№ 1 | январь 2020
Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования
e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ КВАНТИК
ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 1
январь
2020

САМОЗАПУСКАЮЩИЙСЯ СИФОН

КАРТИНКИ ВЫЧИСЛЯЮТ БЕСКОНЕЧНЫЕ СУММЫ

НАИВНАЯ ФИЗИКА

Enter

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

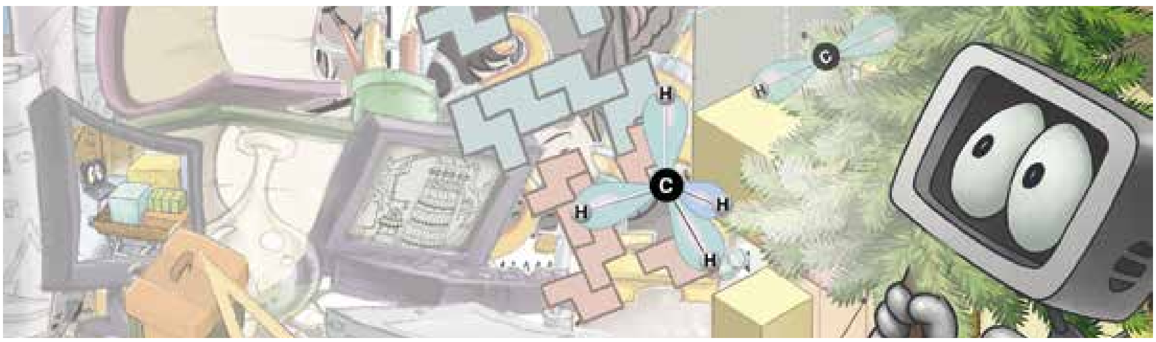
Журнал «Квантик» № 1, январь 2020 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор: С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Е. А. Котко, Р. В. Крутовский, И. А. Маховая, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов
Художественный редактор и главный художник: Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И.Х. Гумерова
Обложка: художник Алексей Вайнер

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях связи Почты России:
▪ Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индексы **84252** и **80478**)
▪ Объединённый каталог «Пресса России» (индексы **11346** и **11348**)
Онлайн-подписка
на сайте агентства «Роспечать» **press.rosp.ru**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 5000 экз.
Подписано в печать: 05.12.2019
Отпечатано в типографии ООО «ТДДС-Столица-8»
Тел.: (495)363-48-84
http://capitalpress.ru
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

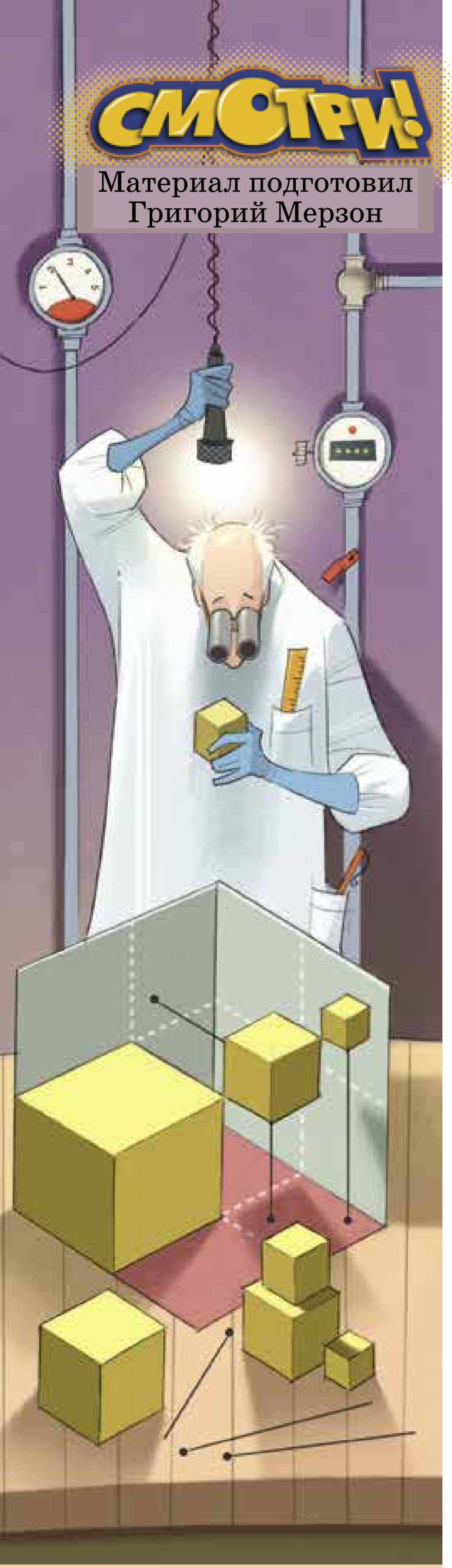
6+
ЕАС

СОДЕРЖАНИЕ



СМОТРИ!

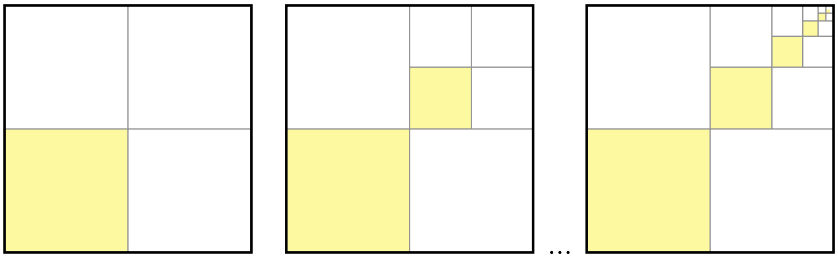
Материал подготовил
Григорий Мерзон



КАРТИНКИ ВЫЧИСЛЯЮТ БЕСКОНЕЧНЫЕ СУММЫ

Как найти сумму нескольких слагаемых? Странный вопрос – бери и складывай одно за другим! Но что делать, если речь идёт о сумме *бесконечного* числа слагаемых? Оказывается, иногда полезно эту сумму... нарисовать.

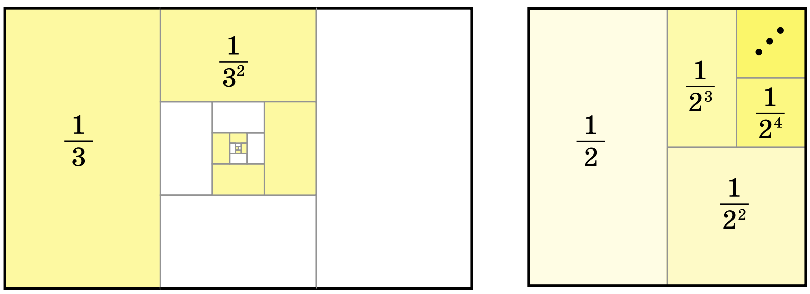
Начнём с суммы $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots$ (это сумма *геометрической прогрессии*: каждое следующее слагаемое в 4 раза меньше предыдущего). Возьмём квадрат единичной площади. Закрасим его четверть, потом добавим четверть от четверти...



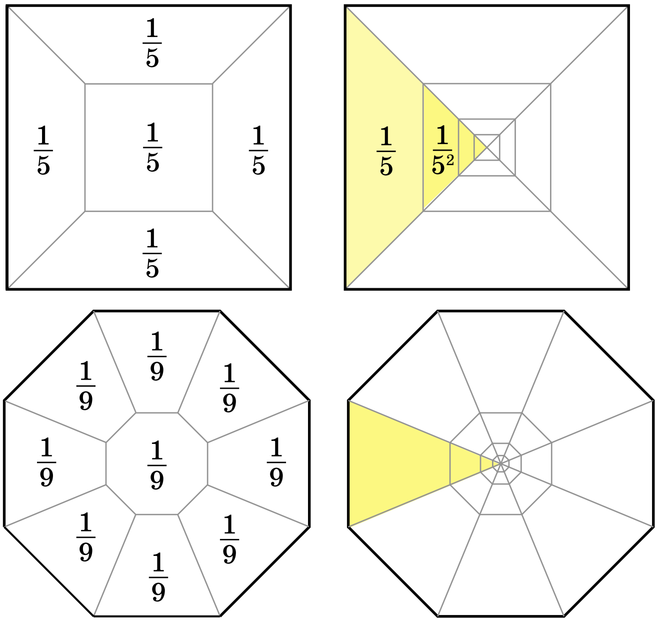
$\frac{1}{4}$ $\quad$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$ $\quad$ ... $\quad$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots=\frac{1}{3}$

Видно, что *в итоге* закрашена ровно $1/3$ площади квадрата – жёлтая часть имеет такую же площадь, как и каждая из двух белых частей.

Можно похожим образом найти суммы $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$ и $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ (поняли, чему эти суммы равны?)

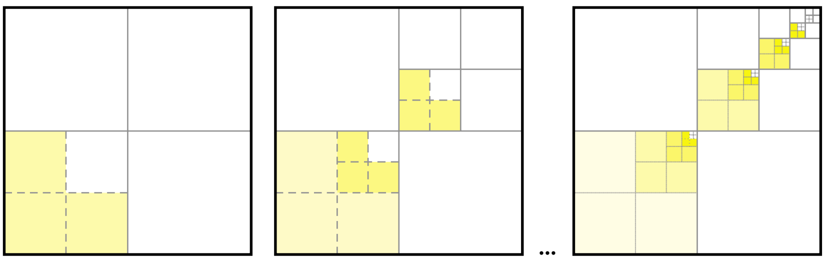


Есть и довольно общий способ подсчитать сумму геометрической прогрессии $\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\ldots$ для любого целого $q>1$. Ниже он показан для $q=5$ и $q=9$.



Мы начинаем с правильного $(q-1)$-угольника, рисуем внутри следующий правильный $(q-1)$-угольник, имеющий площадь в q раз меньше предыдущего – то есть такую же, как каждая из $(q-1)$ примыкающих к нему трапеций, и т.д. Видно, таким образом, что эта сумма равна $\frac{1}{q-1}$.

Можно геометрически найти и некоторые более сложные суммы. Например, ниже объясняется, что $1\cdot\frac{3}{4}+2\cdot\frac{3}{16}+3\cdot\frac{3}{64}+\ldots=\frac{4}{3}$ (большой квадрат имеет площадь 4).



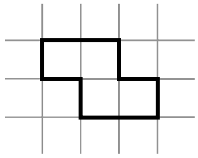
$1\cdot\frac{3}{4}$ $\quad$ $1\cdot\frac{3}{4}+2\cdot\frac{3}{16}$ $\quad$ … $\quad$ $1\cdot\frac{3}{4}+2\cdot\frac{3}{16}+3\cdot\frac{3}{64}+\ldots=\frac{4}{3}$

Теперь мы знаем, чему равна сумма $\frac{1}{q}+\frac{2}{q^2}+\frac{3}{q^3}+\ldots$ для $q=4$. Быть может, вы придумаете геометрические вычисления таких сумм для других q? Подумайте и про другие суммы – например, $\frac{1}{q}+\frac{3}{q^2}+\frac{6}{q^3}+\frac{10}{q^4}+\ldots$ (если в знаменателе q^n, то в числителе стоит сумма всех натуральных чисел от 1 до n).

Художник Алексей Вайнер

Парадокс укладки Z-тетрамино в квадраты

Владимир Ковальджи

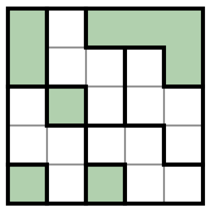


Вполне очевидно, что никакой клетчатый квадрат нельзя разрезать по линиям клеточек на фигурки Z-тетрамино весь без остатка. «Зигзаг» – фигурка кривая, неудобная, замостить ею квадрат целиком невозможно. Но сколько именно «лишних» клеток останется в самом лучшем случае? И как это зависит от размеров квадрата?

Скорее всего, большинству людей интуиция подскажет, что неизбежно останется «несколько» клеток. Что в очень большом квадрате мы почти по всей площади квадрата уложим наши зигзаги плотно, как паркет, и только где-то по углам мы столкнёмся с неприятными «краевыми эффектами», не позволяющими обойтись без лишних клеток. И что с увеличением размеров квадрата число этих лишних клеток вряд ли сильно вырастет. Углов-то у любого квадрата ровно четыре...

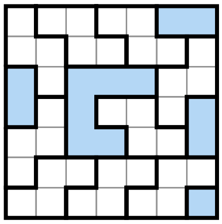
Итак, задача:

У нас есть клетчатый квадрат 2019×2019. Какое минимальное число лишних клеток может остаться после вырезания из него максимально возможного числа Z-тетрамино?

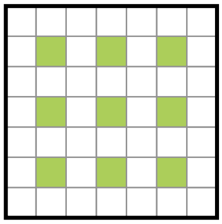


Попробуем для начала квадраты поменьше. В квадрате 3×3 умещается лишь одна фигурка. В квадрате 4×4 – три. В квадрате 5×5, как ни старайся, не получается уместить более четырёх. Что-то многовато лишних клеток остаётся – целых 9, то есть более чем на две фигурки ещё.

В квадрате 6×6 запросто умещаются 8 зигзагов, и остаются 4 лишние клетки – результат даже лучше, чем в квадрате 5×5! Впрочем, в квадрате 4×4 тоже осталось меньше, чем в 3×3 – четыре против пяти. Скорее всего, «чётные» квадраты явно удобнее для наших фигурок, и это легко объяснимо. Но главный вопрос – как зависит количество лишних клеток от размеров квадрата вообще (например, если рассматривать только «нечётные» квадраты)?



Возьмём квадрат 7×7. Можно попробовать самые разные варианты укладки, но увы – больше девяти фигурок никак не помещается (то есть 13 клеток остаются лишними). Поскольку перебрать все варианты укладки тут уже затруднительно, необходимо как-то строго доказать, что это действительно предел.



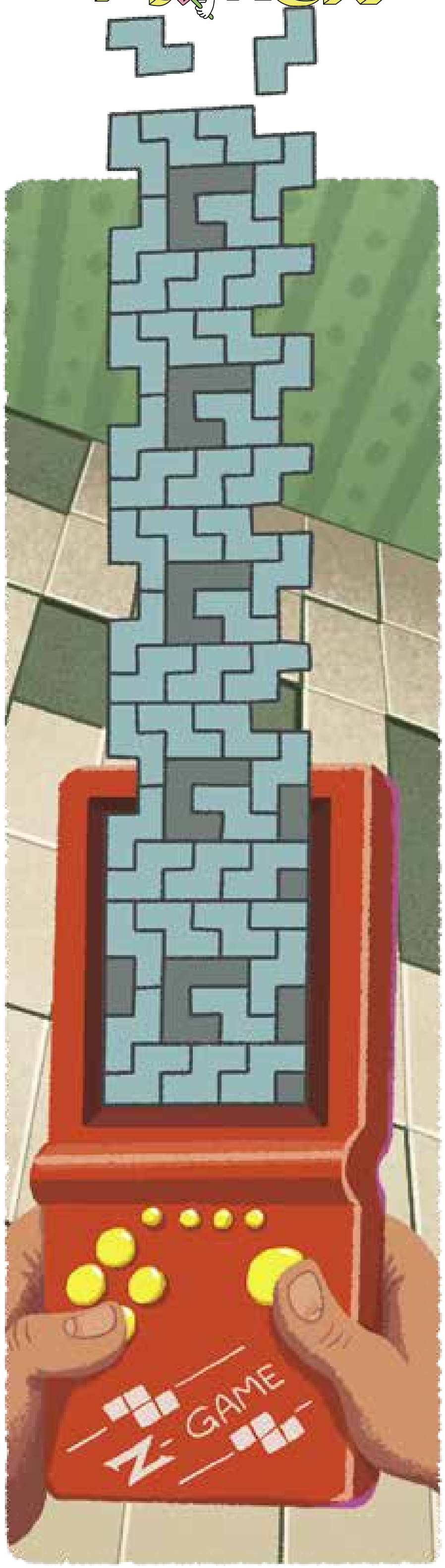
Тут приходит на помощь типичный для подобных задач метод раскраски. Если в нечётном квадрате (например, 7×7) покрасить некоторые клетки так, как показано на рисунке, то в любую фигурку Z-тетрамино обязательно попадёт зелёная клетка, и, следовательно, фигурок не может быть больше, чем таких клеток. Пример, когда фигурок ровно столько, сколько зелёных клеток, легко строится (нарисуйте его!).

Поскольку такая раскраска подходит для любого нечётного квадрата, можно решить задачу в общем виде. Если сторона квадрата $2n-1$, то зелёных клеток будет $(n-1)^2$. Из площади квадрата вычтем число зелёных клеток, помноженное на 4, и получим ответ:

$$(2n-1)^2-4(n-1)^2=4n-3.$$

И вот тут становится ясно, что интуиция на сей раз нас очень сильно подвела. Оказывается, в квадрате 2019×2019 при разрезании на зигзаги неизбежно останется минимум 4037 лишних клеток! Совершенно неожиданный результат. Кажется невероятным, что такое огромное число клеток – четыре тысячи! – никак не удастся как-нибудь так сгруппировать, чтобы вырезать из них хотя бы ещё одну фигурку...

Что касается чётных квадратов со стороной $2n$, то легко показать масштабируемую конструкцию, при которой остаётся $2n+2$ либо $2n$ лишних клеточек (в зависимости от делимости на 4). Что, конечно, экономнее, но всё равно количество лишних клеточек растёт прямо пропорционально стороне квадрата, становясь сколь угодно большим вопреки первоначальному интуитивному предположению.

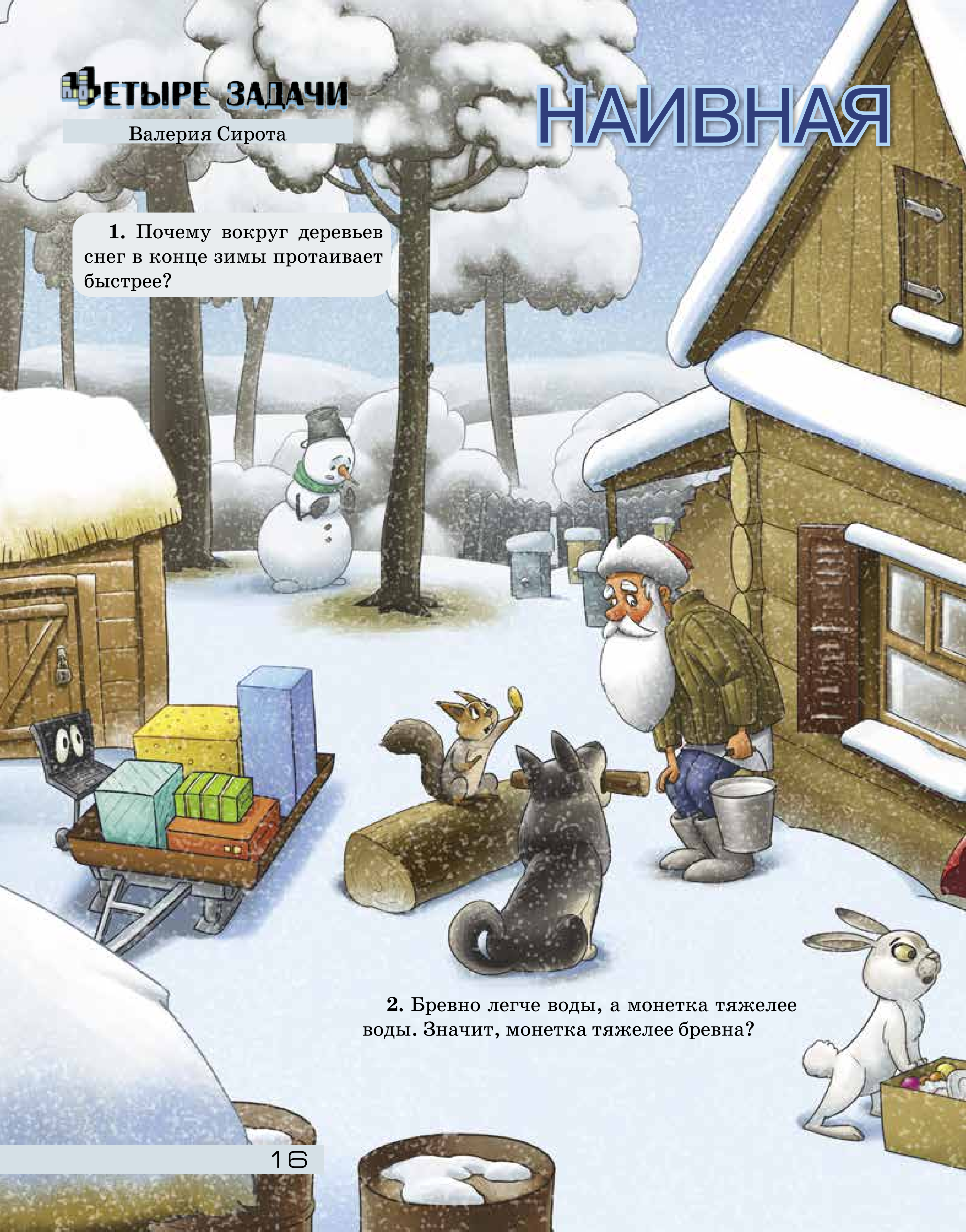


Художник Евгений Паненко

Валерия Сирота

НАИВНАЯ

1. Почему вокруг деревьев снег в конце зимы протаивает быстрее?



2. Бревно легче воды, а монетка тяжелее воды. Значит, монетка тяжелее бревна?

ФИЗИКА

3. Почему в космическом корабле нельзя открыть окно? А что же делать, если надо выйти наружу? Где на Земле применяется тот же принцип?

4. К лампочке всегда ведёт двойной провод (рядом две проволочки, разделённые изоляцией). Зачем?

Художник Мария Усеинова

наш КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Высылайте решения задач V тура, с которыми справитесь, не позднее 1 февраля в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

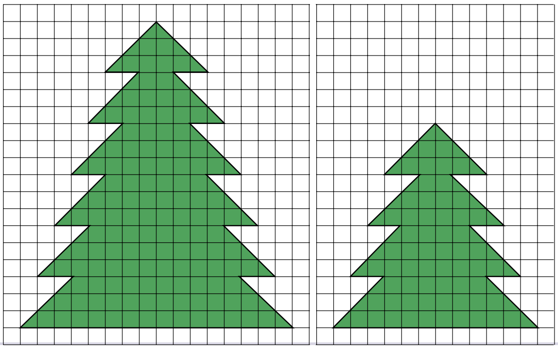
V ТУР

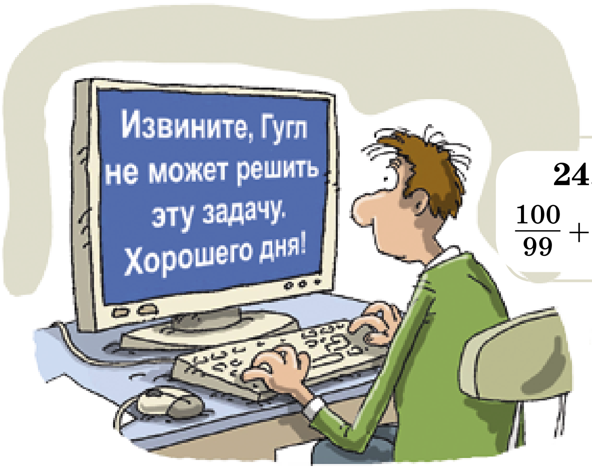
21. Барон Мюнхгаузен огородил свои владения забором в форме шестиугольника. Он утверждает, что каждый внутренний угол этого шестиугольника либо меньше 10°, либо больше 350°. Может ли барон быть прав?

22. Вася написал на листке 10 цифр (среди них могут быть равные) так, чтобы сумма любых трёх написанных цифр не превосходила 14. Какова наибольшая возможная сумма всех 10 цифр? (Приведите пример и докажите, что большую сумму получить нельзя.)

Авторы: Александр Перепечко (21), Павел Кожевников (22), Николай Авилов (23), Григорий Мерзон (24), Николай Чернятьев (25)

23. Ёлочку на рисунке слева разрежьте на четыре части и сложите из них две одинаковые ёлочки, как на рисунке справа.





24. Вычислите сумму

$$\frac{100}{99}+\frac{100\cdot 98}{99\cdot 97}+\frac{100\cdot 98\cdot 96}{99\cdot 97\cdot 95}+\ldots+\frac{100\cdot 98\cdot 96\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}{99\cdot 97\cdot 95\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}.$$

25. Квантик и Ноутик по очереди закрашивают клетки на доске 8×8, по одной клетке за ход, начинает Квантик. Первый ход можно сделать куда угодно. Каждый следующий ход должен быть таким, что новая клетка граничит по стороне ровно с одной закрашенной клеткой. Кто не может сделать ход, проиграл. Кто может обеспечить себе победу?

Художник Николай Крутиков

ПЕРЕНЕСТИ СТОЛ

Справа изображён фрагмент плана квартиры (сторона клетки 0,5 м). Как пронести из коридора в комнату стол с ножками длины 1 м и столешницей 1 м × 1,5 м, если проход в комнату чуть у́же 1 м? Все двери распахиваются до конца.

Автор Максим Прасолов

Художник Ольга Демидова

ISSN 2227-7986 20001