№ 12| декабрь 2019

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ

КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 12
декабрь
2019

Задача об «ОЧЕНЬ БЫСТРОЙ СОБАКЕ»

ГЕНРИ КАВЕНДИШ: ТОТ, КТО ВЗВЕСИЛ ЗЕМЛЮ

МАГИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА

Enter

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 12, декабрь 2019 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор: С.А.Дориченко
Редакция: В.Г.Асташкина, Е.А.Котко, Р.В.Крутовский, И.А.Маховая, А.Ю.Перепечко, М.В.Прасолов
Художественный редактор и главный художник: Yustas
Вёрстка: Р.К.Шагеева, И.Х.Гумерова
Обложка: художник Yustas

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях связи Почты России:
- Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индексы **84252** и **80478**)
- Объединённый каталог «Пресса России» (индексы **11346** и **11348**)

Онлайн-подписка
на сайте агентства «Роспечать» **press.rosp.ru**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 5000 экз.
Подписано в печать: 05.11.2019
Отпечатано в типографии ООО «ТДДС-Столица-8»
Тел.: (495)363-48-84
http://capitalpress.ru
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+

СОДЕРЖАНИЕ

Лев Емельянов

Всем когда-нибудь бывает ужасно скучно. Случается это неожиданно и где угодно – дома, в транспорте, на уроке в школе... Как быть? Очень просто – решать задачки! Для такого случая есть особые задачи, вроде и не математические, но над ними хочется думать, отложив все дела, обсуждать с друзьями, а с трудом добравшись до ответа – снова сомневаться в правильности, фантазировать и... немного шалить. И уж тогда точно не бывает скучно! Хотите познакомиться с такой задачкой? Пожалуйста! Собирайте друзей, начинаем обсуждение...

ЗАДАЧА ОБ «ОЧЕНЬ БЫСТРОЙ СОБАКЕ»

Представьте себе, что вы гуляете по берегу моря с собакой. Берег простирается по прямой насколько хватает глаз. Тихий вечер, не омрачаемый ни штормом, ни даже бризом – можно считать, абсолютный штиль. Вокруг никого, кроме вас и вашей замечательной собаки, и собаки не простой, а «Очень Быстрой Собаки». Небольшой дискомфорт вносит лишь то, что ОБС убежала от вас, что естественно для неё, вам же хочется неспешно наслаждаться природой в компании со своим питомцем. Итак, ОБС трусит впереди, имея скорость, скажем, 1 м/с (для ОБС – сущие пустяки). Желая вернуть любимца, вы свистите в специально запасённый свисток, однако ОБС сегодня не только быстрая, но ещё и довольно своенравная: как услышит свисток, сразу увеличивает скорость вдвое. Вы свистите – она ускоряется до 2 м/с, вы настаиваете – она выдаёт 4 м/с, вы уже нервничаете – она резвится: 8 м/с. И тут неожиданный вопрос: «Сколько свистков услышит собака?»

Сначала наступает пауза, граничащая с оцепенением – в чём вопрос-то? Начинаются реплики:

«Собака так быстро бегать не умеет».

Вы парируете: «Она ведь Очень Быстрая Собака».

«А берег когда закончится?»

Вы: «Считайте его неограниченным в разумных пределах».

И вдруг следует догадка в виде несмелого вопроса:

«А чему равна скорость звука?»

Вот тут и открывается простор для дискуссии: «330 м/с».

«Ну тогда понятно».

Вы: «Давайте не торопиться. Посчитаем. Вначале скорость собаки 1 м/с, но вот 1-й свисток – скорость 2 м/с, 2-й свисток – 4 м/с, 3-й – 8 м/с, 4-й...»

«Понятно, там степени двойки, $2^8 = 256$ ещё не хватает, а $2^9 = 512$ уже больше скорости звука. Ответ: 9 свистков. Скучноватая какая-то задача!»

«А почему она 10-го свистка не услышит?»

«Да потому что бежит быстрее звука!»

«Верно. А что значит *быстрее* звука?»

«То и значит, что убегает от 10-го свистка».

«От 10-го то убегает, но *быстрее* ещё значит, что *догоняет*».

«...Вот это ДА! Значит, она будет догонять прежние свистки? Здорово!»

«Итак, какой же теперь ответ?»

«Ну теперь-то совсем понятно – ОБС соберёт обратно все 9, нет, 8 свистков. То есть ответ: 17 свистков. Красиво!»

«А как быть со скоростью?»

«Так она же ОЧЕНЬ БЫСТРАЯ, значит, проблем со скоростью у неё нет».

«Опять давайте не торопиться. Посчитаем. ОБС догоняет и слышит 8-й свисток, на котором номера не видно. Она считает его 10-м и увеличивает скорость до $2^{10} = 1024$ м/с, затем догоняет 7-й (11-й для неё) – скорость 2048 м/с = 2,048 км/с, далее следует 6-й (12-й по-собачьи), скорость 4,096 км/с, а потом 5-й (кажущийся 13-м), и ОБС разгонится до 8,192 км/с».

«Ну и зачем мы всё это считали?»

«А вам ничего не говорит скорость 8 км/с?»

«Ну, вы об этом, это первая космическая, и что?»

«А что? Где окажется ОБС, набрав первую космическую скорость?»

«Ну на орбите Земли, и что? Ей же всё равно, она всё может».

«А что она там услышит?»

«Ой,... ничего! Там же воздуха нет».

«То есть...»

«То есть после 13-го свистка, который она уже один раз слышала, но об этом не догадывается, она больше не услышит свистков. Значит, ответ: 13?»

«К счастью для Собаки, ДА. Услышав ещё свисток-другой, она умчалась бы прочь из Солнечной системы на поиски внеземных цивилизаций».

«И что, она, бедная, так и летает на орбите в безвоздушном пространстве?»

«Боюсь, что да. Но есть одна гипотеза во спасение этого, хоть и вредного, но очень неординарного существа».

«Она была вредная и не пошла на прогулку?»

«Нет. Есть такое явление, как *эффект Доплера*. Он состоит в том, что частота слышимого звука зависит от того, как движутся друг относительно друга ухо и источник звука. При их сближении частота увеличивается (звук становится выше), при удалении – уменьшается (звук слышится ниже). Его можно отчётливо наблюдать, точнее слышать, когда едете в поезде и слышите предупреждающий сигнал на переезде».

«Да, да, помню. Тогда я не понял, почему сигнал меняется, теперь понятно. А что Собаке-то от этого? Она ведь всё равно слышит, пусть не та частота».

«А вот над этим подумайте как-нибудь сами. Дело в том, что животные, как и человек, слышат звуки в определённом диапазоне. Что-то мы вообще не слышим, а они, эти звуки, есть. Например, летучие мыши слышат недоступные человеку частоты. Даже люди здесь отличаются чувствительностью слухового аппарата».

«И что?»

«Поищите, во спасение животного, информацию о её пределах слышимости и посчитайте по формуле эффекта Доплера частоту свистков на собачьих скоростях. Может, мы спасём её?»

Но в классе всегда найдётся КТО-ТО со своим особым мнением. Вот этот КТО-ТО вдруг говорит:

«А как она при такой скорости может не услышать следующий свисток?»

Вы робко пытаетесь возразить:

«Вышла на орбиту и не услышала».

«Ну она же не ракета – летит не вертикально, а свистки близко друг от друга и оставшиеся 4 свистка она «соберёт», не успев опомниться!»

Пауза.

«...Что сказать? В этом есть своя печальная логика! Значит, надежды на спасение ОБС разрушены и даже Доплер не помог. А скорость её действительно страшная – $2^{17} = 131{,}072$ км/с, там ведь уже скорость света виднеется! При такой-то скорости она долго будет жить из-за замедления времени, и это единственное, что утешает при мыслях о её нелёгкой судьбе».

Художник Алексей Вайнер

ВСЕ ХОТЯТ ЗАЧЁТ

На зачёт пришли 100 студентов. Преподаватель по очереди задаёт каждому студенту один вопрос: «Сколько из 100 студентов получат оценку «сдал» к концу зачёта?». В ответ студент называет целое число. Сразу после получения ответа преподаватель объявляет всем, какую оценку получил студент: «сдал» или «не сдал».

После того как все студенты получат оценку, придёт инспектор и проверит, есть ли студенты, которые дали правильный ответ, но получили оценку «не сдал». Если хотя бы один такой студент найдётся, то преподаватель будет отстранён от работы, а оценки всех студентов заменят на «сдал». В противном случае никаких изменений не произойдёт.

Могут ли студенты придумать стратегию, которая гарантирует им всем оценку «сдал»?

Задача VI Олимпиады мегаполисов
Автор Денис Афризонов

Художник Елена Цветаева

ГЕНРИ КАВЕНДИШ

Марина Молчанова

Генри Кавендиш
(Henry Cavendish)
1731–1810

Клэпхем – район Лондона, который в конце XVIII века ещё считался деревней. Двести с лишним лет назад там стоял малопримечательный дом, ныне разрушенный, про который соседи говорили своим детям: «Это дом, где был взвешен мир».

Да, именно в этом доме английский физик и химик Генри Кавендиш впервые определил плотность и массу Земли. Это было самое знаменитое его достижение, хотя далеко не единственное.

Внешняя сторона жизни Кавендиша исключительно бедна событиями. Родился в Ницце, учился в Кембридже, жил порой в Лондоне, порой рядом с ним. Ни подвигов, ни скандалов, ни трогательных или страшных эпизодов. И это связано с необычными особенностями его личности – настолько необычными, что даже учёный мир, привыкший к чудакам и оригиналам, смотрел на этого человека с изумлением.

Дело в том, что Кавендиш был болезненно застенчив и избегал людей. С внешним миром он старался общаться через своего помощника Чарльза Благдена и никогда не заводил ни близких друзей, ни семьи. Когда его знакомили с кем-то, он сильно нервничал. Даже в беседах со старыми знакомыми он при любом неосторожном слове замыкался в себе и старался удалиться. Однажды, гуляя в малолюдном районе и глубоко задумавшись, он встретил влюблённую парочку, обратившуюся к нему с каким-то вопросом. Кавендиш был так перепуган, что с тех пор гулял только вокруг дома. Единственным видом светского общения, который он признавал, были вечера в клубе Королевского общества: там его глубоко уважали и признавали за ним право на любые странности.

Вид Лондона в XVIII веке.

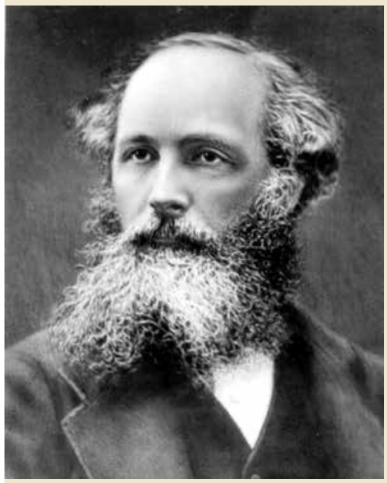
Женщины смущали его настолько, что даже со служанками в доме он общался с помощью записок, и поговаривали, что он специально попросил пристроить к своему дому лишнюю лестницу, чтобы при входе или выходе случайно не столкнуться с экономкой.

Кавендиш унаследовал огромное состояние и одно время считался богатейшим человеком Лондона. Французский физик Био называл его «самым богатым среди учёных и самым учёным среди богачей». Тем не менее Кавендиш одевался очень скромно и старомодно, а почти все комнаты его дома были заняты книгами и научными приборами (но была одна слабость: красивую мебель он всё-таки себе позволял). Он не хотел принимать никакого участия в своих финансовых делах, и когда банкир предложил ему вложить деньги в какое-нибудь предприятие, Кавендиш ответил: «Делайте что хотите, только меня этим не беспокойте, а то я найду другой банк». Однако его состояние не уменьшалось, и современники удивлялись: неужели он черпает деньги из бездонной бочки? Когда один коллега попросил его о небольшой помощи, Кавендиш выписал ему чек на десять тысяч фунтов – астрономическая сумма по тем временам! Возможно, это была даже не щедрость, а непонимание того, что такое «небольшая помощь».

Он был настолько удалён от треволнений окружающего мира, что ухитрился практически не заметить Великую французскую революцию и наполеоновские войны. Он не позировал художникам, и мы знаем портреты всей его родни, но не знаем его достоверных портретов – только один рисунок, где почти не различить лица.

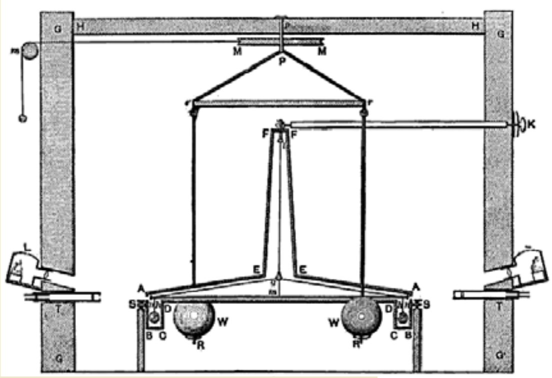
Кавендиш не только не мечтал о славе – он не признавал любой публичности, не печатал книг и почти не писал статей. Многие свои рукописи он не показывал даже коллегам, и о них стало известно через многие десятки лет, когда их оценил, собрал и опубликовал другой великий физик – Джеймс Максвелл. А часть рукописей была и вовсе уничтожена автором, и мы можем только догадываться об их содержании.

Дом Кавендиша



Джеймс Максвелл

ГЕНРИ КАВЕНДИШ



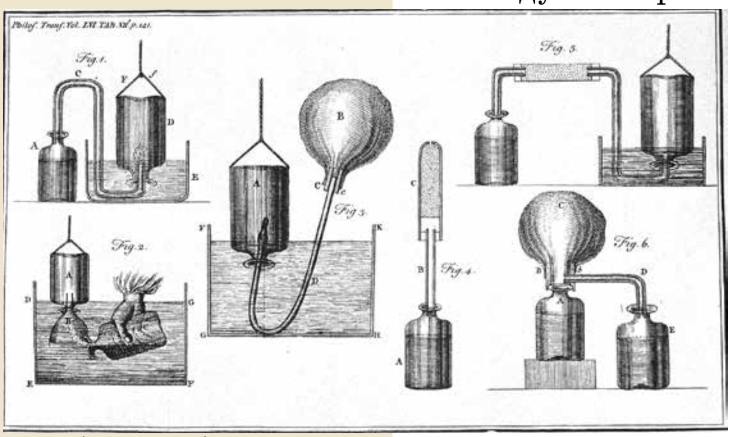
Вид экспериментальной установки. Рисунок Кавендиша, 1798 г.

Генри Кавендиш не оставил потомков; другие знаменитые Кавендиши (в том числе Уильям, основатель Кавендишской лаборатории, где потом в XX веке работало около тридцати нобелевских лауреатов) – его дальние родственники.

Биограф Кавендиша писал о нём: «В его натуре не было ничего искреннего, восторженного, героического или рыцарственного, но столь же мало было злого, холуйского или низкого. То, для понимания чего нужно было что-то большее, чем чистый интеллект, или требовались фантазия, воображение, привязанность, вера, было Кавендишу неприятно. Всё, что я вижу, читая его записки, – это умная голова для мышления, пара удивительно острых глаз для наблюдения и пара очень умелых рук для проведения опытов».

Действительно, болезненная робость Кавендиша пропадала за рабочим столом и в лаборатории. Здесь он ставил перед собой самые смелые и масштабные задачи – и блестяще их решал.

Поскольку Кавендиш не публиковал многие работы, а опубликованные статьи никак не продвигал, только через много лет стало понятно, что именно ему принадлежит приоритет ряда открытий. Он фактически открыл закон Кулона (сила взаимодействия между электрическими зарядами в зависимости от расстояния между ними) за 14 лет до Кулона, закон Ома за десятки лет до Ома, а также ещё многие законы, касающиеся электричества и тепла. Он обнаружил существование инертных газов (точнее, наличие в воздухе важных компонентов помимо азота и кислорода) за сто лет до Рэлея и Рамзая. Он не был первооткрывателем водорода, но успешно исследовал его и другие газы. Великий Хемфри Дэви



Аппарат Кавендиша для получения водорода.

позднее писал о химических опытах Кавендиша: «Хотя многие из них были проведены лишь в пору младенчества химической науки, их точность и красота не потускнели по сей день».

Но всё-таки самое известное достижение Кавендиша – измерение плотности Земли в 1797–1798 годах. Об этом стоит рассказать подробнее.

ГЛАВНЫЙ ОПЫТ КАВЕНДИША

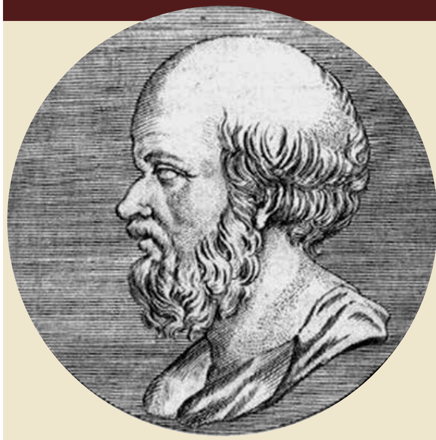
Учёных с давних пор интересовали размеры Земли. Оценить радиус Земли (считая её шаром) не так уж сложно: это проделал ещё Эратосфен в III веке до нашей эры. В день летнего солнцестояния, в тот момент, когда в городе Сиене (ныне Асуан) лучи Солнца падали на Землю отвесно, в городе Александрии точно к северу от Сиены их направление уже не было отвесным: солнечные часы отбрасывали тень. Поняв, под каким углом падают лучи в Александрии – а это можно сделать, узнав отношение длины тени от солнечных часов к их высоте, – и зная расстояние между Александрией и Сиеной, Эратосфен, решив простую геометрическую задачу, узнал радиус Земли (рис. 1). Позднее другие измерили его точнее: $R \approx 6370$ км.

А вот как узнать массу Земли? Долгое время эта задача казалась неразрешимой. Теоретическая возможность подступиться к ней возникла, когда Ньютон открыл закон всемирного тяготения: ведь не только Земля и небесные тела притягивают к себе разные объекты, но и вообще все предметы в мире притягиваются друг к другу. Сила тяготения между ними вычисляется (в современной записи) как

$$F = G\frac{m_1 m_2}{R^2},$$

где m_1 и m_2 – массы первого и второго тела, R – расстояние между их центрами, а G – некое число, которое называется *гравитационной постоянной*.

Мы знаем, с какой силой F тело определенной массы m_1 притягивается к Земле. Мы знаем расстояние между их центрами – это радиус Земли R. Но во времена Ньютона были неизвестны ни постоянная



Эратосфен

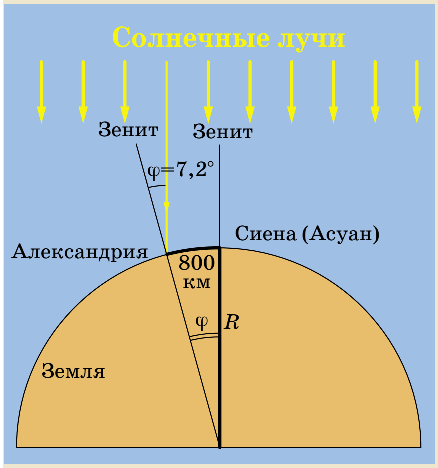


Рис. 1. Определение радиуса Земли

Исаак Ньютон

ГЕНРИ КАВЕНДИШ

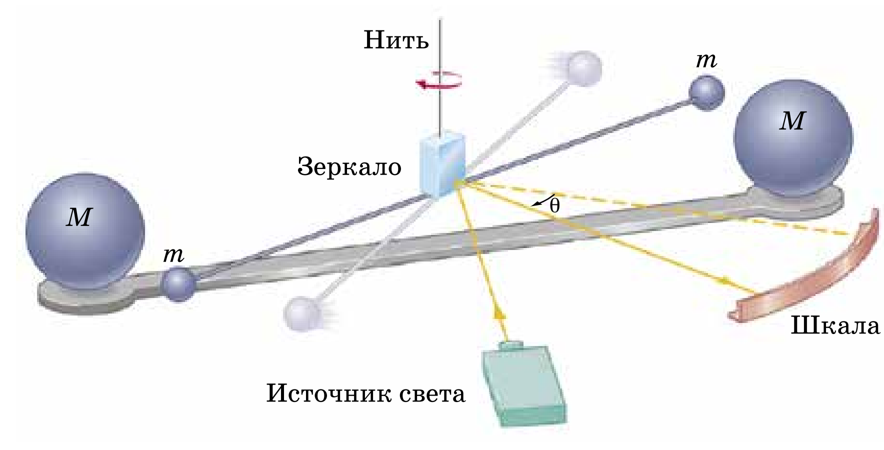
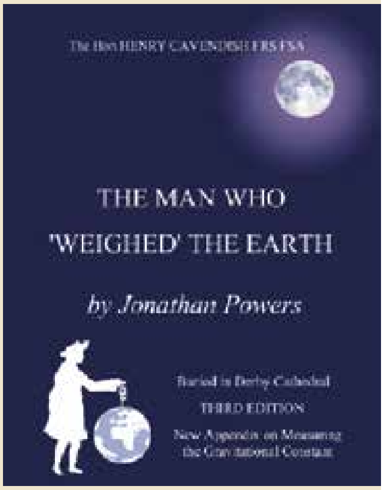


Рис. 2. Схема прибора для опыта Кавендиша



Книга «Experiments to Determine the Density of Earth»

G, ни масса Земли m_2, и не было способа их найти. Вот если бы мы могли измерить силу притяжения между двумя известными массами (и сравнить с силой притяжения к Земле), было бы совсем другое дело... Но измерить трудно: ведь притяжение между любыми предметами разумных размеров, которые может сконструировать человек, будет очень слабым.

В 80-е годы XVIII века прибор для измерения этой силы попытался создать английский геолог Джон Мичелл. Но он умер, не завершив работу. И позднее Кавендиш построил свой прибор по аналогии с аппаратом Мичелла и провёл свои знаменитые измерения (рис. 2).

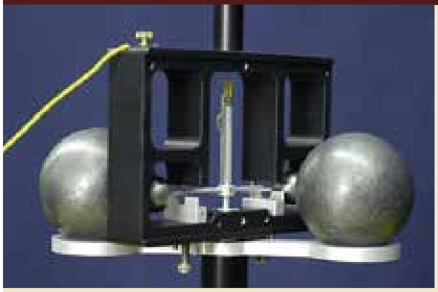
Основа установки Кавендиша – крутильные весы. На длинной металлической нити было закреплено коромысло с двумя одинаковыми свинцовыми шарами – примерно по 730 граммов. К каждому из них подводился на одной высоте с ним тяжёлый шар (около 150 кг), также из свинца. И тогда коромысло поворачивалось на небольшой угол! Этот угол определяется, с одной стороны, силой притяжения между шарами, с другой стороны – упругостью нити. Поскольку упругость нити можно было измерить (для этого удаляли большие шары и смотрели, как колеблется коромысло вокруг нити), сила притяжения между шарами тоже легко вычислялась.

Но не так всё просто. Кавендиш не использовал ту удобную терминологию и систему обозначений, которую мы применяем сейчас. Свою задачу Кавендиш формулировал даже не как «измерение массы Земли», а как «измерение плотности Земли». Кстати, его результаты были удивительно точными: средняя плотность Земли получилась примерно в 5,48 раз больше плотности воды (современная цифра – около 5,51 г/см^3), и измерения лучшего качества удалось провести только через сто лет. Даже сейчас для этого нужны установки примерно того же типа, а высокая точность остаётся проблемой.

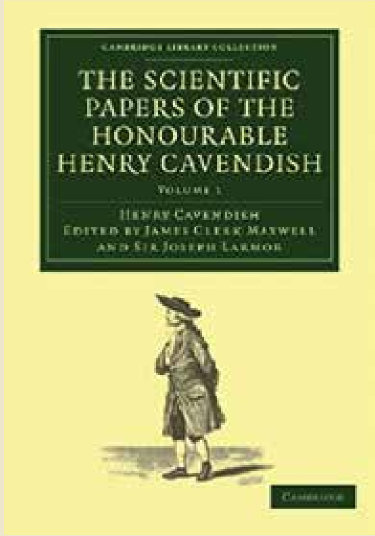
Почему остаётся проблемой? Потому что при фиксации таких небольших сил очень трудно избавиться от случайных помех. Кавендиш приложил максимум стараний. Его установка была помещена в деревянный ящик, чтобы на неё не влияли потоки воздуха и перепады температуры. Наблюдатель смотрел на происходящее в телескоп через дырки в стенках ящика. Большие шары с помощью специального механизма подводились к малым то с одной, то с другой стороны, чтобы получить нужный результат даже для случая, когда здание или установка чуть-чуть наклонены по отношению к горизонтали. Эксперимент был повторен десятки раз. Словом, нужна была исключительная добросовестность, и недаром этот опыт Кавендиша считался образцовым.

Что же люди узнали из опыта Кавендиша? Во-первых, стало ясно, что именно в глубинах Земли сосредоточены тяжёлые вещества: ведь плотность поверхностных слоёв нашей планеты гораздо ниже, чем 5,5 г/см^3. И это отлично согласуется с современными представлениями о ядре Земли, состоящем в основном из железа и никеля. Во-вторых, зная плотность Земли и объём (напомним, что объём шара радиуса R вычисляется как $\frac{4}{3}\pi R^3$), мы знаем и массу Земли. А в XIX веке, когда запись Закона всемирного тяготения приобрела современную форму, была вычислена и постоянная G. Теперь мы можем подсчитать силу притяжения между любыми двумя объектами.

Кавендиш был бы сильно удивлён, узнав, что о нём когда-нибудь будут писать в журнале для детей и что описание его опыта войдёт во все учебники по физике. Но сложилось именно так.



Современная модель прибора Кавендиша. Фото Clive Grainger



Собор Всех Святых в Дерби. Здесь могила Кавендиша

Михаил Евдокимов

МАГИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА

Основано на реальных событиях.

Лёва усердно пытался решить задачи математического кружка, но задачи не поддавались. Пришлось просить помощи у отца.

– Ну, что вам тут задали? – спросил Олег Сергеевич. Он окончил мехмат МГУ и ему всё ещё казалось, что он с лёгкостью решит любую задачу... Уж за шестой-то класс точно!

– Вот, – Лёва протянул листок с условием, – тут три задачи. Учитель сказал, что это одна и та же задача, но я не понимаю, почему??? Мне они кажутся абсолютно разными!

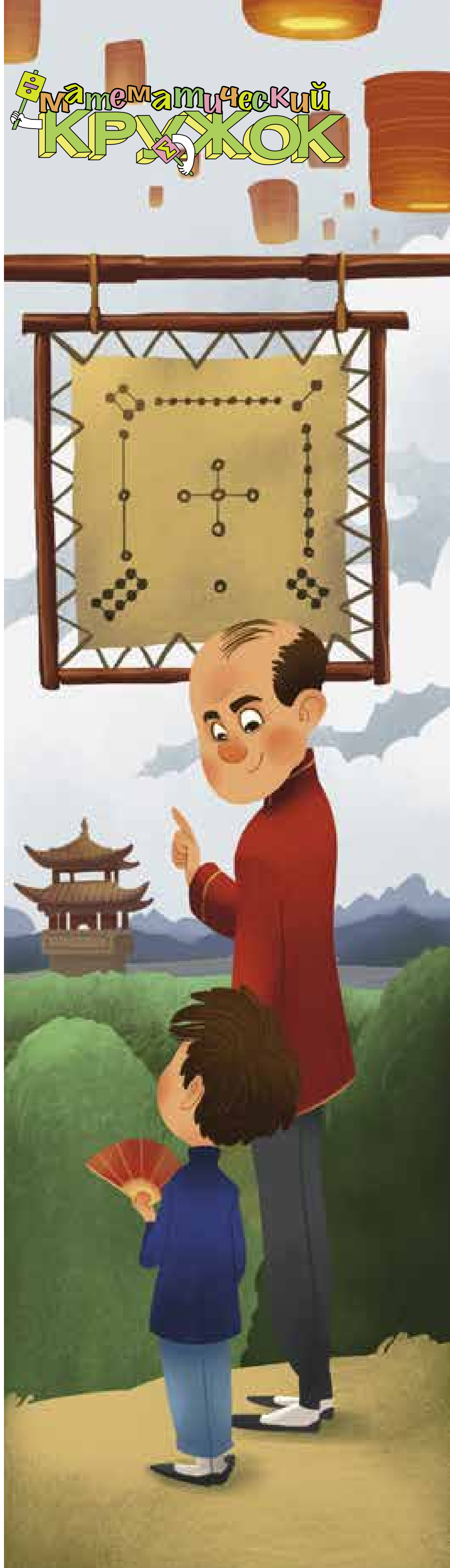
1. Имеется 9 слитков золота с маркировкой 100 г, 200 г, 300 г, 400 г, 500 г, 600 г, 700 г, 800 г, 900 г. Известно, что вес ровно одного слитка меньше заявленного. Как найти этот слиток на двухчашечных весах без гирь за два взвешивания?

2. Есть 9 борцов разной силы. В поединке любых двух всегда побеждает сильнейший. Можно ли разбить их на три команды по три борца так, чтобы во встречах команд по системе «каждый с каждым» первая команда по числу побед одержала верх над второй, вторая – над третьей, а третья – над первой?

3. В клетки таблицы 3×3 впишите различные натуральные числа так, чтобы произведения чисел в каждой строке, каждом столбце и на каждой из двух главных диагоналей были одинаковы.

– Хм, мне тоже так кажется... – Олег Сергеевич провёл рукой по некогда пышной шевелюре и задумался. – Если бы в третьей задаче речь шла не о произведениях, а о суммах, то её было бы легко решить. В математике это называется *магическим квадратом*. Магический квадрат 3×3, в котором записаны целые числа от 1 до 9, знали ещё в Древнем Китае более чем за 2000 лет до нашей эры! А ты сможешь заполнить клетки таблицы 3×3 числами от 1 до 9, чтобы суммы чисел в каждом столбце, каждой строке и на каждой из двух диагоналей были одинаковы?

– Папа, ты вместо того, чтобы помочь, задаёшь мне четвёртую задачу!? – возмутился Лёва.



– Подожди, возможно это необходимо… Давай решим её вместе! Какие у тебя идеи?

– Ну, чисел всего 9. Значит, можно попробовать перебрать варианты… – нерешительно произнёс Лёва.

– Не торопись. Смотри, в первую клетку таблицы можно записать целое число от 1 до 9, это 9 способов. В следующую выбираем уже из оставшихся, то есть 8-ю способами, и т. д. Получается, что всего способов $9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$. Мой смартфон показывает, что это число (математики его называют «9 факториал» и обозначают 9!) равно 362 880. Даже если проверять по таблице в секунду, на всю проверку уйдёт около 100 часов изнурительного однообразного труда. В общем, до следующего кружка не успеешь. Перебор можно подсократить за счёт одинаковых таблиц (отличающихся только поворотом или отражением), но это не тот путь, которым бы я советовал идти…

– Что же делать??? – перебил Лёва

– Думай! Знаем ли мы что-то про такую таблицу?

– Ну, знаем, что в ней все числа от 1 до 9, но не знаем, как они там переставлены…. Ага, понял! Мы можем сказать, чему равна сумма чисел в строке или столбце. Так как общая сумма $1+2+3+\ldots+9$ равна 45, всего в таблице 3 столбца и в каждом сумма одинакова, то эта сумма должна равняться $45:3=15$.

– Отлично! А можешь теперь сказать, какое число должно стоять в центре и почему?

Читатель, а ты сможешь ответить на этот вопрос?

– Не знаю…

– Ну, давай подумаем вместе, – Олег Сергеевич нарисовал на листе квадрат и 4 стрелки. – Просуммируем числа в таблице по четырём направлениям, показанным стрелками на рисунке 1. По условию, должно получиться 4 раза по 15, то есть в сумме 60. С другой стороны, в общую сумму войдут все числа таблицы по одному разу, кроме центрального числа (обозначим его через x), оно войдёт 4 раза вместо одного. Но сумму всех чисел в таблице мы уже знаем, она равна 45. Получаем, что $60=45+3x$. Значит, $x=5$. То есть в центре может стоять только 5.

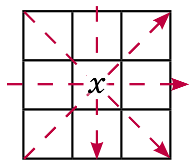


Рис. 1

– Здо́рово! Выходит, мы можем сильно сократить перебор? – спросил Лёва.

– Всё ещё проще. Поставим куда-нибудь девятку. Например, так (рис. 2).

9	5	?

Рис. 2

Тогда вместо знака «?» стоит 1, ведь сумма чисел строки равна 15. Если в последнем столбце (там, где 1) не стоит 8, то сумма чисел в нём не больше $1+7+6<$ <15, а должна быть равна 15. Итак, 8 стоит в одной из крайних клеток третьего столбца. Например, так (рис. 3).

		8
9	5	1

Рис. 3

Теперь вся таблица восстанавливается из того, что сумма чисел каждой строки, столбца или диагонали равна 15. Вот этот процесс по шагам (рис. 4).

		8
9	5	1

→

		8
9	5	1
		6

→

4		8
9	5	1
		6

→

4	3	8
9	5	1
2		6

→

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Рис. 4

Легко проверить, что такая таблица подходит.

– Но какая связь с нашими тремя задачами!?? Мы же просто решили задачу, которую нам не задавали! – казалось, что Лёва был расстроен.

– Видимо, связь всё же есть! Давай начнём с третьей задачи. Условие того, что произведения чисел равны, легко заменить на условие, что суммы равны. Для этого просто берём, например, степени двойки: 2^1, 2^2, 2^3, ... Ведь при произведении двух степеней их показатели складываются: $2^x \cdot 2^y = 2^{(x+y)}$.

Поэтому, заменив каждое число магического квадрата на двойку в степени, равной этому числу, мы получим искомую таблицу (рис. 5). Задача решена!

2^4	2^3	2^8
2^9	2^5	2^1
2^2	2^7	2^6

=

16	8	256
512	32	2
4	128	64

Рис. 5

– Хорошо, но третья задача хотя бы тоже про таблицу. А как связать это с первой задачей?

– В ней же тоже есть набор из 9 чисел: от 100 до 900 с одинаковым шагом 100. Давай запишем их в виде магического квадрата с одинаковой суммой

400	300	800
900	500	100
200	700	600

Рис. 6

по строкам и столбцам, просто дописав нули к числам построенного магического квадрата (рис. 6).

Положим на первую чашку весов слитки, соответствующие числам первой строки, а на вторую – слитки, соответствующие числам второй строки (рис. 7). Если одна из чашек перевесила, то мы знаем набор из трёх слитков, в котором более лёгкий слиток. Если же весы в равновесии, то более лёгкий слиток в наборе последней строки. В любом случае, после первого взвешивания мы знаем строку таблицы, в наборе которой есть более лёгкий слиток.

400	300	800
900	500	100
200	700	600

Рис. 7

Далее кладём на первую чашку весов слитки, соответствующие числам первого столбца, а на вторую чашку – слитки, соответствующие числам второго (рис. 8). Аналогично, находим столбец с наиболее лёгким слитком, и сам этот слиток – он на пересечении найденных строки и столбца!

400	300	800
900	500	100
200	700	600

Рис. 8

– Красиво! А как быть с борцами? Там же вообще нет никаких чисел!

– Нет, значит их нужно ввести, – спокойно ответил Олег Сергеевич. Он только что понял, как нужно решать эту задачу. – Итак, у нас 9 борцов. Обозначим их силу числами от 1 до 9. Давай снова посмотрим на магический квадрат и отметим борцов, которые входят в наши команды (рис. 9).

Команды

3-я	4	3	8
2-я	9	5	1
1-я	2	7	6

Рис. 9

Во встрече любых двух команд всего будет 9 поединков (можно образовать $3 \times 3 = 9$ разных пар соперников). Первая команда выиграет у второй со счётом 5:4, так как $2 > 1$, $7 > 5$, $7 > 1$, $6 > 5$, $6 > 1$ (всего 5 побед из 9). Вторая команда выиграет у третьей со счётом 5 : 4, так как $9 > 4$, $9 > 3$, $9 > 8$, $5 > 4$, $5 > 3$. И третья команда выиграет у первой со счётом 5 : 4, так как $4 > 2$, $3 > 2$, $8 > 2$, $8 > 7$, $8 > 6$. Вот мы и разбили борцов на три команды как требовалось!

– Просто магия какая-то! – удивился Лёва.

– А математика это и есть магия, – загадочно улыбнулся Олег Сергеевич.

Художник Мария Усеинова

Ольга Кузнецова

ВОРЫ НА СЛОВАХ

– Хорошенькое дело, – возмутилась Саша, – ну и кто у нас украл весь сахар-рафинад?

– И вовсе не украл, – обиделся Миша, – а взял для эксперимента. Мне мама разрешила.

– Всю сахарницу?!

– Почти. И всё равно неправильно говорить, что я украл. *Украсть* – значит взять *украдкой*. *Прокрасться* в кухню, бесшумно влезть на табуретку...

– Всё понятно, – усмехнулась Саша, – не пойман – не вор.

– Ты хоть знаешь, что означает слово *вор*? Изначально так называли разных злодеев, врунов и обманщиков. Лжедмитрия, например, прозвали «Тушинский вор» ещё и потому, что он выдавал себя за другого человека. А я тебе всё прямо сказал. Мне для науки.

– Получается, *врать* и *воровать* – родственные слова, – задумалась Саша, – а как же тебя тогда назвать, если мне не с чем чай пить? Разбойником, что ли?

– Опять мимо! – веселился Миша, – *Разбойник* связан со словом *разбить*. Он нападает на купеческий корабль, вступает в *бой* с охраной и *разбивает* противника. А я даже сахарницу не разбил – вот она, целёхонькая стоит.

– Целёхонькая, а что толку. Ни одного кусочка не осталось, грабёж.

– Что ты такое говоришь. *Грабитель* – тот, кто *загребает*. А я аккуратно брал, по одному.

– Хапуга. Брал по одному, но в итоге всё себе захапал.

– Подумай сама: *хапать* – это опять хватать помногу, *охапкой*. Слова меняют свои значения, так что ты уж постарайся, придумай что-нибудь поточнее.

– Как же раньше называли людей, которые возмутительным образом что-то забирают?

– Например, *тать*.

– Сейчас и слова-то такого нет, – удивилась Саша.

– Можно ещё сказать *татище*, если он большой ворюга. Слышала про историка Татищева? Он был настоящий учёный, но его фамилия происходит как раз от этого слова.

– Ну, он же не виноват. В отличие от некоторых мошенников.

– Я в твой карман не залезал, – возразил Миша.

– Так я же тебя не карманником назвала, а мошенником. Морочишь мне голову всякими историями, а чай от этого слаще не станет.

– *Мошенник* происходит от слова *мошна* – мешочек для хранения денег. Так что слова *мошенник* и *карманник* устроены похоже. Нечего на меня зря говорить, оставь свои плутни.

– Восхитительно! Я без сахара осталась, я же ещё и плутую.

– Конечно. Ты всё путаешь, смешиваешь – сама *заплутала* в словах. Лично мне больше нравится слово пройдоха.

– Это тот, кто *пройдёт* везде? – догадалась Саша, – Похоже на правду. Могу добавить к нему слово *проныра*.

– Верно, это тоже ловкач, который всюду пронырнёт. Но не всегда на пользу другим.

Миша нырнул под стол и появился с шоколадкой в руках:

– На, это тебе к чаю.

– Ну и фокус! Спасибо, – обрадовалась Саша, – тогда будем вместе чай пить. А как ты думаешь, существуют слова, которые раньше были связаны с присваиванием чужого, но сейчас используются в другом смысле?

– Одно из них ты сама минуту назад сказала.

Какое из произнесённых Сашей слов связано с захватом чужого?

Художник Ольга Демидова

Математический кружок

Квадраты на клетчатой бумаге

Егор Бакаев

В «Квантике» №7 за этот год речь шла о треугольниках и других многоугольниках на клетчатой бумаге. Теперь мы отдельно рассмотрим квадраты и их площадь. Начнём с четырёх задач для самостоятельного решения (ответы см. в конце журнала).

1. На рисунке 1 отмечено 12 точек. Какие квадраты с вершинами в указанных точках можно нарисовать? Постарайтесь найти все 11 квадратов!

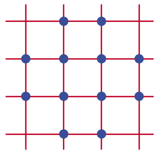


Рис. 1

2. Клетчатая плоскость, знакомая всем по школьной тетради, состоит из квадратных клеток. Вершины этих клеток также называют *узлами сетки*. Как вы думаете, почему?

Какие квадраты можно нарисовать с вершинами в узлах сетки? Например, те, у которых площадь – квадрат целого числа (1, 4, 9, 16, 25 клеток и т.д.): просто проводя стороны по линиям. А если проводить стороны не по сетке, как, например, в следующей задаче?

3. Нарисуйте на клетчатом листе квадрат с вершинами в узлах сетки и площадью а) 2; б) 5; в) 13 клеток.

Чтобы найти площадь фигуры, полезно бывает разрезать её по линиям сетки на прямоугольники и прямоугольные треугольники. Чтобы потом проще было догадаться, как в общем виде выражать площадь квадрата, предлагаем сначала придумать такие разрезания на конкретных примерах:

4. Составьте квадрат из четырёх прямоугольных треугольников с катетами 2 и 3 и ...

а) ... квадрата площади 1;

б) ... квадрата площади 13;

в) ... двух квадратов, площади которых 4 и 9.

Указание. Квадрат какой площади должен получиться?

В предыдущих задачах мы не заостряли внимания на том, почему эти фигуры действительно квадраты. Теперь мы обсудим это подробнее.

5. Нарисуйте квадрат со стороной, изображённой на рис. 2, *а*, и найдите его площадь.

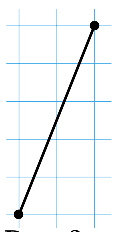


Рис. 2, *а*

Решение. Для начала вспомним, что такое квадрат. Это четырёхугольник, у которого все стороны равны и все углы прямые. Значит, нужно провести сторону, равную и перпендикулярную данной. Для этого возьмём прямоугольник, для которого данный отрезок AB служит диагональю и повернём на 90° вокруг точки B (рис. 2, *б*). При этом повороте вся сетка перейдёт в себя (вертикальные линии – в горизонтальные, и наоборот). Значит, и узел A перейдёт в какой-то узел C. (Можно это объяснить и по-другому, рассмотрев равные прямоугольные треугольники.) Итак, построена ещё одна вершина квадрата.

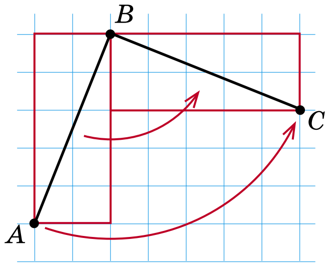


Рис. 2, *б*

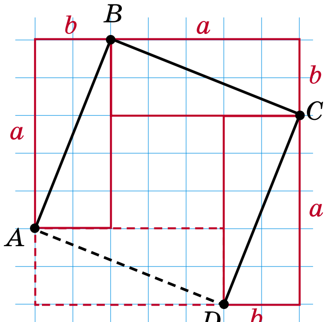


Рис. 2, *в*

Повторив эту процедуру для отрезка BC, получим четвёртую вершину D (рис. 2, *в*). Длины сторон прямоугольника с диагональю AB обозначим как a и b. Заметим, что вся эта конструкция вписывается в квадрат со стороной $a+b$. Тогда видно, что между A и D помещается ещё один прямоугольник, равный трём уже имеющимся. Значит, AD получается из CD поворотом на 90°, так что все стороны и углы $ABCD$ равны, то есть это квадрат. Эти рассуждения можно провести для любых a и b, а не только равных 5 и 2.

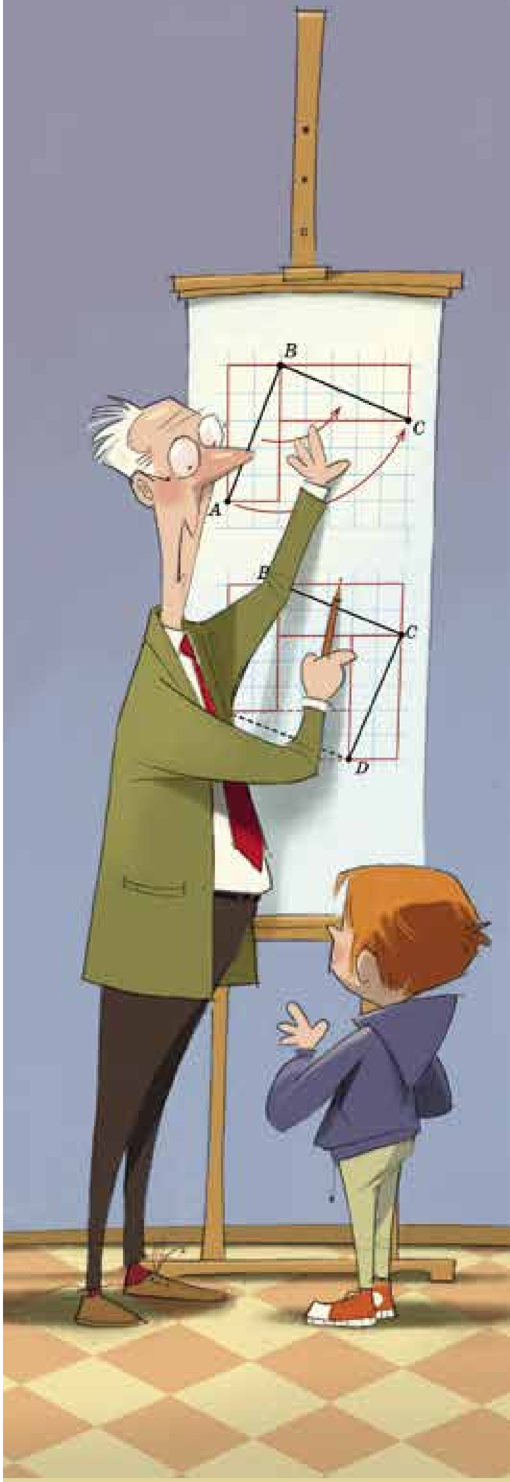
Теперь найдём площадь $ABCD$. Из той же конструкции видно, что чтобы дополнить $ABCD$ до квадрата площади $(a+b)^2$, надо добавить к нему 4 равных прямоугольных треугольника, каждый площади $\frac{ab}{2}$. Значит, площадь $ABCD$ равна $(a+b)^2-2ab$. Подставив конкретные стороны прямоугольника ($a=5$, $b=2$), получим, что площадь $ABCD$ равна 29.

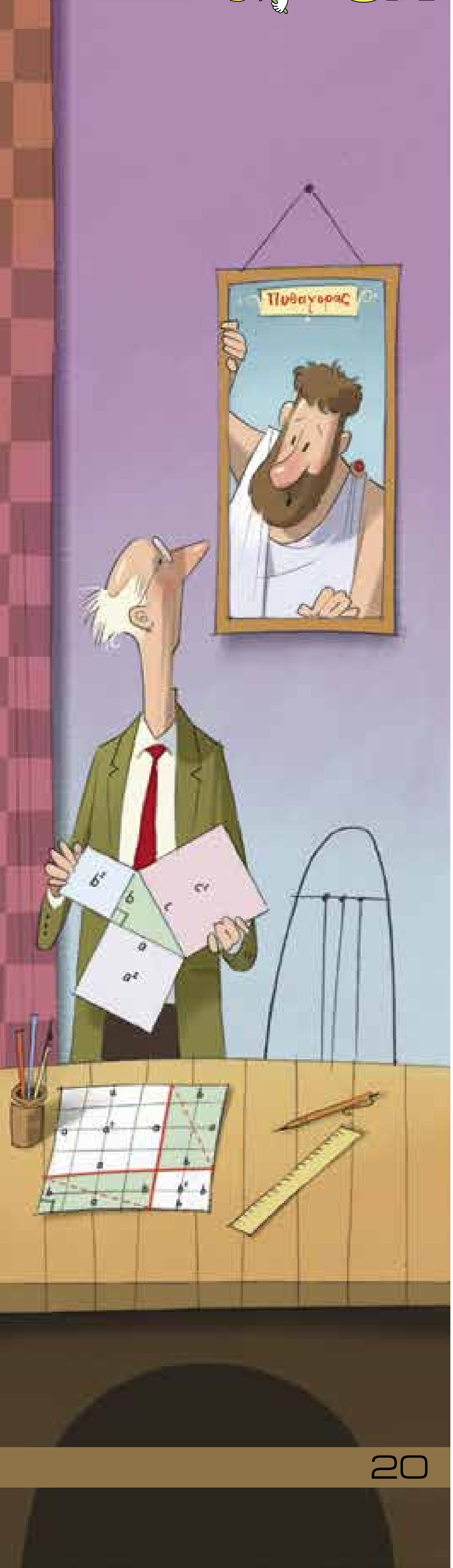
Мы научились находить площадь квадрата с данной стороной. Это помогает сравнивать длины отрезков:

6. а) Какой из двух отрезков на рисунке 3 длиннее?

б) Нарисуйте отрезок с вершинами в узлах сетки, который короче одного из них и длиннее другого.


Рис. 3





Решение. а) Можно построить квадраты с такими сторонами и найти их площади. Нарисуйте их и убедитесь, что они будут равны 34 и 37. Чем больше сторона квадрата, тем больше его площадь. Значит, правый отрезок длиннее. Можно найти его длину a: раз площадь квадрата равна 37, то $a^2=37$, то есть $a=\sqrt{37}$. Над пунктом б) предлагаем подумать самостоятельно.

Находить длины таких отрезков, не рисуя квадраты, позволяет теорема Пифагора:

7. *Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах.* Иными словами, *в прямоугольном треугольнике с катетами a и b и гипотенузой c выполняется равенство* $a^2+b^2=c^2$ (рис. 4, *а*).

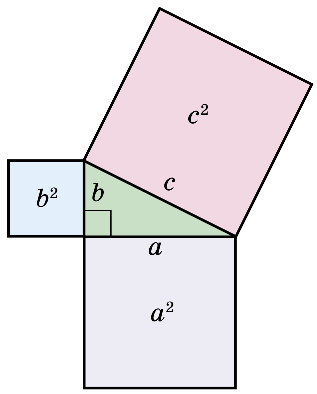


Рис. 4, *а*

Доказательство. Достроим данный треугольник до прямоугольника и повторим построения из решения задачи 5 (рис. 4, *б*). Получим квадрат со стороной $a+b$, в который вписан квадрат со стороной c. Как и в задаче 5, площадь квадрата со стороной c можно вычислить по формуле $(a+b)^2-2ab$. Раскроем скобки: $a^2+2ab+b^2-2ab=a^2+b^2$. Таким образом, формула $a^2+b^2=c^2$ доказана!

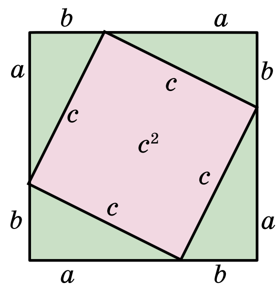


Рис. 4, *б*

Заметим, что формулу раскрытия скобок $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ можно доказать графически, тоже с помощью площади (рис. 4, *в*). Это даёт доказательство теоремы Пифагора без формул, просто сопоставлением двух рисунков 4, *б* и 4, *в*: на них показаны два способа собрать квадрат со стороной $a+b$ из разных деталей.

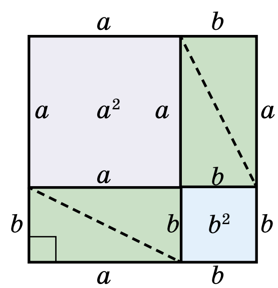


Рис. 4, *в*

Покажем, как решается задача 6 с помощью теоремы Пифагора. Правый отрезок – это гипотенуза c прямоугольного треугольника с катетами $a=6$ и $b=1$. Тогда $c^2=a^2+b^2=36+1=37$, откуда $c=\sqrt{37}$.

По ходу решения задач этой статьи мы нарисовали квадраты с площадями 1, 2, 5, 10, 13, 37, ... Вообще, при каких n квадраты площади n можно нарисовать с вершинами в узлах сетки, а при каких нельзя? Например, нельзя при n, равных 3, 6, 7, 11, 12 – это можно доказать с помощью теоремы Пифагора перебором длин катетов. Но перебором не получится показать, как устроены *все* такие n... Это вопрос сложный, ответ на него даёт теорема Ферма–Эйлера.[1]

Подумайте самостоятельно над такими задачами:

8. Из квадрата 11×11 легко вырезать квадрат площади 100 с вершинами в узлах сетки. Как вырезать из него квадрат площади 101 с вершинами в узлах?

9. Нарисуйте пять различных прямоугольников площади 10 с вершинами в узлах сетки.

10. У Вики есть четыре фигурки, у Алины – квадрат, а у Полины – квадрат другого размера. Объединившись, Алина и Вика могут сложить квадрат, используя все свои пять фигурок. Может ли оказаться, что Полина и Вика также смогут сложить квадрат, используя все свои пять фигурок? (Квадраты складываются без просветов и наложений.)

11. Вершины треугольника на рисунке 5 находятся в центрах клеток. Найдите его углы.

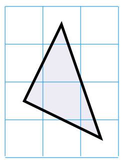


Рис. 5

12. Крест на рисунке 6 разрежьте:

а) на пять частей, из которых можно сложить квадрат;

б) на четыре части, из которых можно сложить квадрат.

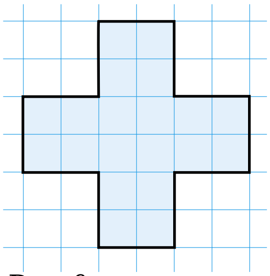


Рис. 6

13. Даны числа a и b одинаковой чётности. Докажите, что существует квадрат площади $\frac{a^2+b^2}{2}$ с вершинами в узлах сетки.

Замечание. В конце номера приведены три идеи, помогающие решить эту задачу. Так что можно не останавливаться, придумав одну!

[1]Её формулировку и доказательство можно прочитать, например, в «Кванте» № 3 за 1999 год, см. сайт kvant.ras.ru

Художник Алексей Вайнер

Сергей Федин

Три шахматные головоломки

Семь шагов короля

Придумайте позицию на шахматной доске, для которой белые начинают и дают мат в семь ходов, не повторяясь и делая ходы только королём.

Все на одного!

Придумайте позицию на шахматной доске, в которой у белых полный комплект фигур и пешек, а у чёрных – только король, но, несмотря на это чудовищное преимущество, белые не могут выиграть.

Ищи «вторую половинку»

В 1982 году Шахматная федерация Федеративной республики Германии после многочисленных попыток добилась от Министерства финансов признания шахмат «полезным видом спорта, имеющим воспитательное значение», что позволило федерации получить налоговые льготы. Решающим аргументом стала цитата из письма прусского короля Фридриха Великого: «Шахматы воспитывают склонность к самостоятельному мышлению...» Конец этой фразы, который федерация предпочла не приводить, гласит: «.., а потому...»

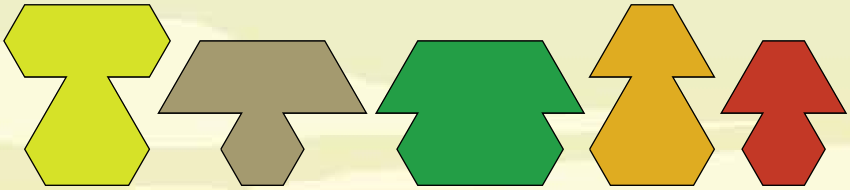
Допишите эту фразу за Фридриха Великого!

Художник Евгений Паненко

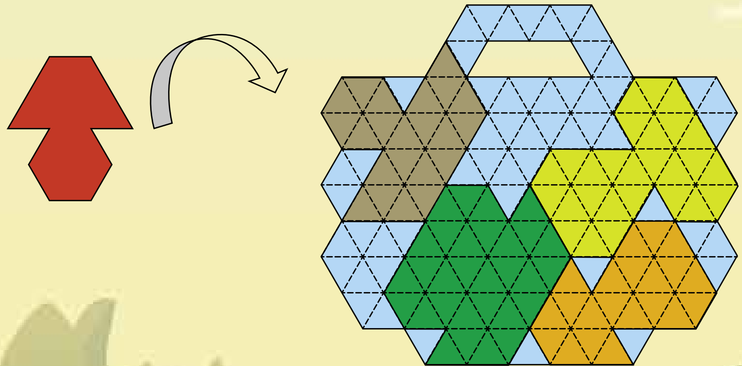
Корзина грибов

Владимир Красноухов

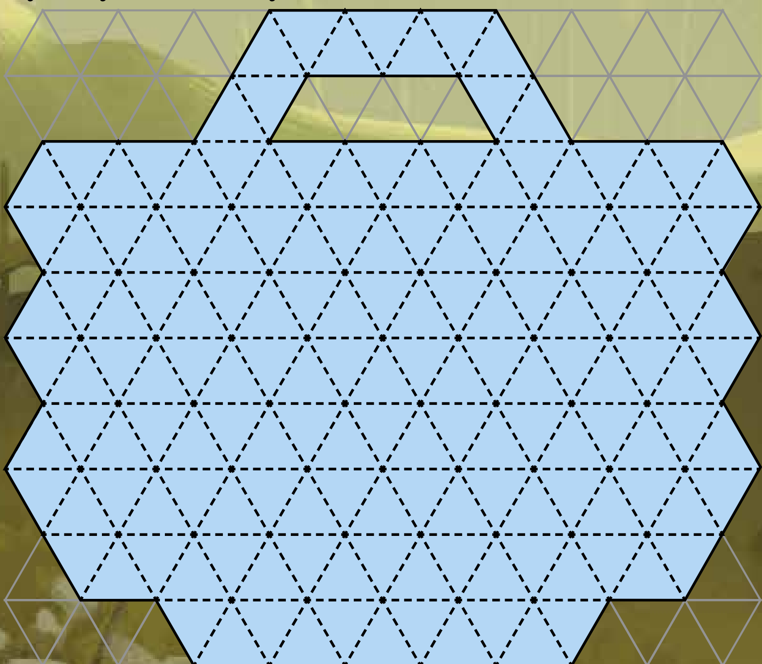
Набрал я в лесу грибов. Попытался сложить их в корзину...

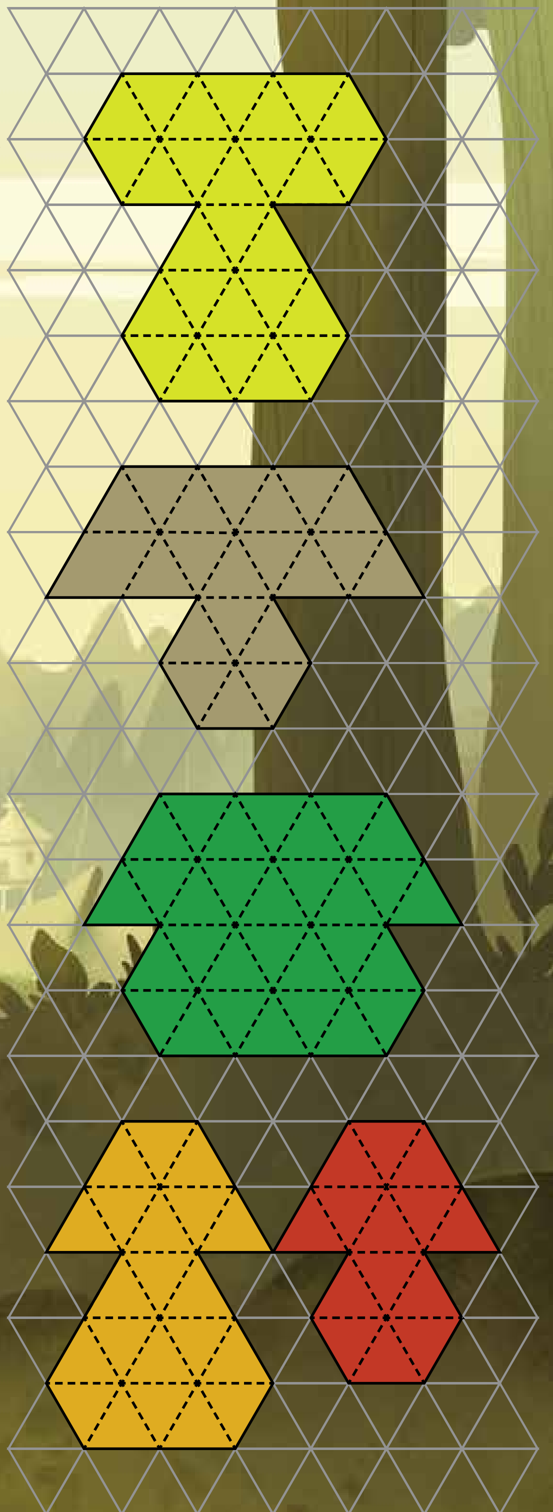


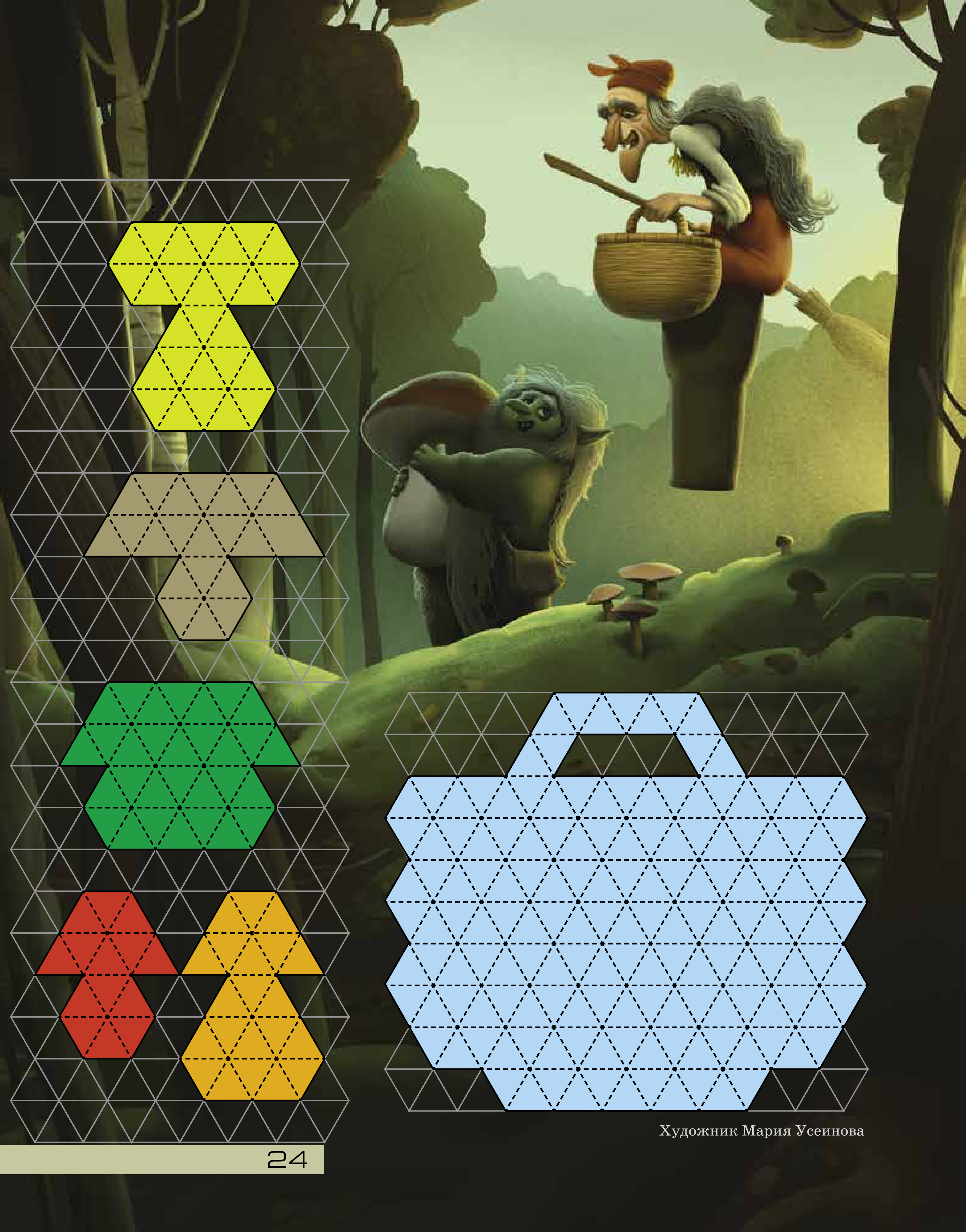
Но вот последний гриб пока не помещается...



Помогите справиться с задачей, чтобы за пределы корзины (синий цвет на рисунке) ничего не вылезало! Грибы можно вырезать из журнала или скопировать на бумагу. Желаем успеха!







Художник Мария Усеинова

XIV Южный математический турнир

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ

Материал подготовили: Дауд Мамий и составители лиги «Старт» Сергей Волчёнков, Заур Датхужев, Олег Дмитриев, Сергей Дориченко, Дмитрий Кузнецов, Аркадий Скоркин

Турнир проводится Кавказским математическим центром Адыгейского госуниверситета и Адыгейской республиканской естественно-математической школой каждый сентябрь во Всероссийском детском центре «Орлёнок». В XIV Турнире участвовали 250 школьников с 7 по 11 класс. Приводим избранные задачи лиги «Старт» (полный отчёт тут: **adygmath.ru**).

Графы

1. (*С. Волчёнков*) а) В стране некоторые пары городов соединены дорогами. Оказалось, что есть круговые маршруты (без повторяющихся городов) из 3, 4, 5, 6, 7 и 8 дорог. Какое наименьшее количество дорог может быть в стране? б) А если есть ещё круговые маршруты из 9 и 10 дорог?

2. (*С. Волчёнков*) На контурную карту нанесены 10 городов (без названий) и дороги между некоторыми из них. Незнайке задали нанести на карту названия городов, но выдали лишь список пар городов, напрямую соединенных дорогой. По его словам, этого хватило, чтобы однозначно установить название каждого города. Мог ли Незнайка быть прав?

3. (*С. Токарев*) На утреннике каждый мальчик подарил каждой девочке по конфете и каждая девочка подарила каждому мальчику по конфете. 7 детей дарили только «Белочки», а остальные – только «Коровки», причём «Белочек» и «Коровок» подарено было поровну. Известно, что среди даривших «Белочки» были и мальчики, и девочки. Определите наибольшее возможное число участников утренника.

Логика, игры, комбинаторика

4. (*Задача из Эстонии*) В классе любые два ученика имеют разный рост. Учитель построил всех учеников в шеренгу так, что среди любых трёх подряд стоящих левый оказывается всегда по росту между средним и правым. После команды «каждому второму ученику сделать шаг вперёд» образуются две шеренги. Докажите, что обе они упорядочены по росту.

5. (*Задача из Украины*) 99 гномов, некоторые в шляпах, стали в круг. Оказалось, что два гнома в шляпах не могут стоять ни рядом, ни так, чтобы между ними стояло ровно 48 гномов. Какое наибольшее количество гномов может быть в шляпах?

6. (*Задача из Словакии*) Дано натуральное число n. Петя и Вася играют в такую игру на клетчатой полоске длины 2019. Вася ставит фишку на какое-

то поле. Далее на каждом шаге Петя выбирает натуральное число k, не большее n, а Вася двигает фишку на k клеток вправо или влево по своему выбору. Петя выигрывает, если Вася не может сделать ход. При каком наименьшем n Петя может гарантированно выиграть за конечное число ходов?

7. (*Задача из Финляндии*) Двум мудрецам в тайне один от другого сообщат по натуральному числу. Им известно, что сумма их чисел будет равна 2^k-1, где k – неизвестное натуральное число. Узнав каждый своё число, мудрецы должны будут одновременно поднять по одной руке. Цель мудреца – увидев, какую руку поднял другой (левую или правую), узнать, больше или меньше его число, чем число другого. Как мудрецам заранее договориться, чтобы оба добились цели?

8. (*Задача из США*) Пусть ← означает соответствующую клавишу (сдвиг курсора на одну позицию влево). Если в текстовом редакторе последовательно нажать клавиши $ab{\leftarrow}cd{\leftarrow}{\leftarrow}e{\leftarrow}{\leftarrow}f$, получится $faecdb$. Для двух буквенных строк A и B назовём B *достижимой* из A, если можно вставить в A несколько символов ← так, что после вбивания получится B. Докажите, что если B достижима из A, то и A достижима из B.

Геометрия и комбинаторная геометрия

9. (*Фольклор*) Муравей ползает только по рёбрам куба и диагоналям его граней, не поворачивая в центрах граней. Он переполз из вершины в противоположную, не посещая ни одну вершину дважды. Какое наибольшее число диагоналей могло быть в его пути?

10. (*Д. Кузнецов*) Можно ли какой-то выпуклый пятиугольник разбить на 2019 равных треугольников?

11. (*Л. Емельянов*) Из трёх палочек можно сложить треугольник. От каждой палочки отломили по куску и сложили из них другой треугольник. Всегда ли из оставшихся частей можно сложить треугольник?

12. (*С. Волчёнков*) У Пети есть картонный круг радиуса 2, а у Васи – N картонных кругов радиуса 1. Петя вырезал из своего круга остроугольный треугольник. Найдите наименьшее возможное значение N, при

котором Вася может гарантированно вырезать из каждого своего круга многоугольник и сложить из них такой же треугольник (без дырок и наложений).

13. (*И. Кухарчук*) В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AX и BY. Перпендикуляры к прямой XY, проведённые через X и Y, пересекают сторону AB в точках M и N. Докажите, что $AN = MB$.

14. (*Л. Емельянов*) Два отрезка с концами на сторонах AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ проходят через точку пересечения его диагоналей и оба делятся этой точкой пополам. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

15. (*С. Волчёнков*) а) На плоскости дана невидимая фигура: либо отрезок, либо треугольник. Разрешается провести прямую, и вам нарисуют на ней проекцию фигуры на эту прямую. Всегда ли за несколько (конечное число) таких действий можно выяснить, какой из двух случаев имеет место? б) А если фигура – либо треугольник, либо выпуклый четырёхугольник?

16. (*Л. Емельянов*) Треугольник спроектировали на прямые, параллельные его сторонам, и получили три отрезка длиной a, b и c. Известно, что по числам a, b, c длины сторон треугольника однозначно восстанавливаются. Чему может быть равен его наибольший угол?

Арифметика и алгебра

17. (*Н. Агаханов*) Существует ли такое натуральное число a, что $a \cdot 1001 \cdot 1003 \cdot 1005 + 4$ – точный квадрат?

18. (*Н. Агаханов*) Даны две параллельные прямые на расстоянии 5. На них отмечены точки A и B так, что $AB = 5$. Кузнечик может находиться только на этих прямых и совершать прыжки длины ровно 13. За какое наименьшее количество прыжков кузнечик может попасть из точки A в точку B?

19. (*С. Волчёнков*) Даны N натуральных чисел ($N > 1$). Их наименьшее общее кратное равняется их сумме. При каких N это возможно?

20. (*Задача из Албании*) Последовательность (a_n) определена условиями $a_1 = 1$ и $a_n = n(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})$ при $n > 1$. Найдите все n, для которых a_n делится на $n!$.

Художник Сергей Чуб

НАШ КОНКУРС, II ТУР

(«Квантик» № 10, 2019)

6. *Каких чисел, все цифры которых различны, больше: девятизначных или десятизначных?*

Ответ: их поровну. В каждом девятизначном числе с различными цифрами есть ровно одна неиспользованная цифра. Приписав её в конец, получим десятизначное число с различными цифрами. Этот способ разбивает искомые числа на пары (девятизначное, десятизначное), и каждое искомое число попадает ровно в одну из пар.

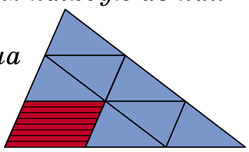
7. *У Квантика есть две квадратные шоколадки, первая – размером 10×10, вторая – размером 11×11. Чтобы разломать первую шоколадку на дольки 1×1, Квантику требуется 1 минута и 39 секунд. Какое время ему потребуется, чтобы разломать на дольки 1×1 вторую шоколадку? На каждый разлом Квантик тратит одно и то же время и за раз ломает какой-то один из имеющихся кусков на две части.*

Ответ: 2 минуты. Первую шоколадку Квантик разделил на 100 кусков, и с каждым разломом он увеличивал число кусков на 1. Значит, Квантик сделал $100-1=99$ разломов, потратив 99 секунд, то есть он тратит на разлом одну секунду. Во второй шоколадке $11^2=121$ долек, и тут понадобится 120 разломов, то есть 2 минуты.

8. *Барон Мюнхгаузен рассказывал:*

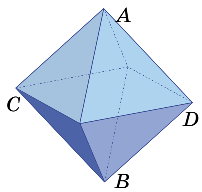
– Я сумел разрезать произвольный треугольник на две части, а потом каждую из них разрезал на 7 равных частей.

Могут ли слова барона быть правдой?



Ответ: да. Пример см. на рисунке.

9. *Многогранник, изображённый на рисунке, называется октаэдром; у него 6 вершин, 8 треугольных граней и 12 рёбер. В каждой вершине октаэдра поместили лампочку и зажгли одну из них. Далее, за ход можно выбрать любую грань и изменить состояние (потушить, если горит, и зажечь, если не горит) всех лампочек на ней. Можно ли за несколько ходов зажечь все лампочки?*



Ответ: нет. В каждой паре противоположных лампочек за ход меняет своё состояние ровно одна. Значит, в паре (A, B), где A – изначально зажжённая лампочка, после каждого чётного хода не горит одна лампочка (см. рисунок). А в паре (C, D) – не горит одна лампочка после каждого нечётного хода. Значит, после каждого хода какая-то лампочка не горит.

10. *Возьмём любое натуральное число, например, 2019. Составим второе число, которое показывает, сколько и каких цифр (в порядке возрастания) содержит исходное число. Получится 10111219, что означает «один нуль, одна единица, одна двойка и одна девятка». На основе второго числа по тому же принципу образуем третье число 10511219, потом – четвёртое 1041121519, и т. д.*

а) Квантик убеждён, что с какого бы числа ни начать, в получившейся последовательности какое-то число непременно встретится дважды. Ноутик считает, что не обязательно – возможна последовательность, в которой все числа различны. Кто прав?

б) Могут ли в такой последовательности встретиться два одинаковых числа подряд?

Ответ: а) Квантик; б) могут.

а) Нам понадобится лемма:

в такой последовательности после каждого числа, в котором хотя бы 100 цифр, следует число с меньшим количеством цифр.

Из леммы получается, что в последовательности после любого числа с хотя бы 100 цифрами рано или поздно встретится число с менее чем 100 цифрами, поскольку количество цифр будет уменьшаться и в какой-то момент станет меньше 100. Тогда числа с менее чем 100 цифрами никогда не закончатся в нашей последовательности – иначе после последнего из них шли бы только числа с хотя бы 100 цифрами, что невозможно. Поэтому чисел с менее чем 100 цифрами в последовательности бесконечно много, а всего различных таких чисел конечное количество. Значит, какое-то из них повторится.

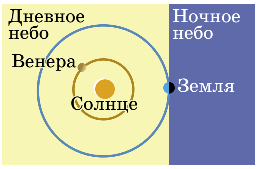
Докажем лемму. Пусть A – число из нашей последовательности, в нём k цифр, а в числе k в свою очередь n цифр. Следующее за A число нашей последовательности состоит не более чем из 10 групп вида «цифра и число, не превышающее k». Тогда в этом следующем числе не более $10(n+1)$ цифр, и мы хотели бы доказать при $k\geqslant100$, что $10(n+1)<k$, то есть $n+1<\frac{k}{10}$. Так как $n+1\leqslant2n$, достаточно доказать, что $n<\frac{k}{20}$.

Осталось проверить условие: *для любого числа $k\geqslant100$ количество цифр в числе k не превышает $\frac{k}{20}$*. Для чисел от 100 до 119 условие, очевидно, выполнено (так как $3<5$). Любое другое число, большее 100, получается из какого-то числа от 100 до 119 прибавлением нужного количества двадцаток. При каждом таком прибавлении количество цифр числа k увеличивается не более чем на 1, а отношение $\frac{k}{20}$ увеличивается ровно на 1, поэтому условие не нарушается.

б) Да. Например, после числа 22 снова будет идти 22. Другой пример: 31331415.

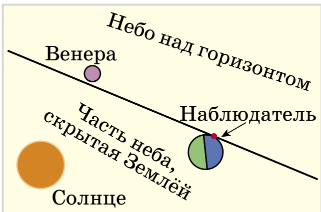
ПОЧЕМУ ВЕНЕРА ВИДНА НОЧЬЮ?

(«Квантик» № 11, 2019)



Почему Квантик назвал схему жульнической? Да, масштабы на ней не соблюдены: Земля и Венера слишком велики по сравнению с Солнцем, а Солнце слишком велико по сравнению с орбитами Земли и Венеры. Но важнее другое: «ночное небо», хоть и выглядит правдоподобно, изображено там неправильно. Почему?

Ночь на Земле стоит на всей её неосвещённой половине. И какое небо мы увидим ночью, зависит от того, где мы находимся. Если мы в противоположной от Солнца точке Земли, правильная картинка будет и в самом деле довольно похожа на картинку, приведённую Ноутиком.



Но если мы близко к границе между днём и ночью, картинка может выглядеть примерно так, как на рисунке справа. И мы увидим Венеру, хотя у нас будет ночь!

Венера примерно в полтора раза ближе к Солнцу, чем Земля, и для земного наблюдателя Венера и Солнце располагаются на небе не слишком далеко друг от друга. Но увидеть Венеру можно довольно часто: утром, когда она уже взошла, а Солнце – ещё нет, и вечером, когда Солнце уже зашло, а Венера – ещё нет. Поэтому древние астрономы называли Венеру «Утренней звездой» и «Вечерней звездой» (и даже долгое время считали, что это две разные звёзды).

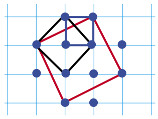
ВСЕ ХОТЯТ ЗАЧЁТ

Пусть каждый называет такое число: количество тех, кто уже получил оценку «сдал», плюс количество ещё не отвечавших студентов. Тогда либо все сдали, либо последний, кто не сдал, верно назвал итоговое число сдавших.

ВОРЫ НА СЛОВАХ

Слово *восхитить* раньше означало то же, что и *похитить*. Называя что-то *восхитительным*, мы как будто говорим, что оно нас захватывает, уносит.

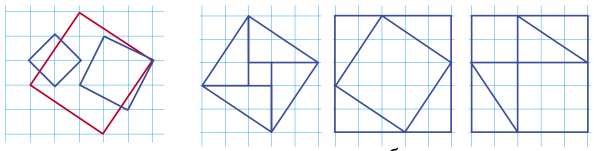
КВАДРАТЫ НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ



1. Есть 5 квадратов, таких же как синий, 4 – как чёрный и 2 – как красный.

2. Видимо, потому что в сетке (не математической, а рыболовной, например) нити связаны узлами.

3. **4.**



а б в

6. Можно провести отрезок длины 6.

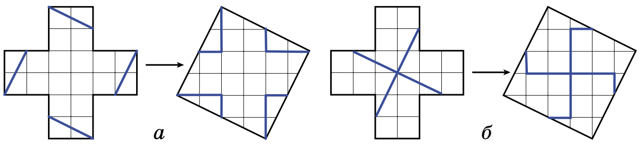
8. Отрежем от углов прямоугольные треугольники с катетами 1 и 10.

9. Прямоугольники 1×10 и 2×5, квадрат площади 10 и ещё два прямоугольника: составленный из 5 квадратов площади 2 и составленный из 2 квадратов площади 5.

10. Да, можно взять наборы фигурок из пунктов а) и б) задачи 4.

11. 45°, 45°, 90°. Этот треугольник – половина квадрата.

12. См. рисунки.



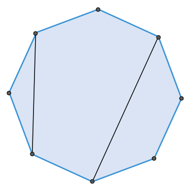
а б

13. *Идея 1:* строим квадрат площади a^2+b^2 и берём середины его сторон (там будут узлы!).

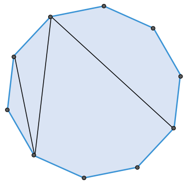
Идея 2: применить теорему Пифагора к треугольнику с катетами $(a-b)/2$ и $(a+b)/2$.

Идея 3: возьмём квадраты с общим центром и идущими по сетке сторонами a и b; продлим стороны меньшего до пересечения со сторонами большего; эти точки будут вершинами квадрата.

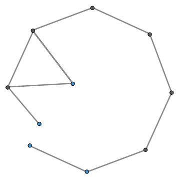
XIV ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР. Избранные задачи



1. а) Ответ: 10. Пример см. на рисунке. Кольцевой маршрут из 8 дорог уже даёт 8 дорог. Добавив к нему ещё одну дорогу, мы получим максимум два новых кольцевых маршрута, то есть 9 дорог не хватит.

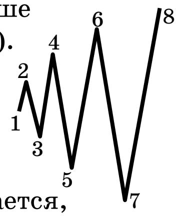


б) Ответ: 13. Пример см. на рисунке. Кольцевой маршрут из 10 дорог уже даёт 10 дорог. Добавим ещё две. Каждая в отдельности даёт максимум два новых кольцевых маршрута. Обе эти дороги вместе входят максимум в два кольцевых маршрута. Итого кольцевых маршрутов не более $1+2+2+2\leqslant 7$, так что 12 дорог не хватит.



2. Да. Проверьте, что карта на рисунке справа подходит.

3. Ответ: 20. Пусть d_k девочек и m_k мальчиков дарили «Коровку», d_b девочек и m_b мальчиков дарили «Белочку». Надо найти максимум суммы $d_k+m_k+d_b+m_b$. Каждая пара, подарившая друг другу разные конфеты, даёт одинаковый вклад в суммарное число подаренных «Белочек» и суммарное число подаренных «Коровок». Значит, пар, подаривших друг другу «Белочки», столько же, сколько пар, подаривших друг другу «Коровки», то есть $d_k\cdot m_k=$ $=d_b\cdot m_b$. При этом $d_b+m_b=7$. Слагаемые тут натуральные, то есть это либо $1+6$, либо $2+5$, либо $3+4$ (в каком-то порядке). Произведение $d_b\cdot m_b$ при этом равно соответственно 6, 10 и 12, и оно же равно $d_k\cdot m_k$. Максимальная сумма d_k+m_k получается для третьего случая и равна 13.



4. Пусть, например, 2-й выше 1-го (случай «ниже» аналогичен). Тогда последовательно получаем, что 3-й ниже 1-го, 4-й выше 2-го, 5-й ниже 3-го, и т.д. – рост идёт зигзагом, как на рисунке, и в шеренге «чётных» рост увеличивается, а в шеренге «нечётных» – уменьшается.

5. Ответ: 33. Занумеруем гномов подряд числами от 1 до 99 по часовой стрелке. Заметим, что в последовательности 1, 51, 2, 52, 3, 53, ..., 48, 98, 49, 99 среди любых трёх подряд идущих гномов любые два стоят на исходном круге либо рядом, либо через 48 гномов между ними. Поэтому в шляпах максимум треть всех гномов. Дав шляпу гномам с номерами, кратными 3, получим нужный пример (проверьте!).

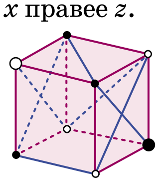
6. Ответ: 1010. Хотя бы с одной из сторон от фишки не меньше 1009 клеток. Поэтому если $n\leqslant 1009$, то при любом $k\leqslant n$ Вася сможет сделать ход. Пусть $n=1010$. Если клетка стоит в центре, Петя выбирает $k=1010$ и выигрывает. Если клетка не в центре, пусть Петя всегда называет число клеток, на которое надо сместиться, чтобы попасть в центр. Вася будет вынужден двигаться в одну сторону от центра, приближаясь к краю, но в какой-то момент сделать ход в сторону края уже не хватит места, и он пойдёт в центр.

7. *Указание.* Запишем оба числа и их сумму в двоичной системе. Сумма будет иметь вид 111...11 (число из одних единиц), а каждое из чисел – несколько групп единиц, разделённых группами нулей. Пусть каждый мудрец подымет левую руку, если в его числе количество групп единиц чётно, и правую – если нечётно.

8. Можно считать, что все буквы в строках различны (подумайте, почему). Занумеруем буквы в строке A числами 1, 2, 3, ... в таком порядке и будем оперировать номерами. В строке B, достижимой из A, числа как-то перемешаны. Будем получать A из B : берём очередное число из B, двигаем влево (если нужно) и ставим так, чтобы все уже взятые числа стояли по возрастанию. Первое число из B уже стоит по возрастанию. Пусть мы расставили по возрастанию несколько первых чисел из B, а очередное число x поставить не можем. Тогда мы сейчас стоим на таком месте в уже полученной строке возрастающих чисел, что сразу за нами стоит число y, меньшее x, но и перед нами стоит (ещё меньшее!) число z, поставленное на предыдущем шаге:

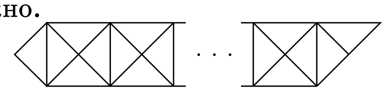
..., z, курсор (хотим поставить x), y, ...

Значит, в строке B эти буквы идут в порядке ... , y, ..., z, x, а в строке A идут по возрастанию: ... z, ... , y, ..., x. Но тогда B недостижима из A: поставив z, мы когда-то сместимся левее z, чтобы поставить y, и не сможем поставить x правее z.



9. Ответ: 6. Пример см. на рисунке. Так как вершин 8, в пути 7 отрезков. Если все они – диагонали, мы сможем дойти из начальной белой точки лишь до трёх других белых точек (см. рис.), а в чёрные не попадём.

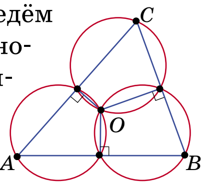
10. Ответ: можно. Пример см. на рисунке.



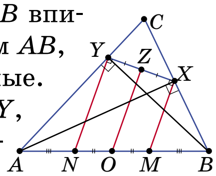
11. Ответ: нет. Пусть есть три палочки по 10 см. Отломим от первых двух куски по 9 см, а от третьей – 1 см. Из кусков 9 см, 9 см, 1 см можно сложить треугольник, а из оставшихся – нельзя по неравенству треугольника ($1+1<9$).

12. Ответ: 3. Двух кругов не хватит, если вырезать правильный треугольник, вписанный в круг радиуса 2. Длина стороны треугольника будет больше 2, и в каждый круг радиуса 1 попадёт максимум одна вершина, а вершин три.

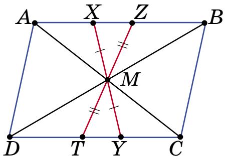
Трёх кругов хватит. Проведём из центра O описанной окружности треугольника ABC перпендикуляры к его сторонам. Они попадут в середины сторон и разделят ABC на три четырёхугольника, каждый из которых вписан в круг, в два раза меньший описанного круга треугольника, то есть в круг радиуса не больше 1.



13. Четырёхугольник $AYXB$ вписан в окружность с диаметром AB, так как углы AYB и AXB прямые. Перпендикуляр к хорде XY, проведённый через её середину Z, проходит через центр O окружности. Тогда $OM=ON$, так как $ZX=ZY$. Но O – середина AB, откуда и $AN=MB$.



14. Пусть M – точка пересечения диагоналей $ABCD$, XY и ZT – данные отрезки (см. рис.). Треугольники XMZ и YMT равны по первому признаку, откуда равны углы XZM и YTM, то есть стороны AB и CD параллельны. Но тогда равны треугольники AMZ и CMT (по второму признаку), откуда $AM=MC$, и аналогично $DM=MB$. Значит, диагонали $ABCD$ точкой пересечения делятся пополам, то есть $ABCD$ – параллелограмм.



15. а) Ответ: да. Проведя две перпендикулярные прямые, мы сможем заключить фигуру в прямоугольник, на каждой стороне которого (быть может, в вершинах) есть точки фигуры. Если фигура – отрезок, она обязательно будет диагональю этого прямоугольника. Проведём прямые, перпендикулярные диагоналям. Если проекция на одну из этих прямых будет точкой, фигура – отрезок, иначе – треугольник.

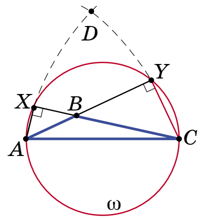
б) Ответ: да. *Указание.* Назовём выпуклый многоугольник опорным для фигуры, если фигура лежит внутри него и на каждой его стороне есть точка фигуры. Начав с опорного прямоугольника, можно проверять, лежит ли в данной его вершине вершина фигуры, и если нет – «срезать» эту вершину, увеличивая число сторон опорного многоугольника (а вершин в нашей фигуре не меньше, чем половина сторон опорного).

16. Ответ: от 60° до 90° включительно.

Наибольший угол треугольника всегда не меньше 60°. Заметим, что проекции остроугольного треугольника равны по длине его сторонам, а среди проекций тупоугольного одна проекция строго больше двух других (проекция наибольшей стороны).

Для $60^\circ \leqslant \alpha < 90^\circ$ берём равнобедренный треугольник с двумя наибольшими углами α. Две его наибольшие проекции одной длины, и мы поймём, что он остроугольный и восстановим его.

Пусть угол B треугольника ABC тупой. Построим на наибольшей стороне AC как на диаметре окружность ω (см. рис.). Проекция ABC на прямую AB равна AY, а на BC – равна CX. Окружность с центром A и радиусом AY и окружность с центром C и радиусом CX пересекаются вне ω, пусть D – одна из точек пересечения. Тогда ADB остроугольный и имеет те же длины проекций, что и ACB.



Прямоугольный треугольник восстанавливается по теореме Пифагора.

17. Да. Например, годится $a=1003$ – получится $(1003^2-2)^2$, и $a=1001\cdot1003\cdot1005+4$ – получится $(1001\cdot1003\cdot1005+2)^2$.

18. Пусть прямые горизонтальны. Прыгая на 13 с прямой на прямую, мы сдвигаемся по горизонтали на 12 (так как $12^2+5^2=13^2$). Надо сделать нечётное число таких сдвигов, чтобы оказаться на другой прямой, а суммарный сдвиг должен быть нулевым. Порядок прыжков не важен, и нет смысла делать прыжок и такой же прыжок «обратно», поэтому можно считать, что мы n раз сдвинулись на 12 вправо, а потом m раз – на 13 влево. Тогда $12n=13m$, откуда n делится на 13, и $n>0$ (ведь n нечётно). Значит, $n\geqslant 13$, откуда $m\geqslant 12$ и $n+m\geqslant 25$.

Пример на 25 прыжков: 12 раз влево вдоль прямой и 13 раз с прямой на прямую вправо.

19. Ответ: при всех натуральных $N>2$.

Если N нечётно, возьмём $N-2$ единиц и числа 2 и N. Их НОК и сумма равны $2N$.

Если $N>2$ чётно, возьмём $N-3$ единиц и числа 2, 2 и $N+1$. Их НОК и сумма равны $2N+2$.

Если $N=2$, то сумма двух чисел делится на каждое, но больше каждого хотя бы в 2 раза, откуда числа равны, а тогда НОК меньше суммы.

20. Ответ: при $n=1$ и всех чётных n. *Указание*: $a_n=\frac{n\cdot n!}{2}$ и $a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}=\frac{n!}{2}$ при $n>1$ (для $n=2$ формулы верны; так как $\frac{n!}{2}+\frac{n\cdot n!}{2}=\frac{(n+1)!}{2}$, обе формулы будут верными при увеличении n).

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Высылайте решения задач IV тура, с которыми справитесь, не позднее 1 января в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

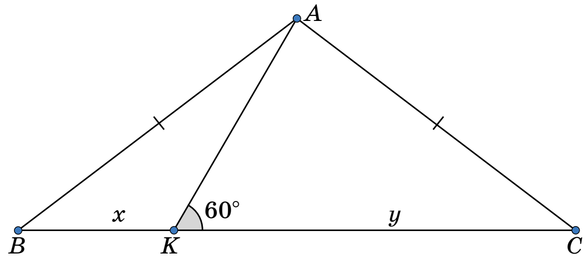
IV ТУР

16. Саша придумал шифр: заменил несколько букв однозначными или двузначными числами, используя только цифры 1 и 2 (разные буквы он заменял разными числами, а одинаковые – одинаковыми). Слово КРОЛИК превратилось в число 1212111212. Слово КРОКОДИЛ тоже превратилось в число. В какое?

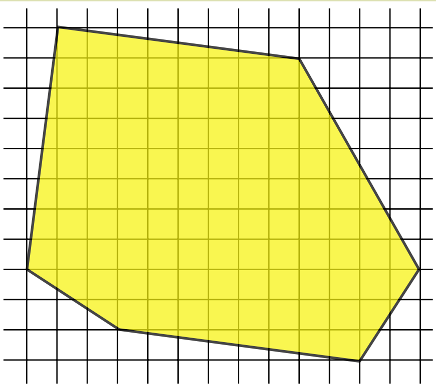
17. Найдите наименьшее семизначное число, делящееся на 17, в котором все цифры разные.

Авторы: Александр Хачатурян и Татьяна Казицына (16), Михаил Евдокимов (17), Владимир Расторгуев (20)

18. Точка K делит основание BC равнобедренного треугольника BAC на отрезки длины x и y, как показано на рисунке. Найдите длину AK, если угол AKC равен $60°$.



19. Квантик и Ноутик хотят показать такой фокус. Зритель задумывает два натуральных числа, различающихся на 1, и сообщает одно Квантику, а другое – Ноутику. После этого Квантик показывает Ноутику чёрную или белую карточку, и Ноутик сразу угадывает число Квантика. Помогите Квантику и Ноутику договориться о своих действиях, чтобы фокус всегда удавался.



20. Разрежьте шестиугольник на рисунке на две равные части.

Художник Николай Крутиков

ВЕЛОСИПЕДНЫЕ ЗВЁЗДОЧКИ

Почему велосипедные звёздочки на педалях и заднем колесе расположены в разном порядке: на педалях увеличиваются при удалении от велосипеда, а на заднем колесе – наоборот? Приведите весомую причину, не зависящую от остальной конструкции велосипеда.

Автор Александр Бердников

Художник Алексей Вайнер

ISSN 2227-7986 19012