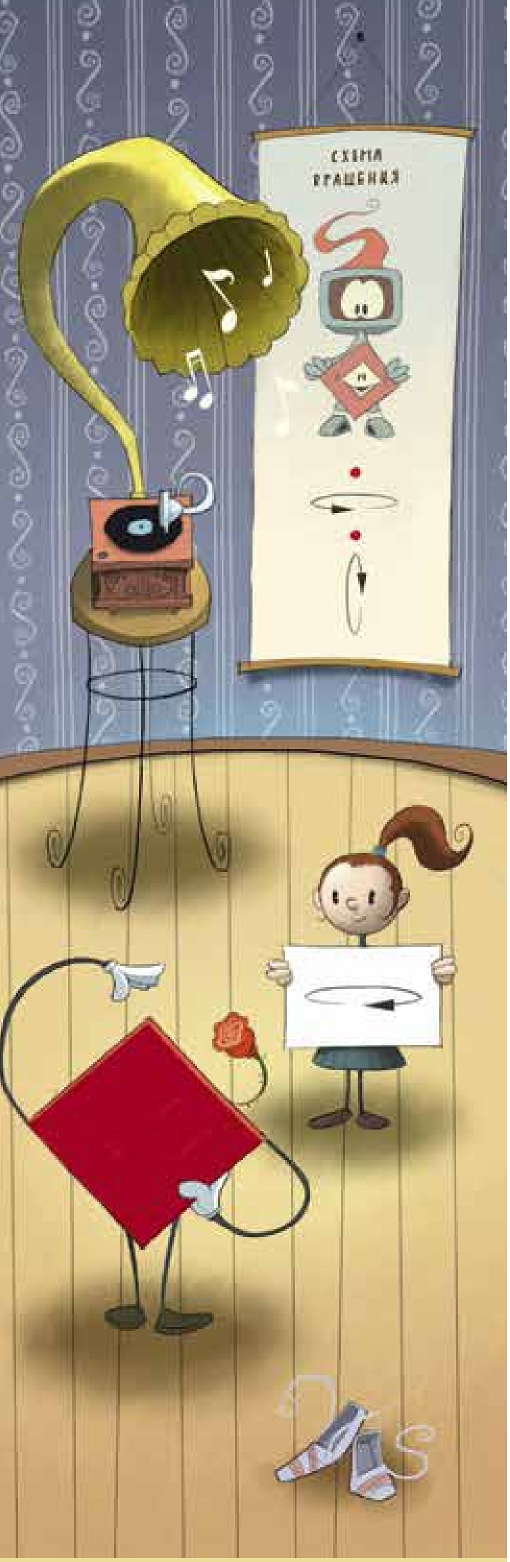
Задача 1. А как, нарисовав только два одинаковых прямоугольника, получить ровно 3 (не обязательно одинаковых) прямоугольника? Попробуйте получить также любое число прямоугольников от 4 до 8. Осторожно: одно число не получится! Какое?

Задача 2. Рисуя каждый раз два *одинаковых* равносторонних треугольника, получите любое число треугольников (не обязательно равносторонних) от 2 до 8.

Задача 3. А если рисовать два равносторонних, но не обязательно одинаковых треугольника, можно получить от 2 до 8 *равносторонних* треугольников. Попробуйте!

Художник Алексей Вайнер

Максим Прасолов



СФЕРИКОНЫ и ГЕКСАКОН

Сфериконы – математические игрушки, забавно катающиеся по плоскости. Начнём с описания простейшего сферикона.

Возьмите в руки квадрат за две противоположные вершины и повращайте его вокруг диагонали, которая их соединяет. Какую фигуру «заметёт» квадрат? Это будут два конуса, склеенных по основанию. Если сделать такую фигуру, разрезать её по квадрату и вновь склеить половинки, но с поворотом на 90°, получится *тетракон* (рис. 1).

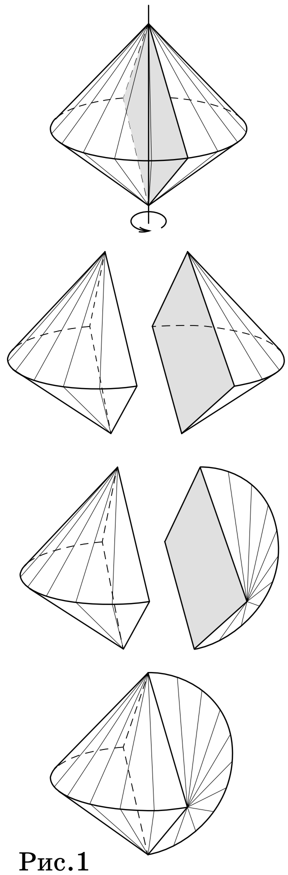


Рис.1

Поверхность тетракона состоит из отрезков. Точнее, из 4 вершин квадрата, двух полуокружностей и бесконечного числа одинаковых интервалов (интервал – это отрезок без его концов). Попробуйте пройтись по поверхности тетракона так, чтобы вернуться в исходную точку и пересечь все интервалы по разу!

Поверхность конуса можно полностью обклеить в один слой сектором, вырезанным из плоскости. Поэтому тетракон можно обклеить четырьмя секторами, которые соединены в зигзагообразную дорожку – см. развёртку на с. 15. Сделайте из неё тетракон своими руками!

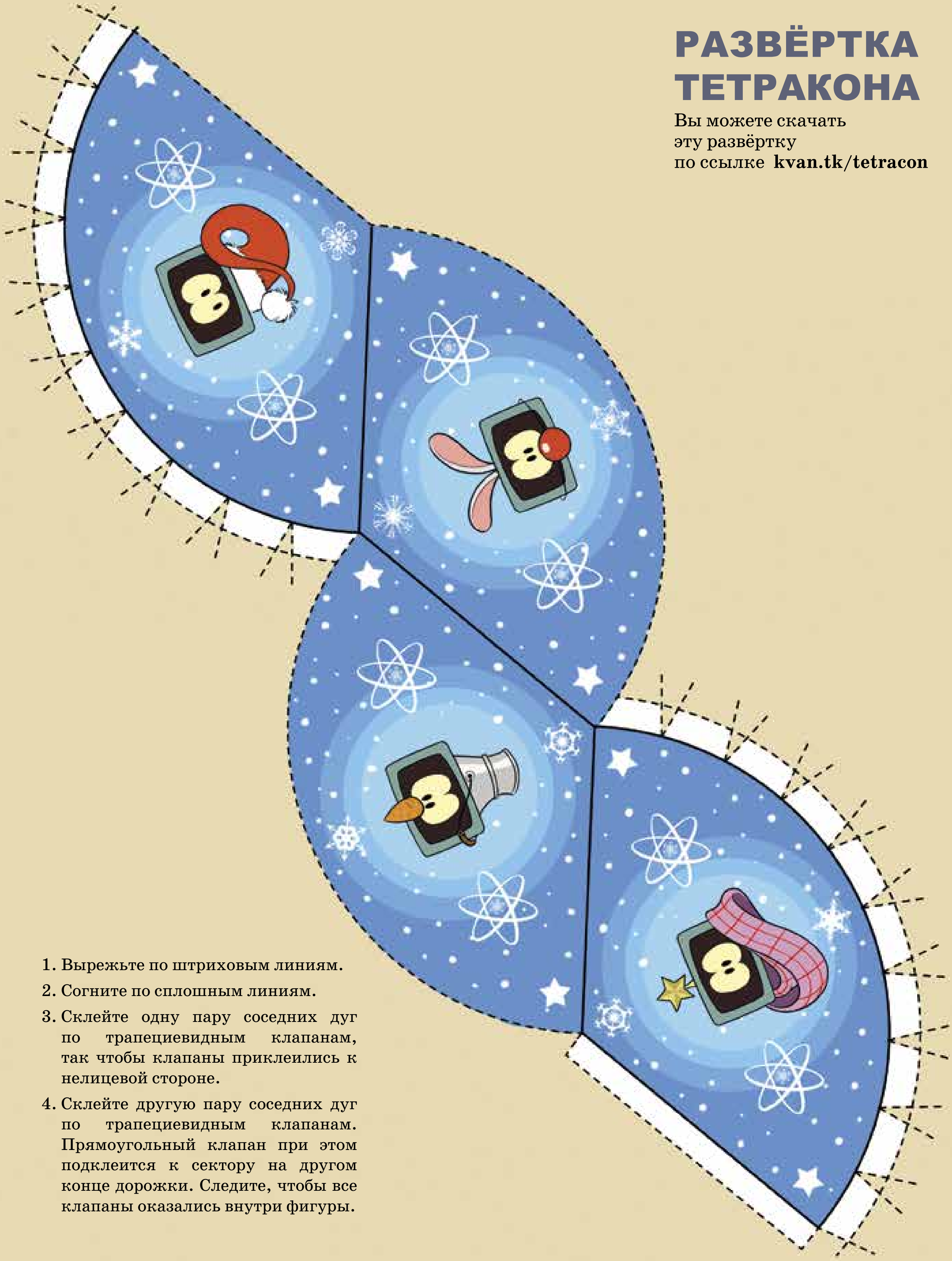
Задача 1. Найдите углы секторов на развёртке.

Тетракон прекрасно катится по плоскости, как бы по дорожке из секторов, которую можно продолжать, повторяя секторы. И хотя его качает то влево, то вправо, центр тетракона всё время остаётся на одной высоте, что и обеспечивает плавность движения.

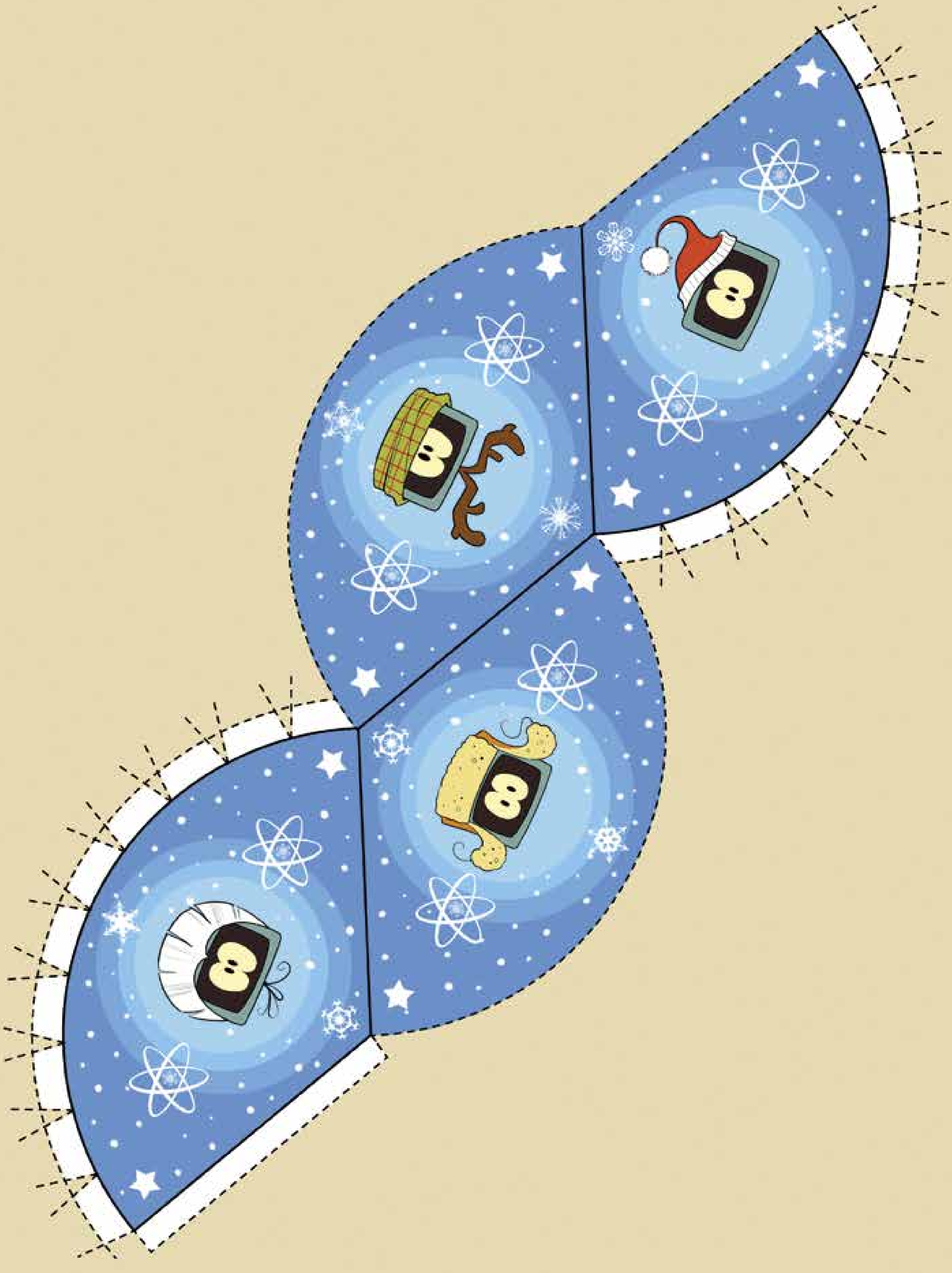
Чтобы увидеть, что высота центра не меняется, заметим, что, когда мы вращали квадрат, круг, вписанный в него, «заметал» шар, который касался всех отрезков двойного конуса. После разрезания двойного конуса на две части и поворота одной из частей всё

РАЗВЁРТКА ТЕТРАКОНА

Вы можете скачать эту развёртку по ссылке **kvan.tk/tetracon**



1. Вырежьте по штриховым линиям.
2. Согните по сплошным линиям.
3. Склейте одну пару соседних дуг по трапециевидным клапанам, так чтобы клапаны приклеились к нелицевой стороне.
4. Склейте другую пару соседних дуг по трапециевидным клапанам. Прямоугольный клапан при этом подклеится к сектору на другом конце дорожки. Следите, чтобы все клапаны оказались внутри фигуры.



равно шар остался шаром с тем же свойством касания отрезков. Поэтому, когда тетракон катится по плоскости, шар внутри него тоже катится по этой плоскости. Значит, центр не меняет высоту.

Задача 2. По какой траектории движется центр?

Задача 3. Разрежьте правильный тетраэдр на две равные части одним плоским разрезом, не проходящим через вершины тетраэдра (правильный тетраэдр – это треугольная пирамидка, все четыре грани которой – одинаковые равносторонние треугольники).

Обобщим конструкцию тетракона, сохранив его забавные свойства. Квадрат заменим на любой правильный многоугольник, диагональ – на любую ось симметрии многоугольника. Склеивать две половинки после разрезания можно с подкруткой на разные углы.

Если же в многоугольнике чётное число сторон, можно половинки взять у двух разных фигур – возникающих при вращении многоугольника вокруг диагонали (первая) и вокруг прямой, соединяющей середины противоположных сторон (вторая), – и склеить (по многоугольнику).

Всевозможные фигуры, которые так получаются, называют *сфериконами*. Как устроена поверхность сферикона? Когда мы вращаем многоугольник, из его сторон с общей вершиной, лежащей на оси вращения, получаются конусы. Цилиндры возникают из сторон, параллельных оси вращения. Почти из всех остальных сторон получаются усечённые конусы, а ещё могут получиться плоские круги.

Задача 4. В каком случае при вращении стороны получается круг?

Задача 5. Нарисуйте след от катящегося сферикона, полученного из правильного шестиугольника вращением вокруг диагонали и подкруткой половинок на 60° (рис. 2).

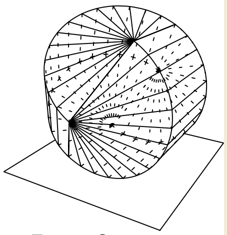


Рис. 2

Задача 6. Покажите, что сферикон, полученный из пятиугольника, нельзя катить в одну сторону сколь угодно долго.

Задача 7. Сферикон получен вращением чётноугольника вокруг диагонали и склеиванием половинок с подкруткой на такой угол, что подкрутка перево-

дит сторону многоугольника в соседнюю. Покажите, что при катании сферикона по плоскости любая точка его поверхности рано или поздно коснётся плоскости.

Задача 8. Сферикон получен вращением 12-угольника вокруг диагонали и склеиванием половинок с подкруткой на 90°. Его покатали по окрашенной плоской поверхности, поставили другим боком на неё, снова покатали и так несколько раз. Оказалось, что вся поверхность сферикона окрасилась. Какое минимальное количество раз его переставляли на другой бок?

Тетракон запатентовал в 1980 году Дэвид Хирш. А в 2017 году он опубликовал видео, в котором катится другая придуманная им фигура – *гексакон*: kvan.tk/hexacon. Гексакон обладает теми же хорошими свойствами, что и тетракон: его поверхность состоит из отрезков, при катании любая его точка рано или поздно касается плоскости, центр всегда на одном и том же расстоянии от плоскости. А ещё, в отличие от тетракона, он центрально-симметричен. Поэтому при катании высота гексакона всё время одна и та же, а центр находится на половине этой высоты.

Гексакон состоит из 6 одинаковых частей. Части получаются из половинки конуса, у которого в сечении – равнобедренный треугольник с углом 120°. Через середину основания треугольника нужно провести две плоскости, перпендикулярные плоскости треугольника, под углом 30° к основанию, разрезать по ним полуконус и оставить ту часть, в которую попала вершина конуса. У этой части есть грань в виде ромба и два криволинейных ребра (рис. 3). Склеим три экземпляра этой части по циклу, стыкуя по криволинейным рёбрам. Из ромбов составится правильный шестиугольник (рис. 4). Ещё три экземпляра приклеим так, чтобы получилась центрально-симметричная фигура (рис. 5).

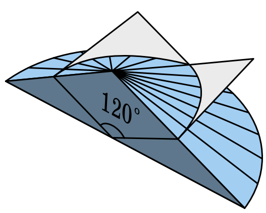


Рис. 3

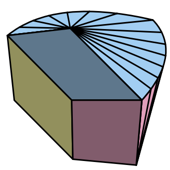


Рис. 4

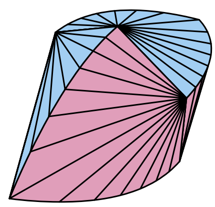


Рис. 5

Можно удалить из тетракона или гексакона почти всё, кроме границ оснований конусов (у тетракона это две полуокружности, у гексакона – криволинейные рёбра) и ещё чего-то, скрепляющего границы в конструкцию, которая не разваливается. Полученный «каркас» будет так же кататься по плоскости (если только центр масс не поменялся). На фото танцовщица Франциска Хаузер использует снаряд, составленный из изогнутых рёбер октаэдра: четыре ребра выгнуты так, чтобы получились две полуокружности тетракона, а остальные прогибаются внутрь.

Фото взято с персональной страницы артистки:
zirkus-meer.at/artisten/franziska-hauser

В другом видео с Дэвидом Хиршем можно узнать о *поликонах* – семействе фигур, которое включает в себя и тетракон, и гексакон: kvan.tk/polycons.

А вот какое обобщение сфериконов предлагает Александр Перепечко. Нарисуем на сфере одну или несколько замкнутых кривых. Прокатим плоскость по этой сфере, так чтобы точка касания перемещалась вдоль этих кривых. Часть пространства, которая будет по ту же сторону от плоскости во всех её положениях, что и сфера, в шутку назовём *крутиконом*.

Задача 9. Какой крутикон получится, если на сфере нарисован экватор? А если другая окружность?

Задача 10. Какую кривую нужно нарисовать, чтобы получился тетракон? А гексакон?

Художник Алексей Вайнер

СМОТРИ!

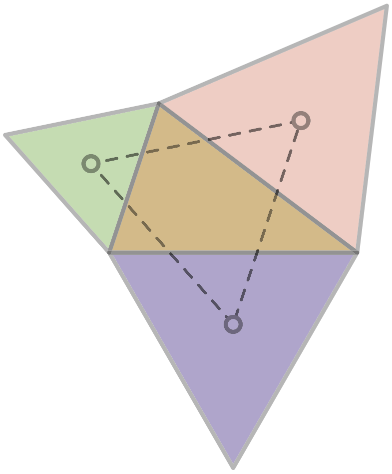
Григорий Мерзон

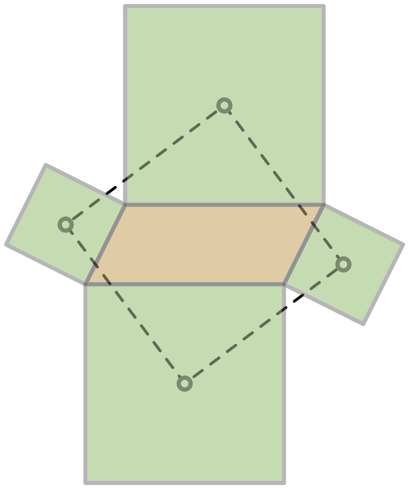
ТЕОРЕМА НАПОЛЕОНА, ЗАМОЩЕНИЯ ПЛОСКОСТИ И ПАРАЛЛЕЛЬНИКИ

1. В одном из первых номеров журнала «Квантик» рассказывалось[1] про две замечательные теоремы.

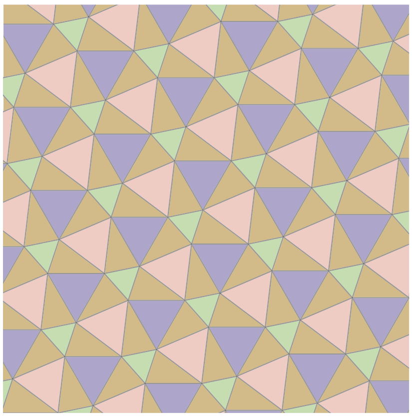
Теорема Наполеона. *Центры равносторонних треугольников, построенных вовне на сторонах произвольного треугольника, образуют равносторонний треугольник.*

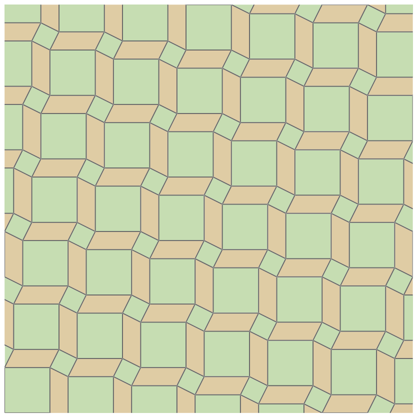
Теорема Тебо. *Центры квадратов, построенных вовне на сторонах произвольного параллелограмма, образуют квадрат.*





Оказывается, с этими теоремами связаны два замечательных замощения плоскости.



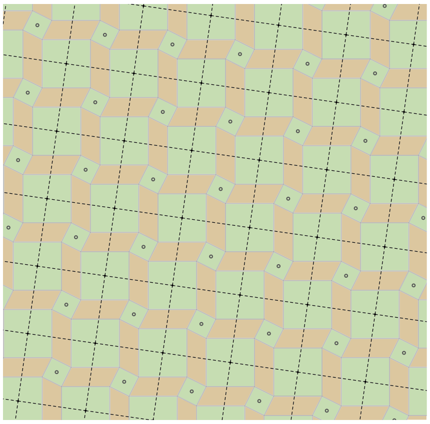


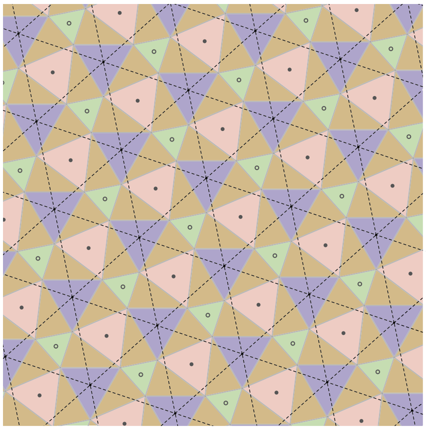
Если долго смотреть на эти замощения, то и теоремы станут очень понятными![2]

[1] А. Полянский, Г. Фельдман. Наполеон и геометрия («Квантик» № 5 за 2012 год).

[2] Про другие доказательства при помощи замощений см. ещё статью: Г. Мерзон. Как разрезать верблюда? («Квантик» № 5 за 2020 год).

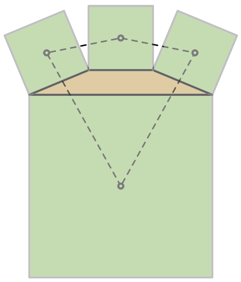
Посмотрим, например, на правую картинку внизу с. 20. Центры больших квадратов образуют квадратную сетку – то есть можно считать, что картинка нарисована на клетчатой бумаге и центры больших квадратов лежат в её узлах. А центры маленьких квадратов тогда лежат в центрах клеточек. Поэтому теорема Тебо верна.





Впрочем, если такое рассуждение вы расскажете своему учителю геометрии, то у него наверняка возникнут вопросы, о которых действительно полезно подумать. Ну а пока продолжим смотреть на картинки.

Точно так же на левой картинке внизу с. 20 можно увидеть теорему Наполеона.[3] Только треугольники теперь лежат в вершинах не квадратной, а треугольной сетки.

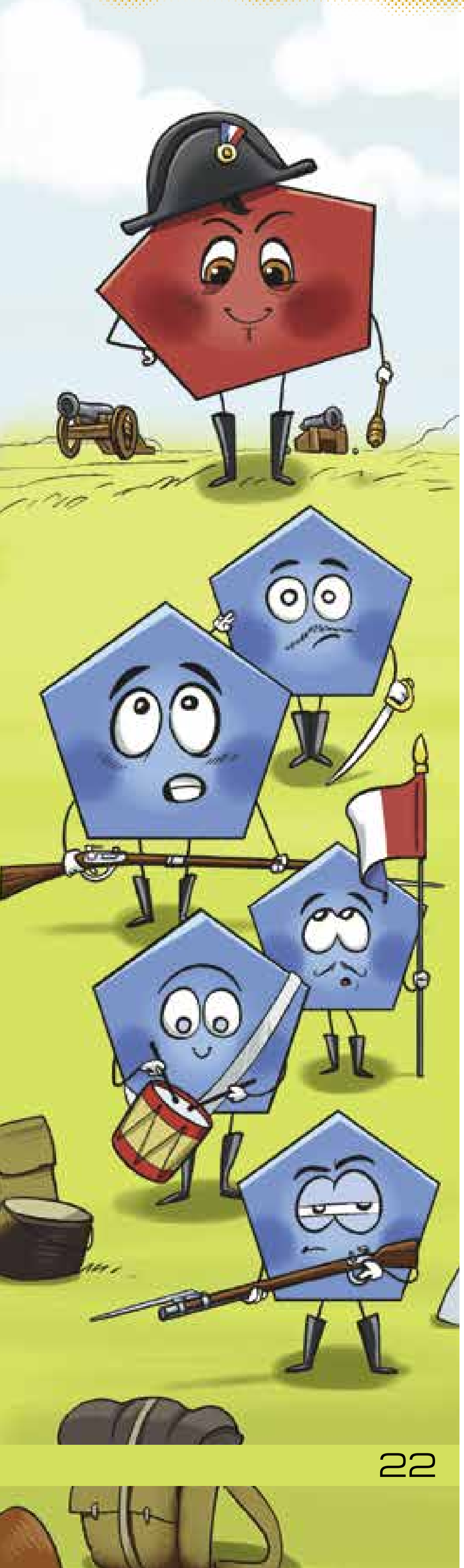


2. Не правда ли, формулировки двух теорем довольно похожи и вызывают надежду, что это начало целой серии теорем?

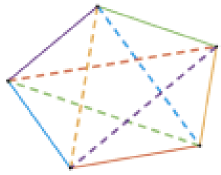
Но если в теореме Наполеона речь идёт о *произвольном* треугольнике, то в теореме Тебо уже нельзя брать произвольные четырёхугольники (в этом легко убедиться, нарисовав, например, очень сплюснутую трапецию), годятся только параллелограммы.

А что нужно потребовать, скажем, от пятиугольника, чтобы для него выполнялась теорема, аналогичная теореме Наполеона?

[3] Подробнее про это написано в статье: В. Н. Дубровский. Геометрия на паркете («Квант» №2 за 2014 год). Там же рассказывается и про другие доказательства при помощи замощений.

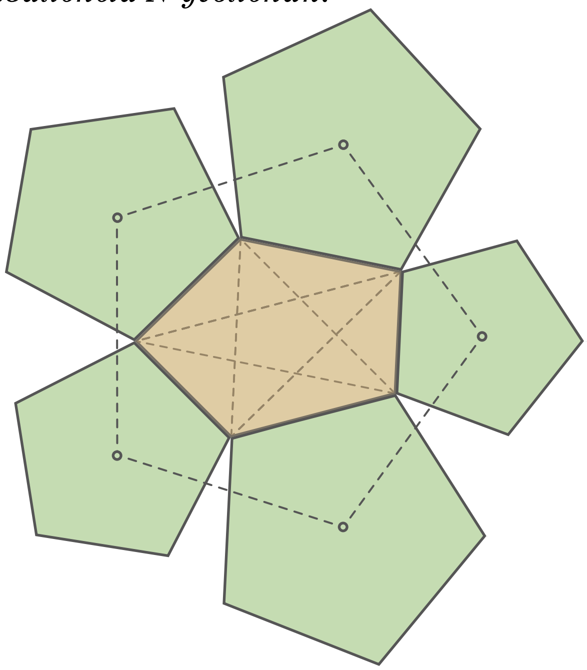


Тут помогает понятие параллельника, недавно обсуждавшееся в «Квантике». [4] *Параллельник* (или, выражаясь более научно, *аффинно-правильный многоугольник*) – это многоугольник, в котором параллельны друг другу те же стороны и диагонали, как если бы он был правильным. Например, четырёхугольный параллельник – это параллелограмм, а пятиугольный параллельник – такой пятиугольник, в котором каждая диагональ параллельна соответствующей (противоположной) стороне.



Теперь можно сказать, что обе приведённые теоремы – частные случаи такого утверждения.

Обобщённая теорема Наполеона. *Центры правильных N-угольников, построенных вовне на сторонах произвольного N-угольного параллельника, образуют правильный N-угольник.*



Но у этой теоремы нет наглядного доказательства при помощи замощений. Зато есть замечательно короткое доказательство при помощи комплексных чисел – но это уже совсем другая история.

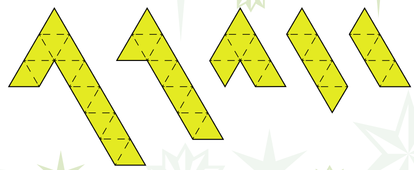
[4] Ф. Нилов. Параллельники, полупараллельники и равные площади («Квантик» № 11 за 2020 год). Там на сторонах N-угольных параллельников строят не правильные N-угольники, а квадраты – и тоже получается интересно.

Художник Мария Усеинова

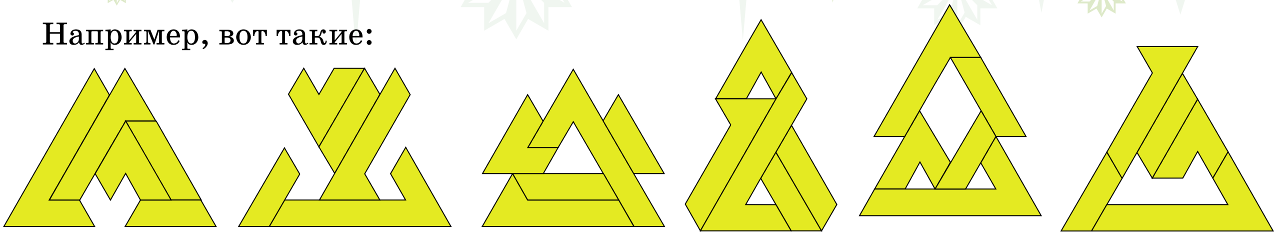
Владимир Красноухов

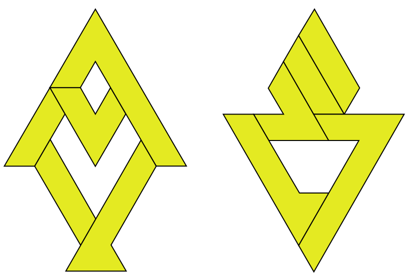
Ёлочка – 2021

Можно ли составить симметричную фигуру из элементов, изображённых справа, используя их все? Конечно, и таких фигур около сотни!



Например, вот такие:





Задача. Соберите из этих пяти элементов симметричную фигуру, наиболее похожую на ёлочку. Элементы можно как угодно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.

Желаем успеха. С наступающим Новым годом!

Художник Алексей Вайнер

XLII ТУРНИР ГОРОДОВ, ОСЕННИЙ ТУР, 8–9 КЛАССЫ

11 и 25 октября 2020 года прошёл осенний тур XLII Турнира Городов. Приводим базовый и сложный варианты для 8–9 классов. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. Учитываются три задачи, по которым участник набрал больше всего баллов (баллы за пункты одной задачи суммируются).

Базовый вариант

1 [3]. На окружности отмечено 100 точек. Может ли при этом оказаться ровно 1000 прямоугольных треугольников, все вершины которых – отмеченные точки?

2. Группа из восьми теннисистов раз в год разыгрывала кубок по олимпийской системе (игроки по жребию делятся на 4 пары; выигравшие делятся по жребию на две пары, играющие в полуфинале; их победители играют финальную партию). Через несколько лет оказалось, что каждый с каждым сыграл ровно один раз. Докажите, что

а) [2] каждый побывал в полуфинале более одного раза;

б) [3] каждый побывал в финале.

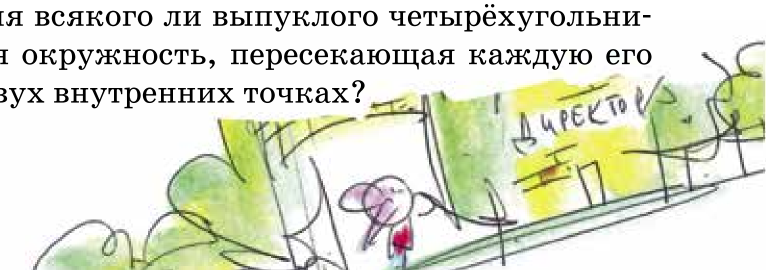
3 [5]. В куче n камней, играют двое. За ход можно взять из кучи количество камней, либо равное простому делителю текущего числа камней в куче, либо равное 1. Выигрывает взявший последний камень. При каких n начинающий может играть так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?

4 [5]. Даны равносторонний треугольник со стороной d и точка P, расстояния от которой до вершин треугольника равны положительным числам a, b и c. Докажите, что найдутся равносторонний треугольник со стороной a и точка Q, расстояния от которой до вершин этого треугольника равны b, c и d.

5 [5]. Директор зоопарка приобрёл восемь слонов с номерами 1, 2, ..., 8. Какие у них были массы, он забыл, но запомнил, что масса каждого слона, начиная с третьего, равнялась сумме масс двух предыдущих. Вдруг до директора дошёл слух, что один слон похудел. Как ему за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти этого слона или убедиться, что это всего лишь слух? (Ему известно, что ни один слон не потолстел, а похудеть мог максимум один.)

Сложный вариант

1 [4]. Для всякого ли выпуклого четырёхугольника найдётся окружность, пересекающая каждую его сторону в двух внутренних точках?



Авторы задач: **базовый вариант** – Сергей Дворянинов (1), Борис Френкин (2), Фёдор Ивлев (3), Александр Эвнин (4), Александр Грибалко (5); **сложный вариант** – Александр Перепечко (1), Борис Френкин (2), Андрей Аржанцев (3), Александр Грибалко (4), Михаил Евдокимов (5), Михаил Святловский (6), Максим Дидин (7)

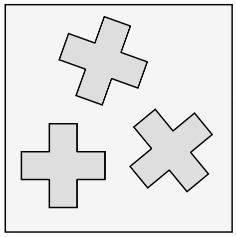
2 [7]. Назовём пару различных натуральных чисел *удачной*, если их среднее арифметическое (полусумма) и среднее геометрическое (квадратный корень из произведения) – натуральные числа. Верно ли, что для каждой удачной пары найдётся другая удачная пара с тем же средним арифметическим? (Пояснение: пары (a, b) и (b, a) считаются одинаковыми.)

3. Петя и Вася играют в такую игру. Каждым ходом Петя называет какое-то целое число, а Вася записывает на доску либо названное число, либо сумму этого числа и всех ранее написанных чисел. Всегда ли Петя сможет добиться того, чтобы в какой-то момент на доске среди написанных чисел было

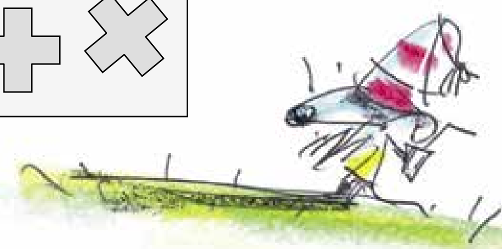
а) [3] хотя бы сто чисел 5;

б) **[4]** хотя бы сто чисел 10?

4 [7]. Пентамино «крест» состоит из пяти квадратиков 1×1 (четыре квадратика примыкают по стороне к пятому). Можно ли из шахматной доски 8×8 вырезать, не обязательно по клеткам, девять таких крестов?



5 [8]. Существуют ли 100 таких натуральных чисел, среди которых нет одинаковых, что куб одного из них равен сумме кубов остальных?



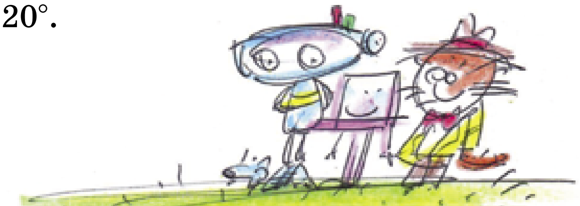
6 [10]. За каждым из двух круглых столиков сидит по n гномов. Каждый дружит только со своими соседями по столику слева и справа. Добрый волшебник хочет рассадить гномов за один круглый стол так, чтобы каждые два соседних гнома дружили между собой. Он имеет возможность подружить $2n$ пар гномов (гномы в паре могут быть как с одного столика, так и с разных), но после этого злой волшебник поссорит между собой n пар гномов из этих $2n$ пар. При каких n добрый волшебник может добиться желаемого, как бы ни действовал злой волшебник?

7. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ обладает таким свойством: ни из каких трёх его сторон нельзя сложить треугольник. Докажите, что

а) **[6]** один из углов этого четырёхугольника не больше 60°;

б) **[6]** один из углов этого четырёхугольника не меньше 120°.

Художник Сергей Чуб



НАШ КОНКУРС, II тур («Квантик» № 10, 2020)

6. *За три весенних месяца некоторого года понедельников было меньше, чем четвергов. Чего было меньше за три летних месяца того же года – вторников или пятниц?*

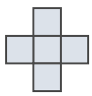
Ответ: вторников было меньше, чем пятниц.

В весенних месяцах (март, апрель и май) $31+30+31=92$ дня, и в летних месяцах (июнь, июль и август) тоже: $30+31+31=92$. Число 92 при делении на 7 даёт остаток 1. Значит, весна начинается и заканчивается одним и тем же днём недели. Именно этих дней недели весной на 1 больше, чем любых других. Тогда первым и последним днём весны в тот год был четверг, откуда первым летним днём была пятница. И аналогично, летом именно пятниц было на 1 больше, чем любых других дней недели – в частности, больше, чем вторников.

7. *Найдите все натуральные числа n, для которых $n^2 = n! + n$. (Напомним, что $n!$ – это произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ первых n натуральных чисел.)*

Ответ: $n=2$, $n=3$. Заметим, что $n=1$ не годится ($1 \neq 1+1$), а $n=2$ и $n=3$ подходят ($4=2+2$ и $9=6+3$). Пусть $n>3$. Поделим равенство $n^2=n!+n$ на n, получим: $n=(n-1)!+1$, откуда $n-1=(n-1)!$. Поделим на $n-1$, получим: $1=(n-2)!$, но при $n>3$ правая часть больше 1.

8. *Два игрока играют в крестики-нолики на бесконечной клетчатой плоскости. Выигрывает тот, кто отметит пять клеток в виде креста (см. рисунок) своим значком. Всегда ли второй игрок может помешать первому выиграть?*



Ответ: да. Второй может действовать так: он разбивает всю плоскость на двуклеточные доминошки и на каждый ход первого в какую-то доминошку ставит нолик в ту же доминошку. Любой пятиклеточный крест обязательно накрывает какую-то доминошку целиком, так что его не удастся весь заполнить крестиками.

Попробуйте решить задачу для других фигур пентамино – например, когда первый стремится отметить полоску из 5 крестиков. (Подсказка: тут второй тоже может разбить плоскость на доминошки, но уже не как попало!)

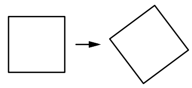
9. *а) Можно ли все натуральные числа окрасить в три цвета так, чтобы каждый цвет присутствовал и произведение любых двух чисел одного цвета было числом того же цвета? б) А в семь цветов?*

Ответ: можно в обоих пунктах.

а) Например, покрасим нечётные числа синим, а среди чётных покрасим жёлтым делящиеся на 3, и зелёным – остальные.

б) Выберем 6 простых чисел, например: 2, 3, 5, 7, 11 и 13. Все степени каждого из них покрасим в свой цвет: 2, 4, 8, 16, ... будут первого цвета; 3, 9, 27, ... – второго; ...; 13, 169, ... – шестого. Остальные числа покрасим в 7-й цвет. Проверьте, что такая раскраска подходит.

10. *Придумайте способ разрезать квадрат на части и передвинуть их, не поворачивая, так чтобы получился такой же, но повёрнутый квадрат (например, как на рисунке).*



Два квадрата, построенные на катетах прямоугольного треугольника, можно разрезать на части и сложить из них (передвигая, но не поворачивая части) квадрат на гипотенузе того же прямоугольного треугольника (рис. 1). Это – одно из доказательств теоремы Пифагора (в прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы).

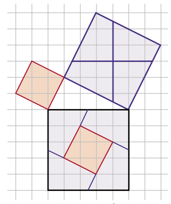


Рис. 1

Осталось применить это разрезание дважды (рис. 2). Обратите внимание, что приходится «наложить одно разрезание на другое» и резать квадрат не на 5, а на 9 частей) – и получится повёрнутый квадрат.

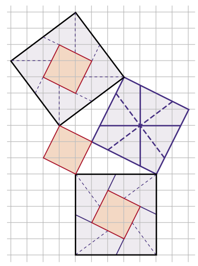


Рис. 2

Любопытно, что если взять не квадрат, а равносторонний треугольник, то повернуть его, «ничего не поворачивая, а только разрезая и сдвигая», уже невозможно! Попробуйте это доказать или прочитайте решение в книге В. Г. Болтянского «Третья проблема Гильберта».

ЗНАЕТЕ ЛИ ВЫ РИМСКИЕ ЦИФРЫ? («Квантик» № 11, 2020)

Первое равенство позволяет предположить, что точка обозначает какое-то число x, а второе – что $8x = S + 2x$, то есть $S = 6x$. Не противоречит ли это третьему равенству? Попробуем его записать: $3x \cdot 4x = x$, то есть $12x^2 = x$, откуда x равняется... $1/12$. Соответственно, $S = 1/2$ (тут можно ещё вспомнить приставку «семи-», означающую «полу-»).

Теперь ясно, почему эти «римские цифры» выглядят непривычно, – перед нами древнеримская система записи *дробей*. В то время одну двенадцатую называли *унцией* (и обозначали точкой). Получаем ответ:

$\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$; $\frac{1}{4}+\frac{5}{12}=\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$;

$\bullet\bullet\bullet\bullet + \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet = S\bullet\bullet\bullet$; $S \times \bullet\bullet\bullet\bullet = \bullet\bullet$;

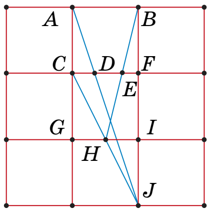
$\bullet\bullet : \bullet\bullet\bullet = S\bullet\bullet$; $S + S = 1$ или $S : S = 1$.

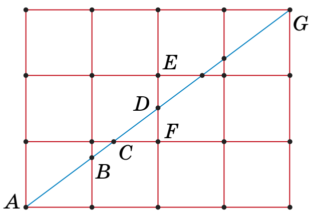
ЗАДАЧА О ГВОЗДЯХ И НИТКАХ

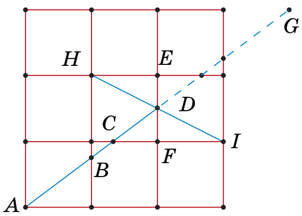
(«Квантик» № 11, 2020)

Нетрудно вбить два гвоздя на расстоянии 5 см, используя три нитки, если воспользоваться следующим фактом: $5=12-3-4=12-\frac{12}{4}-\frac{12}{3}$.

Иными словами, нам нужно отделить от стороны маленького квадратика треть с одной стороны и четверть – с другой. Посмотрим, как это можно сделать: для начала натянем ниточки AJ и CJ и вобьём гвозди D и H. Пользуясь подобием треугольников ADC и JDF, легко доказать, что CD составляет ровно треть от CF, или 4 см. Аналогично HI, отсекаемая ниткой CJ, равна половине GI. Наконец, используем последнюю, третью ниточку – натянем её между B и H и вобьём гвоздь в точке E. Заметим, что EF – средняя линия в треугольнике BHI, а значит, равняется половине HI, или половине половины (то есть четверти) GI. Получаем, что EF в точности равняется 3 см. Тогда $DE=CF-CD-EF=5$ см!







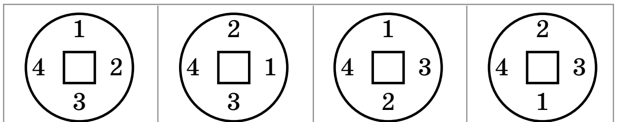
Но с двумя ниточками такой трюк не сработает. Что же делать? Посмотрим на то, как гипотенуза египетского треугольника (прямоугольного треугольника, стороны которого делятся в отношении 3:4:5) делится сеткой на части. Как можно видеть, отрезок AG делится на три равные части горизонтальными линиями и на четыре равные части – вертикальными. Значит, $AC=\frac{1}{3}AG$; $AB=\frac{1}{4}AG$; $BC=AC-AB=$ $=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)AG=\frac{1}{12}AG$. Поскольку $AG=5\cdot 12=$ $=60$ см, то $BC=5$ см. Но есть одна проблема: наше поле меньше по размерам. Воспользуемся тем, что AG делит EF пополам в точке D. Натянем нитку HI и вобьём гвоздь в точку D, после чего натянем нитку между A и D. После этого мы сможем вбить гвозди B и C, которые, как мы уже доказали, удалены друг от друга на 5 см!

КИТАЙСКИЕ МОНЕТЫ

Легко заметить, что во всех названиях есть слог *бао*, а на всех монетах слева – иероглиф 寶 или 寶. Шесть монет называются *тун-бао*, но нет знака, который бы на шести монетах находился на одном и том же месте (как ни составляй пары знаков обычного шрифта и шрифта печатей). Это означает, что порядок иероглифов на монете может различаться.

Можно начать рассуждать с другой стороны. Слог *юань* встречается семь раз, *тун* – шесть раз. Есть лишь один способ обеспечить это: предположить, что *тун* – это 通 = 通 (встречаются по три раза), *юань* – 元 (встречается пять раз) и какой-то из знаков, встречающихся два раза в шрифте печатей, то есть 元 или 聖, по сходству, скорее, первый (это соображение на самом деле не понадобится, формально см. ниже).

Слог *тун* встречается только в сочетании *тун-бао*, а соответствующие иероглифы находятся внизу или справа. Итак, есть четыре варианта порядка чтения иероглифов на монете:



сверху-справа-снизу-слева (по кругу)	справа-сверху-снизу-слева (зигзагом)	сверху-снизу-справа-слева (крестом)	снизу- сверху-справа-слева (петлёй)

Монета (9) имеет три уже известных иероглифа, это может быть (В) *сун-юань тун-бао*, читаемая крестом. Поэтому 宋 = *сун*.

Монеты (С) и (Н) называются одинаково: *шэн-сун юань-бао*. Монет с одинаковыми иероглифами нет, стало быть, на одной из этих монет – надпись шрифтом печатей, а на другой – обычная надпись. Это монета (10), опознаём её по иероглифу 宋; она читается по кругу, и мы узнаем ещё один иероглиф 聖 = *шэн*.

Итак, мы знаем, что монеты могут читаться по кругу или крестом. Будем далее исходить из того, что этих вариантов достаточно; к тому же они действительно кажутся наиболее естественными (если мы не сможем провести дальнейшие рассуждения без противоречий, нам придётся предположить существование ещё какого-то варианта, – но этого не произойдёт).

Выше мы обещали рассмотреть случай *юань* = 聖. Тогда (В) *сун-юань тун-бао* – это монета (2), читаемая крестом, *сун* = , и мы пришли к противоречию: этот иероглиф больше не встречается; у нас не будет кандидатов на монету (C/H) в варианте шрифта печатей.

Есть ещё одна возможность: монета (9) – это (I) *юань-ю тун-бао*, читаемая петлёй. Но тогда 宋 = *ю*, а слог *ю* встречается только один раз, и мы не можем объяснить 宋 на монете (10).

Итак, сейчас мы предполагаем, что есть два способа чтения – по кругу и крестом, и знаем иероглифы *бао* = = 寶, *юань* = = 元, *тун* = = 通, *сун* = 宋, *шэн* = 聖, а также соответствия монет (9) = (B), (10) = (C/H).

Далее, (7)=(I) (есть *бао*, *юань*, *тун*, других кандидатов нет), читается крестом, *ю* = 祐 (впрочем, это дальше не понадобится, это уникальный знак).

Теперь у нас остались:

- неопознанный вариант (C/H) *шэн-сун юань-бао* в шрифте печатей,
- две пары монет с отличием на *юань* / *тун*:
  - (F) *чжи-хэ тун-бао* / (J) *чжи-хэ юань-бао*,
  - (K) *си-нин тун-бао* / (E) *си-нин юань-бао*,
- пара монет с отличием на втором слоге:
  - (A) *шао-си тун-бао* / (D) *шао-шэн тун-бао*,
- монета с двумя уникальными иероглифами: (G) *сянь-чунь юань-бао*.

Составим пары из монет с совпадающими символами в первой или второй позициях:

- (5) *тун-бао* (крестом) / (1) *юань-бао* (по кругу),
- (2) *тун-бао* (крестом) / (4) *юань-бао* (по кругу),
- (6) 紹熙 тун-бао (крестом) / (11) 熙寧 *юань-бао* (по кругу).

Иероглиф 熙 встречается в первой и второй позициях; таких слогов два: *шэн* и *си*, но *шэн* = 聖, стало быть, 熙 = *си*. Отсюда (6) = (A) *шао-си тун-бао*; *шао* = 紹. Второй член этой пары (11) = (E) *си-нин юань бао*, 寧 = *нин*.

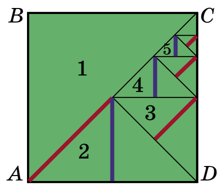
Теперь для пары (5)/(1) не остаётся вариантов, кроме как (F) *чжи-хэ тун-бао*/(J) *чжи-хэ юань-бао*, (5) = (F), (1) = (J), = *чжи*, = *хэ*.

Среди оставшихся монет замечаем на второй позиции в (2) (*тун-бао*, чтение крестом) и на первой позиции в (4) (*юань-бао*, чтение по кругу). Так же ведёт себя слог *шэн* в (D) *шао-шэн тун-бао* и (C/H) *шэн-сун юань бао*. Поэтому (2) = (D), (4) = (C/H), = 聖 = *шэн*, = 宋= *сун*, = 紹 = *шао*.

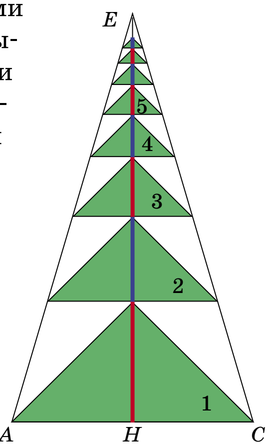
Ну и осталось очевидное: (3) = (K) *си-нин тун-бао* (по кругу), (8) = (G) *сянь-чунь юань-бао* (крестом); *си* = = 熙, *нин* = = 寧.

Если позволить себе опираться на сходство знаков, то можно сразу заметить, что монеты (C) и (H) называются одинаково: *шэн-сун юань-бао*, и поискать пару монет с самыми похожими иероглифами: это будут (4) и (10). Если эта гипотеза верна, то 元 = , и действительно, в совокупности эти знаки встречаются семь раз, как и слог *юань*; остаются = 聖宋, *шэн-сун*. Исходя из сходства знаков, = 宋= *сун*, = 聖 = *шэн*. Дальнейшие рассуждения с использованием сходства знаков *юань* = = 元 и встречающегося шесть раз (три и три) *тун* = = 通, а также *си* = = 熙, *шао* = = 紹, *нин* = = 寧 тоже оказываются проще, впрочем, ненамного.

«РАСТУЩАЯ» ЁЛОЧКА

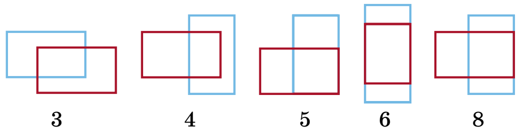


Ответ: $1+\sqrt{2}$. Данный квадрат, не нарушая условия задачи, можно разбить на треугольники иначе. Линии разрезов обозначены тонкой чёрной линией, цветными отрезками обозначены высоты треугольников. При таком разбиении максимальная высота *EH* ёлочки равна сумме длин синих и красных отрезков. Но сумма длин всех синих отрезков равна стороне квадрата, то есть 1, а сумма длин всех красных отрезков равна диагонали квадрата, то есть $\sqrt{2}$, откуда $EH=1+\sqrt{2}$.

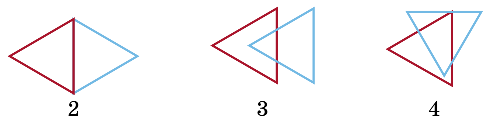


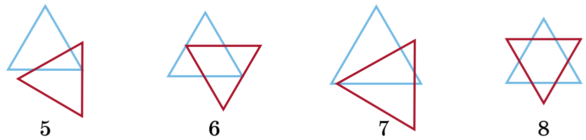
1 + 1 = 11

1. Не получится 7. Вот остальные примеры:



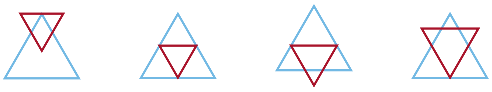
2. Примеры приведены на рисунках.





5 6 7 8

3. Первые два примера и последний подходят из задачи 2. Вот остальные рисунки.



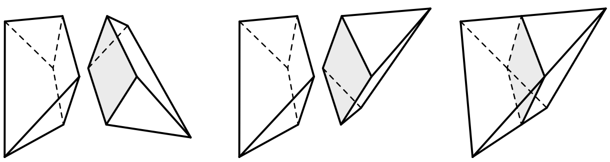
4 5 6 7

СФЕРИКОНЫ И ГЕКСАКОН

1. Пусть сторона квадрата равна a. Основание конуса – это круг с диаметром на диагонали квадрата. Значит, половина длины окружности основания равна $\pi\sqrt{2}a/2$, что равно длине дуги сектора. Радиус сектора равен a, значит, если α – угол сектора в градусах, то длина дуги сектора равна $2\pi a \cdot \alpha/360$. Откуда $\alpha = 90\sqrt{2}$ градусов.

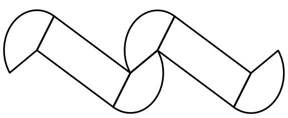
2. Перпендикуляр, опущенный из центра квадрата на его сторону, опирается на её середину. Поэтому перпендикуляр, опущенный из центра тетракона на плоскость, попадает в середину отрезка, по которому тетракон соприкасается с плоскостью. Такие средние линии секторов соединяются в зигзагообразную линию. Центр движется точно по такой же линии, если её поднять на высоту центра.

3. Выберем два ребра тетраэдра, которые не имеют общих вершин. Проведём в каждой грани среднюю линию, которая параллельна одному из выбранных рёбер. Эти линии образуют четырёхугольник. Противоположные стороны у него параллельны, так как средняя линия треугольника параллельна основанию. То есть, это параллелограмм. Проведём через него плоскость и разрежем по ней тетраэдр на две части. Они будут равны, поскольку если повернуть тетраэдр так, что выбранные рёбра поменяются местами, то и части поменяются местами. Подумайте, почему построенный параллелограмм – это на самом деле квадрат.



4. Если ось проходит через середину стороны.

5.



6. У правильного пятиугольника ось симметрии всегда проходит через середину некоторой стороны. Эта сторона при вращении превратится в круг. Когда мы разрежем фигуру, полученную вращением пятиугольника, этот круг разрежется на два полукруга. Когда мы повернём две половины сферикона относительно друг друга, два полукруга разъединятся. Полученный сферикон может катиться в одну сторону, пока не встанет на один полукруг.

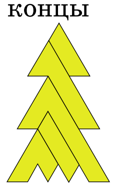
7. Пронумеруем стороны многоугольника по порядку 1, 2, ..., $2n$. Пусть ось симметрии была так выбрана, что симметричны стороны 1 и $2n$, 2 и $2n-1$, ... Эти же пары сторон соединены ленточками (то есть половинками конусов, усечённых конусов и цилиндров) на поверхности одной половины сферикона. Другая половина повёрнута. Пусть она повёрнута в такую сторону, что ленточками соединены стороны 2 и 1, 3 и $2n$, 4 и $2n-1$, ... Тогда при катании сферикона мы будем проходить все стороны многоугольника в таком порядке: 1, $2n$, 3, $2n-2$, 5, $2n-4$, 7, $2n-6$, ..., $2n-3$, 4, $2n-1$, 2.

8. Три раза. Пронумеруем стороны числами 1, 2, ..., 12. Пусть на одной половине сферикона ленточками соединены стороны 1 и 12, 2 и 11, ..., 6 и 7, а на другой 4 и 3, 5 и 2, ..., 9 и 10. Ленточки на поверхности сферикона соединяются в три замкнутые ленты, которые проходят через стороны: 1, 12, 7, 6; 2, 11, 8, 5; 3, 10, 9, 4.

9. Бесконечный цилиндр. Конус.

10. Чтобы найти такие кривые, нужно нарисовать внутри тетракона и гексакона шар максимального радиуса и тогда точки, в которых шар коснётся, и будут составлять искомые кривые. Тетракон и гексакон состоят из конусов, поэтому искомые кривые состоят из дуг окружностей. Вспомним, что тетракон получается из двойного конуса. Двойной конус – это тоже крутикон! Он получается, если нарисовать на сфере две окружности. Разрежем сферу на две части – каждая окружность разрежется на две полуокружности, и повернём. Получится кривая из четырёх полуокружностей, напоминающая рисунок на мяче для бейсбола. Для гексакона ответ аналогичный, только будет 6 равных полуокружностей, концы которых делят экватор на 6 равных дуг.

ЁЛОЧКА – 2021



На наш взгляд, наиболее стройная ёлочка вот эта (см. рисунок). Хотя могут быть и иные мнения.

итоги нашего конкурса
ПОЗДРАВЛЯЕМ!

Подведены итоги математического конкурса, проходившего с сентября 2019 года по август 2020 года. В нём участвовали более 400 школьников из разных стран. Новый конкурс уже идёт (см. с. 32).

ПОЗДРАВЛЯЕМ НАШИХ ПОБЕДИТЕЛЕЙ! ИМИ СТАЛИ

Барков Артём	Москва	Школа № 444	6 кл.
Бирюлин Алексей	Москва	Школа № 179	7 кл.
Гришина Анастасия	Москва	Школа № 1158	6 кл.
Ермолаев Арсений	Москва	Школа № 2007	6 кл.
Костиков Владислав	Самара	Гимназия № 2	4 кл.
Куцук Елена	Маунтин-Вью, Калифорния (США)	Huff Elementary School	5 кл.
Назаренко Павло	Киев (Украина)	Лицей «Наукова зміна»	7 кл.
Нестеренко Александра	Москва	Школа № 1287	7 кл.
Окунева София	Москва	Школа № 1533 «ЛИТ»	6 кл.
Подгорнов Иван	Курган	Школа № 48	8 кл.
Прохоров Павел	Москва	Лицей «Вторая школа»	7 кл.
Ровинский Кирилл	Москва	Школа № 17	4 кл.
Савин Михаил	Протвино, Московская обл.	Лицей «Протвино»	6 кл.
Салдаев Лев	Магнитогорск, Челябинская обл.	Школа № 5	6 кл.
Саначев Иван	Москва	Школа № 1583 им. К. А. Керимова	4 кл.
Сизова Юлия	Дмитров, Московская обл.	Гимназия «Логос»	7 кл.
Тимонина Ирина	Саров, Нижегородская обл.	Школа № 14	7 кл.
Тюков Даниил	Новый Свет, Ленинградская обл.	Школа «Пригородная»	9 кл.
Чалык Павел	Балаково, Саратовская обл.	Гимназия № 2	8 кл.
Часовских Иван	Химки, Московская обл.	Школа № 14	6 кл.
Шкурдей Александр	Москва	Школа № 1575	6 кл.
Яриков Михаил	Липецк	Гимназия № 19 им. Н. З. Поповичевой	7 кл.

ПОЗДРАВЛЯЕМ НАШИХ ПРИЗЁРОВ! ИМИ СТАЛИ

Вараксин Андрей	Магнитогорск, Челябинская обл.	Школа № 5	6 кл.
Газизов Гарифулла	Уфа	Лицей № 83 им. Пинского УГНТУ	5 кл.

Джаошвили Анна	Москва	Курчатовская школа	6 кл.
Елисеевы Анастасия и Екатерина	Москва	Школа № 1557 им. Л. Капицы	6 кл.
Митяшина Дарья	Саров, Нижегородская обл.	Школа № 16	7 кл.
Нехаева Екатерина	Москва	Школа № 179	7 кл.
Приходько Тамара	Красноярск	Школа № 3	7 кл.
Салов Александр	Балашиха, Московская обл.	Школа «Интеллект-Сервис»	8 кл.
Степина Алиса	Москва	Школа № 548	7 кл.
Федорова Анастасия	Москва	Школа № 1514	6 кл.
Шириков Лев	Москва	Школа № 57	7 кл.
Шувалова Диана	Москва	Школа № 1505	6 кл.
Шустов Иван	Санкт-Петербург	Школа № 19	7 кл.
Юрченко Анастасия	Харьков (Украина)	Школа № 45 «Академическая гимназия»	4 кл.

Победителям и призёрам будут высланы дипломы журнала «Квантик», а также призы – научно-популярные книги издательства МЦНМО, фонда «Математические этюды» и фонда «Траектория»

ТАКЖЕ ОТМЕЧАЕМ УСПЕШНОЕ ВЫСТУПЛЕНИЕ РЕБЯТ:

Абрамочкина Екатерина	Самара	Лицей «Технический»	7 кл.
Ануфриева Ульяна	Лесосибирск, Красноярский край	Школа № 9	8 кл.
Астафьев Кирилл	Москва	Инженерно-техническая школа им. Поповича	6 кл.
Бетке Игорь	Новосибирск	Лицей № 126	9 кл.
Богатырь Никита	Москва	Школа № 1561	5 кл.
Боднарчук Алексей	Минск (Беларусь)	Гимназия № 10	2 кл.
Борисова Софья	Липецк	Гимназия № 1	4 кл.
Жук Владимир	Калининград	Гимназия № 22	5 кл.
Калачёв Александр	Чита	Забайкальский краевой лицей-интернат	5 кл.
Карпенко Артём	Москва	Школа № 1557	5 кл.
Клепацкий Роман	Санкт-Петербург	Гимназия № 402	8 кл.
Копылов Александр	Москва	Инженерно-техническая школа им. Поповича	6 кл.
Манджиев Темир	Москва	Лицей «Вторая школа»	6 кл.
Муляр Виктор	Красноярск	Школа № 10	6 кл.
Тетерников Макар	Ростов-на-Дону	Лицей «КЭО»	6 кл.
Ушаков Севастьян	Санкт-Петербург	Школа № 543	4 кл.
Шарипова Зарина	Уфа	Гимназия № 3	6 кл.

НАШ КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Первый этап состоит из четырёх туров и идёт с сентября по декабрь.

Высылайте решения задач IV тура, с которыми справитесь, не позднее 5 января в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

IV ТУР

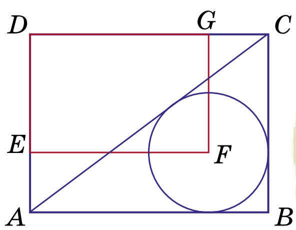
16. Можно ли заполнить таблицу 4×4 различными целыми числами от 1 до 16 так, чтобы никакие два соседних числа не стояли рядом (в соседних клетках по вертикали, горизонтали или диагонали)?

17. Любой ли остроугольный треугольник можно разрезать на 17 тупоугольных треугольников?

Авторы: Михаил Евдокимов (16), Григорий Гальперин (17), Игорь Акулич (18), Леонард Эйлер (19), Анна Андреева, Михаил Панов (20)

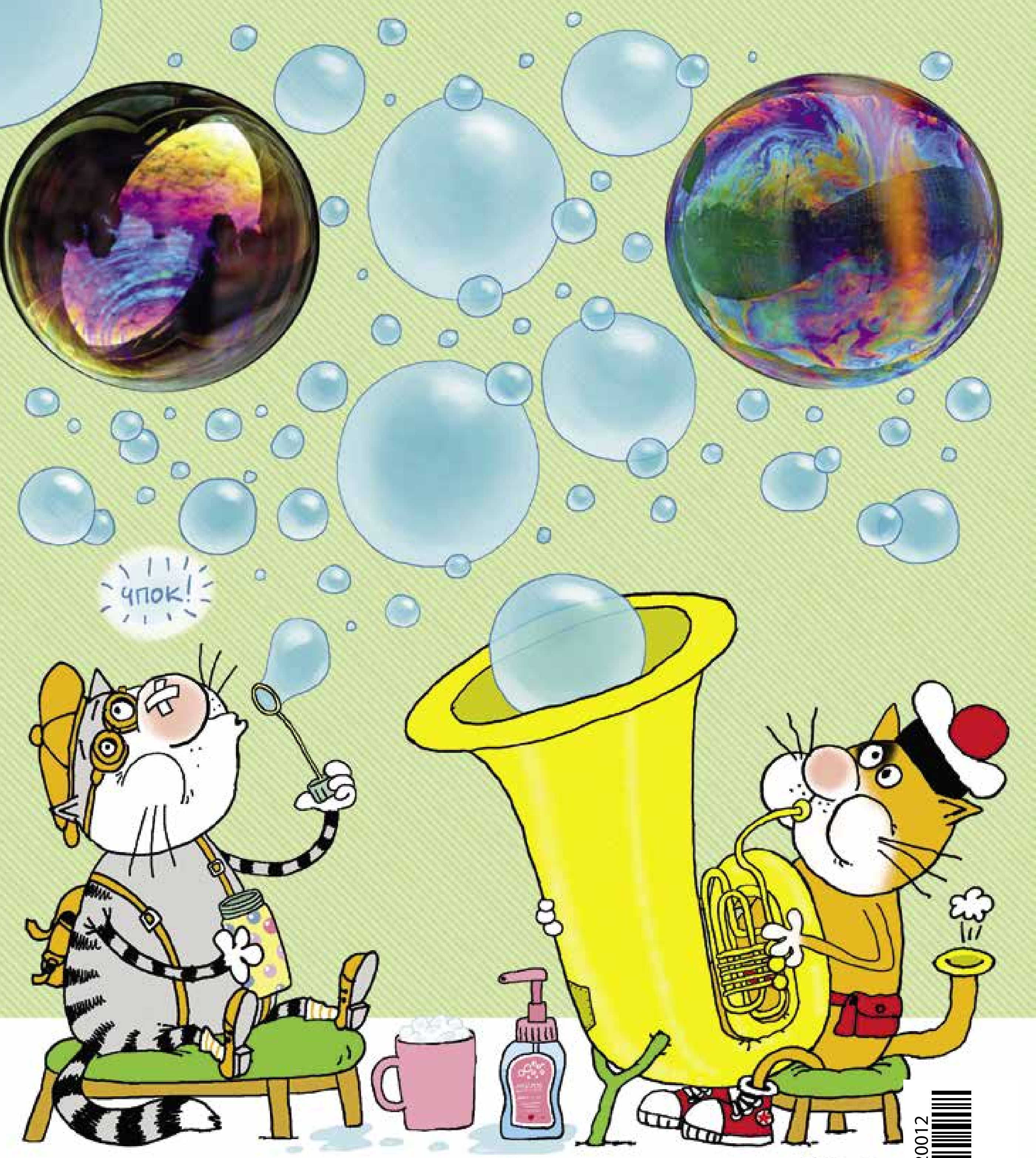
18. Квантик и Ноутик играют в такую игру. Ноутик диктует Квантику цифры от 1 до 9 в том порядке, в котором захочет (каждую по одному разу). Квантик записывает их на листе бумаги, причём каждую цифру, начиная со второй, пишет либо слева, либо справа от всех ранее написанных цифр. В результате на листе образуется девятизначное число. Квантик хочет, чтобы оно было как можно больше, а Ноутик – чтобы оно было как можно меньше. Какое число получится, если оба будут играть наилучшим образом?

19. Числа
41,
41 + 2,
41 + 2 + 4,
41 + 2 + 4 + 6,
41 + 2 + 4 + 6 + 8,
41 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10,
41 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12
простые. Верно ли, что так будет всегда и дальше?



20. Даны два прямоугольника $ABCD$ и $DEFG$, причём точка E лежит на отрезке AD, точка G лежит на отрезке CD, а точка F – центр вписанной окружности треугольника ABC. Во сколько раз площадь прямоугольника $ABCD$ больше площади прямоугольника $DEFG$?

Художник Николай Крутиков



Художник Николай Воронцов

ОТРАЖЕНИЕ В ПУЗЫРЕ

Перед вами фото двух мыльных пузырей. Почему в каждом пузыре два одинаковых отражения, которые центрально-симметричны друг другу?

Автор Мария Быкова

Фото: Лидия Широнина

ISSN 2227-7986