№ 9 | сентябрь 2018
Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования
e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№9 ОТРАЖЕНИЯ

сентябрь 2018

НА ВКУС И НА ЦВЕТ

ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ И ТАЮЩИЙ ЛЁД

Enter

ДОРОГИЕ ДРУЗЬЯ!

открылась

ПОДПИСКА на 2019 год

продолжается подписка на оставшиеся месяцы 2018 года

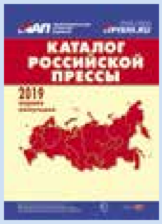
Подписаться на журнал «КВАНТИК» вы можете в любом отделении связи Почты России и через интернет

КАТАЛОГ «ГАЗЕТЫ. ЖУРНАЛЫ» АГЕНТСТВА «РОСПЕЧАТЬ»

Индекс **80478** для подписки на год

Индекс **84252** для подписки на полгода или на несколько месяцев полугодия

«КАТАЛОГ РОССИЙСКОЙ ПРЕССЫ» МАП



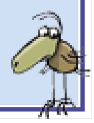
Индекс **11348** для подписки на год

Индекс **11346** для подписки на полгода или на несколько месяцев полугодия

По этому каталогу также можно подписаться на сайте **vipishi.ru**

Жители дальнего зарубежья могут подписаться на сайте nasha-pressa.de
Подробнее обо всех способах подписки, о продукции «Квантика» и о том, как её купить, читайте на сайте kvantik.com

Кроме журнала редакция «Квантика» выпускает альманахи, плакаты и календари загадок
Электронную версию журнала можно приобрести на сайте **litres.ru**
У «Квантика» есть свой интернет-магазин – **kvantik.ru**



Журнал «КВАНТИК» – лауреат
IV ВСЕРОССИЙСКОЙ ПРЕМИИ «ЗА ВЕРНОСТЬ НАУКЕ»
в номинации **«ЛУЧШИЙ ДЕТСКИЙ ПРОЕКТ О НАУКЕ»**

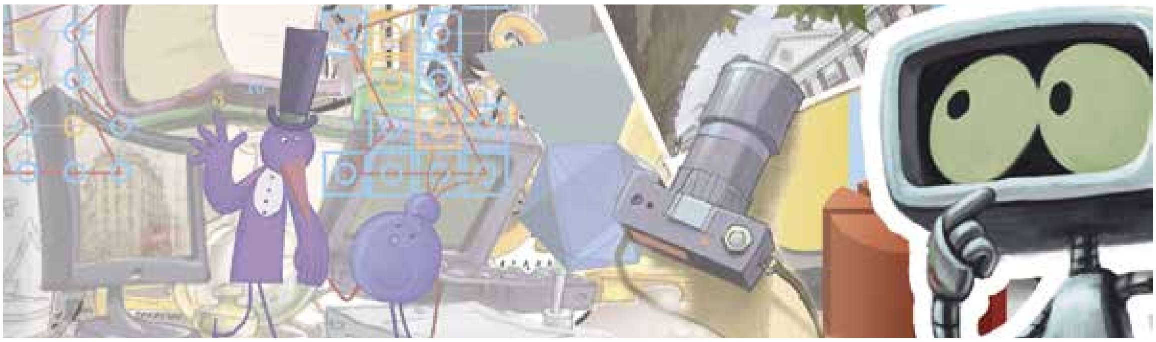
www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 09, сентябрь 2018 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор: С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Е. А. Котко, И. А. Маховая, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов
Художественный редактор и главный художник: Yustas-07
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Мария Усеинова

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях связи Почты России:
▪ Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индексы **84252** и **80478**)
▪ «Каталог Российской прессы» МАП (индексы **11346** и **11348**)
Онлайн-подписка по «Каталогу Российской прессы» на сайте **vipishi.ru**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 5000 экз.
Подписано в печать: 14.08. 2018
Отпечатано в типографии ООО «ТДДС-Столица-8»
Тел.: (495) 363-48-84
http://capitalpress.ru
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+

СОДЕРЖАНИЕ

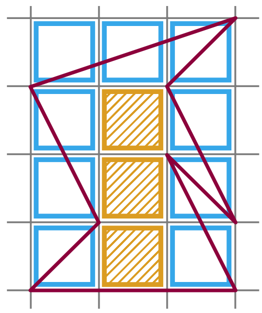


Григорий Мерзон

ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ И ТАЮЩИЙ ЛЁД

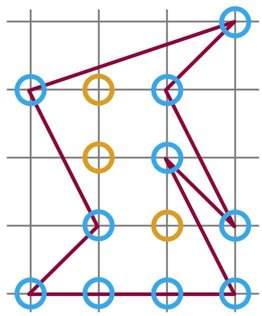
ФОРМУЛА ПИКА

Как найти площадь многоугольника на клетчатой бумаге? Можно подсчитать число клеток, которые полностью накрыты фигурой, и ещё как-то учесть клетки, накрытые фигурой частично, – скажем, прибавить половину от числа этих клеток. И сказать, что площадь фигуры (в клеточках) *приблизительно* равна полученной сумме.

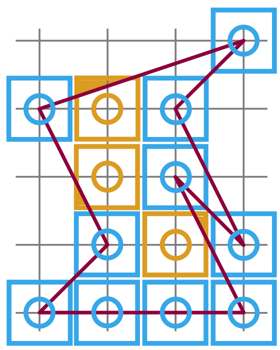


$$S \approx 3 + \frac{9}{2}$$

А можно вместо клеток, полностью или частично накрытых многоугольником, считать узлы сетки (вершины клеток) строго внутри многоугольника или на его границе.



$$S \approx 3 + \frac{10}{2}$$



Действительно, вокруг каждого узла сетки можно нарисовать по единичному квадратику. И если узел лежит на границе многоугольника, то этот квадратик накрыт многоугольником только частично. А если узел лежит внутри, то обычно и квадратик накрыт многоугольником полностью... впрочем, иногда всё же не полностью – но мы и считаем площадь только приближённо.

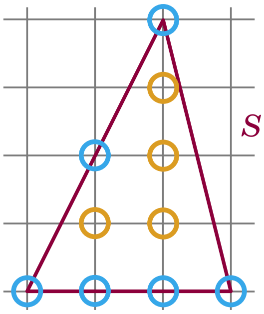
Но чудесным образом последний рецепт всегда даёт почти правильный ответ! А именно, верна

Формула Пика. *Площадь S многоугольника с вершинами в узлах сетки можно найти по формуле*

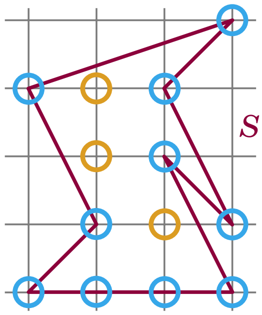
$$S = i + \frac{b}{2} - 1,$$

где i – число узлов сетки строго внутри многоугольника, b – число узлов сетки на его границе.

Подчеркнём, что это уже не приближённая, а *точная* формула!



$S = 4 + \frac{6}{2} - 1$



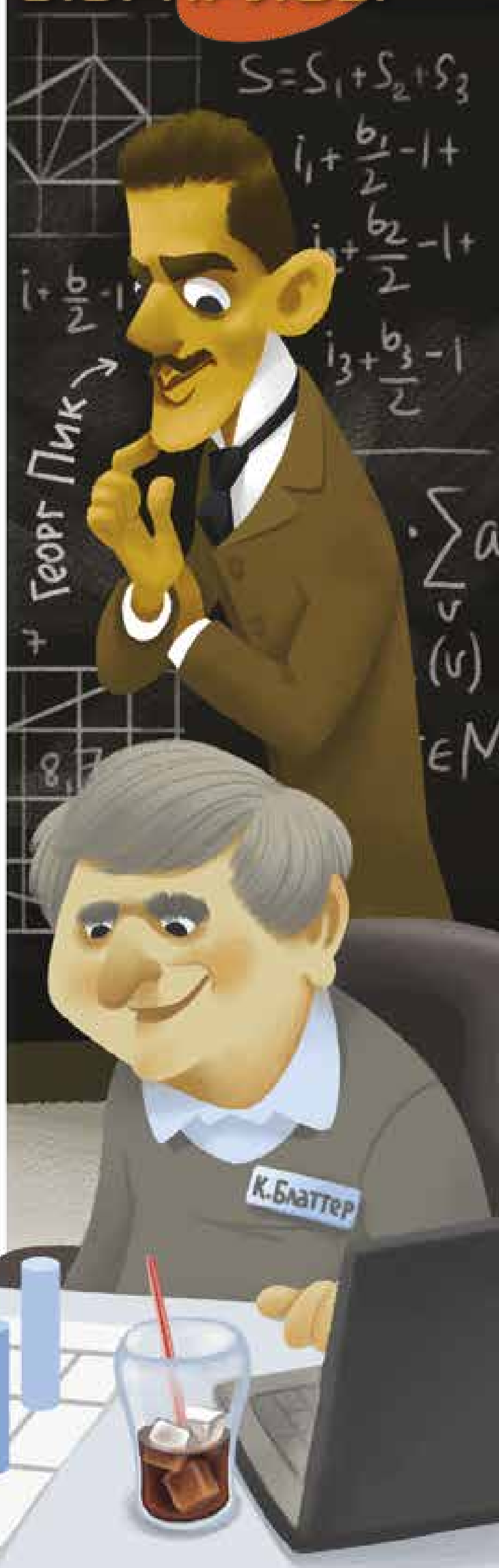
$S = 3 + \frac{10}{2} - 1$

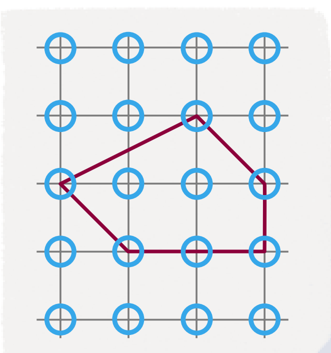
Интересно, что хотя длины сторон у многоугольников обычно совершенно не целые, формула Пика гарантирует, что площадь всегда получится целой или полуцелой.

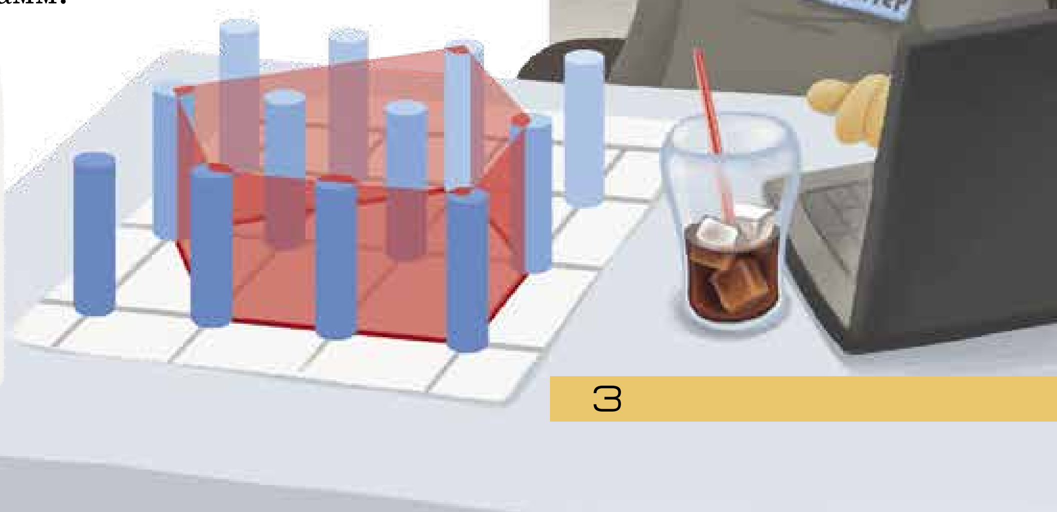
ТАЮЩИЙ ЛЁД

Формула Пика известна с XIX века, и с тех пор у неё появилось много доказательств, но большинство из них не такие уж простые. Мы обсудим предложенный в 1997 году швейцарским математиком Кристианом Блаттером мысленный эсперимент с тающим льдом, который сразу объясняет формулу Пика.

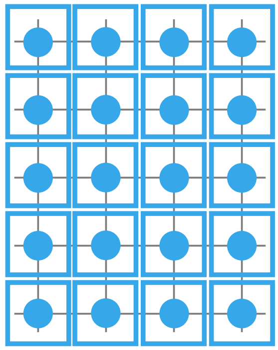
Поставим на каждый узел сетки по одинаковому цилиндрическому столбику изо льда. Каждый столбик очень тонкий (пересекается только с теми сторонами многоугольника, которые проходят через центр столбика) и весит 1 грамм.



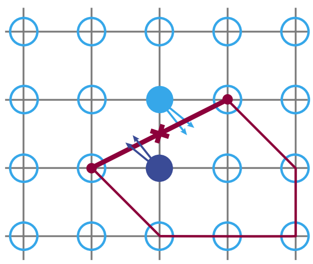




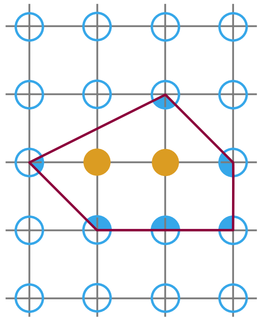
Построим вокруг каждого столбика забор в виде единичного квадратика, после чего растопим весь лёд (во всех квадратиках вода растекается одинаково и симметрично относительно центра своего квадратика). Вся клетчатая плоскость будет равномерно залита водой, и в каждой ячейке площади 1 будет по 1 грамму воды. То есть количество воды в нашем многоугольнике (в граммах) будет равно его площади (в клетках).



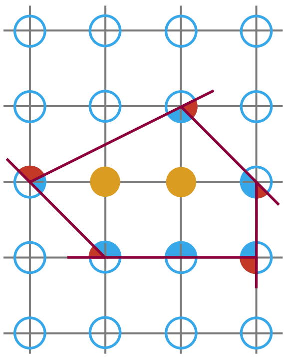
С другой стороны, задумаемся, откуда эта вода попала в наш многоугольник. Посмотрим на какую-нибудь конкретную сторону многоугольника. Если через неё внутрь многоугольника втекла вода из какого-то столбика, то точно столько же воды из *симметричного столбика* (симметричного относительно середины этой стороны) через неё из многоугольника вытекло.



То есть внутри многоугольника ровно *столько воды, сколько в нём было льда*! А сколько в нём было льда? Каждый из узлов сетки внутри многоугольника даёт вклад 1 грамм, общий вес получается i граммов. Узлы на сторонах обычно дают по $\frac{1}{2}$ грамма, но только если это не вершина, для вершины этот вес меньше – так что и общий вес узлов на границе получается не $\frac{b}{2}$ граммов, а меньше.



Насколько меньше? Продлим немного каждую сторону, обходя многоугольник вдоль сторон по часовой стрелке. На рисунке ниже красная часть дополняет каждую из синих частей до половины круга. Но красные части в сумме дают ровно один круг! Ведь, обходя многоугольник по контуру, мы в каждой вершине поворачиваемся на угол, соответствующий красной части, пока не вернёмся в исходную точку, сделав как раз полный оборот.



То есть суммарный вес льда внутри многоугольника равен $i+\frac{b}{2}-1$, и мы получили формулу Пика!

Упражнение. *В рассуждении выше мы рисовали выпуклый многоугольник. А изменится ли что-то, если многоугольник станет невыпуклым? А если рассматривать «многоугольники с дырками»?*

Художник Мария Усеинова

Василий Птушенко

ОТРАЖЕНИЯ

Говоря про отражение света, мы чаще всего представляем себе зеркало. Именно поэтому словом «отражение» мы называем не только само явление, когда свет изменяет направление своего движения, но и то изображение, которое создаётся отражённым светом. Однако глядя, например, на белую вату, мы также имеем дело с отражением. Причём отражает вата ничуть не хуже, чем зеркало: и в том, и в другом случае ни поглощения, ни пропускания света практически нет. Так в чём же тогда различие между ватой и зеркалом?

Ничего «хитрого» в этом различии нет: вата отражает (по сути, рассеивает) упавший на неё свет во все стороны – такое отражение называют в физике *диффузным*. А для зеркала действует закон отражения: каждый луч света отражается только в одном, строго определённом направлении – «угол падения равен углу отражения» (такой тип отражения называется *зеркальным*). Однако это всё – сухие слова. А ведь переход от зеркального отражения к диффузному вполне можно проиллюстрировать не только формулами и чертежами, но и вполне поэтичными образами. Причём, раз уж мы отказались от «сухих» слов, сделаем это с помощью... воды!

Всем знакомо образное словосочетание «зеркальная гладь» по отношению к поверхности воды. Но это художественное наименование имеет и вполне отчётливый физический смысл. В отсутствие ветра или течения поверхность воды в небольшом водоёме – озере, пруду и даже луже – будет плоской и горизонтальной. Кроме того, при больших углах падения (то есть при «пологом» падении света) коэффициент отражения воды резко возрастает, приближаясь к 100%.

Итак, плоская поверхность с высоким коэффициентом отражения (если, конечно, не смотреть прямо вниз) – вот два свойства, делающие невозмущённую поверхность воды прекрасным зеркалом.

На рисунке 1 схематично показано отражение света от такой поверхности и итоговое изображение.

А теперь представим себе лёгкое волнение. Идеально плоская отражающая поверхность превратилась в множество фрагментов, наклонённых под слегка отличающимися друг от друга углами. Фотография с последней страницы обложки «Квантика» №8, 2018 (рис. 2), – не творение импрессиониста, как могло показаться, а именно отражение в таком «волнующемся зеркале».

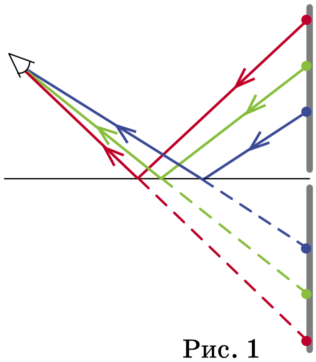


Рис. 1

Рис. 2

Сравните его с репродукциями картин импрессионистов (например, рисунок 3).

Рис. 3. Клод Моне. Руанский собор, фасад (закат), гармония золотого и голубого (1892–1894)

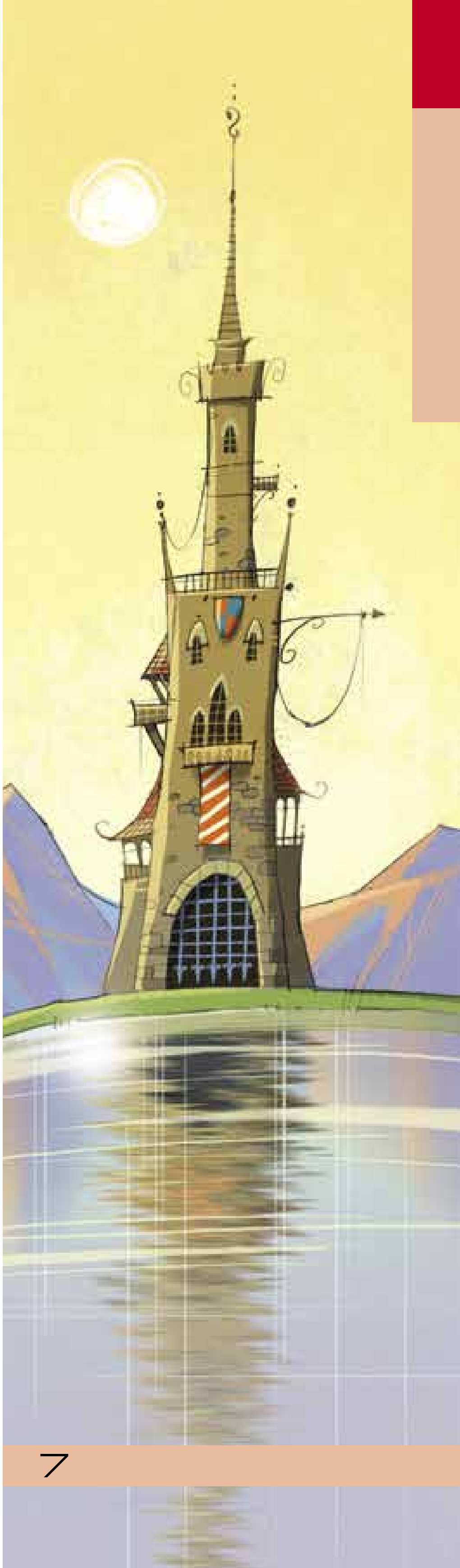


Рис. 4

Рис. 5

Все контуры слегка искажаются, прямые линии в отражении отличаются от прямых, но несильно. В целом, весь облик остаётся узнаваемым. Вот «настоящий» объект (рис. 4), дающий такое «импрессионистическое» отражение (рис. 5), и схема хода отражённых лучей (рис. 6). (Схема иллюстрирует искажение *длин* отрезков; чтобы показать, как искажаются *формы*, превращая отрезки прямых в кривые, нужно рассмотреть трёхмерную схему.)

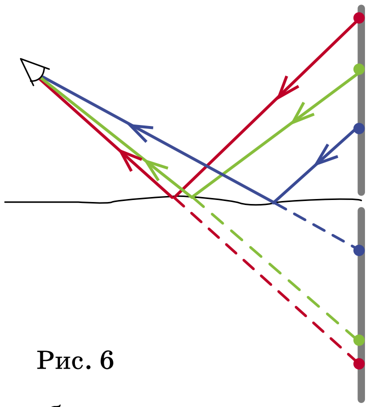


Рис. 6

Ветер посильнее может вызвать ещё бóльшие отклонения поверхности воды от горизонтальной плоскости. Её по-прежнему можно будет представить как состоящую из отдельных почти плоских фрагментов, но эти фрагменты будут сильнее отклонены от горизонтали. Итог – контуры изображения совсем размыты, оно уже едва угадывается (рис. 7), превращаясь,

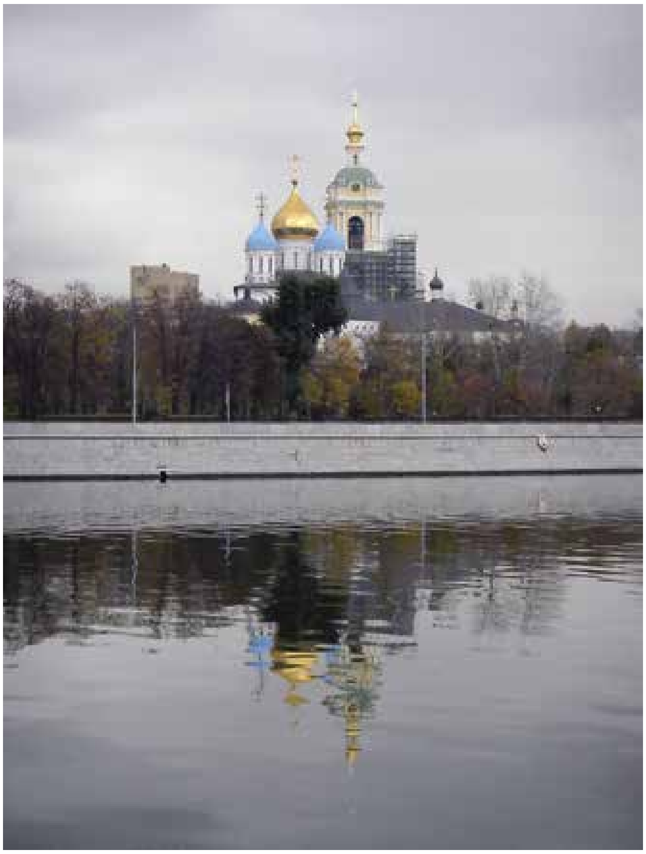


Рис. 7

в итоге, в классическую «лунную дорожку».

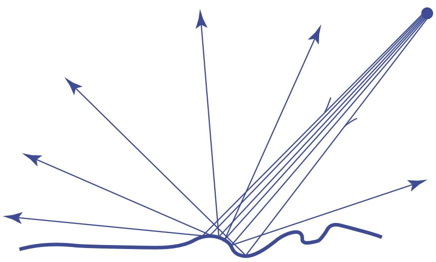


Рис. 8

Обилие «самостоятельных» зеркалец с существенно разными направлениями, позволяющих отражать свет во все стороны, – это и есть особенность диффузного отражения (рис. 8).

Чем меньше эти зеркальца (или чем дальше они находятся от наблюдателя, то есть чем меньшие угловые размеры имеют), тем равномернее рассеивает свет во все стороны от себя такая поверхность. В вате свет отражается от отдельных крохотных волокон, в снегу – от граней отдельных снежинок. Впрочем, снежинки ещё не настолько малы, чтобы создать полноценное диффузное отражение. В солнечный день или вечером под фонарём взгляните на снег вокруг себя, и вы увидите, как на фоне «равномерной» белизны снега время от времени сверкнёт отдельный яркий лучик, отражённый одной из снежинок.

Фото автора
Художник Алексей Вайнер

Константин Кохась

БЕНЗОПИЛА

– Друзья мои, – с тревогой в голосе сказал дятел Спятел, когда все уселись, – помните ли вы, что следующий четверг – это день злобнопотамства?

– Нам-то какое дело, – проворчала Огрыза, – мы не отмечаем этот праздник!

– Мы не празднуем, – согласился дятел Спятел. – А коллега Спрудль празднует. Он хочет подарить Злобнопотаму на день злобнопотамства бензопилу!

– Ужас-с-сно, – сказал Ушася. – Злобнопотам с бензопилой – это ни в какие ворота не лезет!

– Наоборот! – с энтузиазмом возразила Бусенька. – С бензопилой он пролезет в любые ворота: он искрошит их в щепки!

– Пора ставить железную дверь? – спросила Огрыза. – Сколько хлопот! Может, переключить внимание коллеги Спрудля на что-то более безопасное? Пусть, скажем, подарит Злобнопотаму пилку для ногтей!

– Пилка лучш-ш-ше бензопилы, – согласился Ушася, – но мне кажется, вообще не следует дарить Злобнопотаму никаких ос-с-стрых предметов.

– С точки зрения коллеги Спрудля пилка для ногтей не годится для подарка, – возразил дятел Спятел. – Он ведь обожает всякие технические новинки.

– Но в руках Злобнопотама любая техника опасна, – сказала Бусенька. – Поэтому нужно, чтобы подарок надоел ему до того, как он успеет наломать дров. Я думаю, ему подойдёт… аккумуляторный лобзик!

– А коллега Спрудль захочет дарить лобзик? – усомнился Ушася.

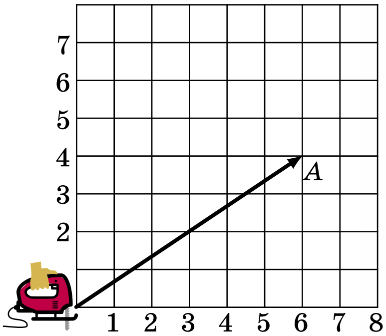
– Без вариантов! Ты его загипнотизируешь, а я прочту инструкцию по эксплуатации. Там столько красочных рекламных фраз, что он не устоит.

* * *

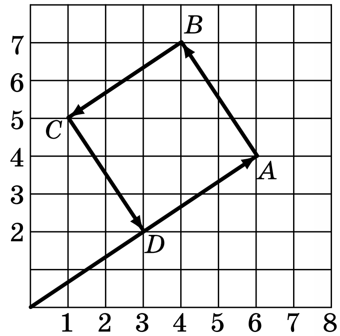
Злобнопотам нажал на кнопку «Вкл». Лёгкое движение – и отпиленная лобзиком ножка стола упала на пол. Весь пол Заброшенного Грота уже был усыпан опилками и всевозможными деревянными обломками.

– Са-а-амое интересное, – объяснял Злобнопотаму коллега Спрудль, – это то, что лобзик может пилить не только под прямым углом! Смотри, – коллега Спрудль поднёс лобзик к столу, – включаем лазерный трассировщик, и на столе появляется квадратная сетка. Можно выставить направление на любой её узел. Например, ставлю на узел (3,2) и… бульк!

Коллега Спрудль нажал на кнопку «Вкл», и лобзик стал пропиливать столешницу под указанным углом.



– Меняя угол, мы можем выпи-и-иливать фигуры весьма сложной формы! – воодушевлённо объяснял коллега Спрудль. – Впрочем, для начала давай выпилим квадратик.



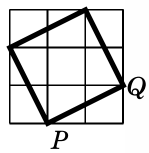
Коллега Спрудль допилил до точки A, выставил направление (–2,3) и пропилил разрез AB. Затем, установив направление (–3,–2), дошёл до точки C и наконец, направив лобзик в сторону (2,–3), достиг точки D. Столешница хрустнула и из неё выпал ровный квадратный кусок $ABCD$.

– Забавная штучка, – сказал Злобнопотам, отбирая у коллеги Спрудля лобзик, и, не добавив «спасибо», направился к выходу. – Пойду поупражняюсь!

* * *

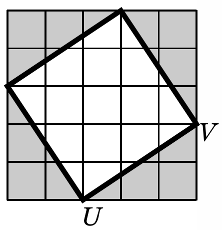
На берегу озера сидели Бусенька и дятел Спятел. Рядом лежал лист фанеры и были разложены инструменты: пилка для ногтей, ручной лобзик и большая двуручная пила. Злобнопотам подкрался поближе и стал подслушивать.

– Если мы начертим квадрат со стороной PQ, – объясняла Бусенька дятлу Спятлу, показывая чертёж, – его площадь будет равна 5.



– Не годится, – возразил дятел Спятел, – 5 это слишком мало.

– Тогда давай возьмём квадрат со стороной UV. Получится квадрат площади 13.



– 13? Это уже лучше. А что, площади таких квадратов всегда целые?

– Конечно. Чтобы выпилить такой квадрат, можно сначала взять содержащий его клетчатый квадрат с вертикальными и горизонтальными сторонами, а потом отрезать 4 треугольника. Площадь большого квадрата целая, так как он состоит из целого числа клеток; сумма площадей треугольников тоже целая, так как из них можно сложить 2 прямоугольника.

– Как интересно. Но я не уверен, подойдёт ли нам этот квадрат. Давай изготовим опытный образец. Какую пилу ты предпочитаешь? – И дятел Спятел махнул крылом в сторону инструментов.

– Вообще-то, навыки владения пилой у меня развиты не очень сильно, – призналась Бусенька. – И к тому же квадрат со стороной UV такой большой...

– Разойдись, мелкотня, – раздался голос Злобнопотама, – а не то я вас самих распилю! Что выпиливаем? Квадрат? Направление $(3, 2)$? Э-ле-мен-тар-но! – И Злобнопотам быстро, злобно, но довольно ровно выпилил из фанерного листа нужный квадрат.

Дятел Спятел внимательно изучил выпиленный квадрат и заявил:

– Не годится! Квадрат – это слишком примитивно! Нам нужен не квадрат, а пятиугольник! Правильный пятиугольник с вершинами в целых точках!

– Гениально! – воскликнула Бусенька. – С пятиугольником нам даже не придётся подгонять размеры, длина стороны может быть любой! Как я сама не догадалась. Выпили, пожалуйста, правильный пятиугольник! – обратилась она к Злобнопотаму. – У мастера с суперлобзиком это займёт не более минуты!

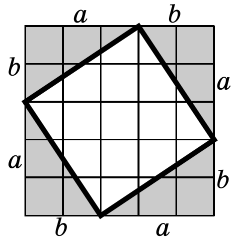
– Пока маэстро рассчитывает направления распилов, мы сходим за новым фанерным листом! – подмигнул Бусеньке дятел Спятел. – Скоро вернёмся!

– Я тоже хочу купить себе лобзик, как у этого героя, – восхищённо сказала Бусенька, когда друзья немного отошли от Злобнопотама, но тот всё ещё мог их слышать. – Однако никакой лобзик не заменит герою голову, – добавила она, когда берег скрылся из виду. – Вообще-то, должна тебе сказать, мы нехорошо поступаем со Злобнопотамом. Пока мы приманивали его и говорили о выпиливании квадратиков, мы выяснили, что площадь любого квадрата с вершинами в целых точках – целое число. Можно сказать точнее: если a и b – это горизонтальная и вертикальная проекции стороны квадрата, то площадь S этого квадрата имеет ту же чётность, что и $a+b$.

– А почему? – поинтересовался дятел Спятел.

– Построим наш квадрат, вырезая из квадрата $(a+b)\times(a+b)$ четыре серых прямоугольных треугольника площади Δ каждый, – стала пояснять Бусенька. – Тогда $S=(a+b)^2-4\Delta$. Например, если a и b оба чётные, то ясно, что S чётно и даже делится на 4. А что получится, если оба числа a и b нечётные?

– Если числа a и b нечётные, – стал рассуждать дятел Спятел, – то сторона квадрата $(a+b)\times(a+b)$ имеет чётную длину. Значит, его площадь делится на 4. При этом число $\Delta=\frac{1}{2}\,ab$ равно половине нечётного числа, из-за чего число 4Δ получается чётным, но не делящимся на 4. Следовательно, число $S=(a+b)^2-4\Delta$ – тоже чётное, но не делится на 4. Но всё равно в этом случае S и $a+b$ имеют одинаковую чётность.



– Да, в обоих разобранных случаях $a+b$ чётно, – согласилась Бусенька, – и мы можем отличить эти случаи друг от друга с помощью делимости числа S на 4. Ну а если $a+b$ нечётно, то есть числа a и b разной чётности, легко видеть, что S тоже нечётно.

– И чего же нехорошего мы совершили? – спросил дятел Спятел. – Мы задали Злобнопотаму интересную задачу!

– Но мы просим его совершить невозможное! Таких пятиугольников нет! Вот допустим, мы научились рисовать на плоскости правильные пятиугольники, у которых координаты всех вершин целые. Возьмём пятиугольник с *наименьшей* возможной стороной и заключим его в прямоугольную рамку, как мы это делали с квадратом. А теперь – фокус! На каждой стороне пятиугольника построим квадрат!

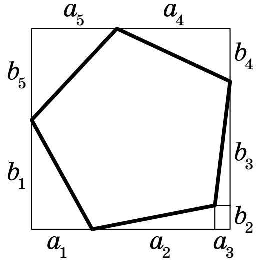
– Потрясающая картинка, – сказал дятел Спятел, нарисовав чертёж на песке. – С ума сойти можно!

– Тогда давай лучше рассуждать без этой сумасбродной картинки! – Бусенька отодвинулась. – На каждой стороне пятиугольника *мысленно* построим

квадрат и найдём его площадь S. Так как стороны пятиугольника равны, для каждой стороны мы получим одно и то же число S. Посмотрим на его чётность.

Если S чётно и делится на 4, то, как мы выяснили, у каждой стороны обе проекции чётны. Тогда можно считать, что и координаты всех вершин пятиугольника чётны. Поделив все координаты на 2, получим вдвое меньший пятиугольник, чего не может быть, поскольку наш пятиугольник самый маленький!

Если S чётно, но не делится на 4, то у каждой стороны пятиугольника обе проекции a и b нечётны. На нашей картинке получается, что левая сторона рамки состоит из двух нечётных отрезков b_1 и b_5, а правая сторона, равная ей, – из трёх нечётных отрезков b_2, b_3 и b_4. Это невозможно. Такое же противоречие получится, если пятиугольник будет вписан в рамку по-другому.

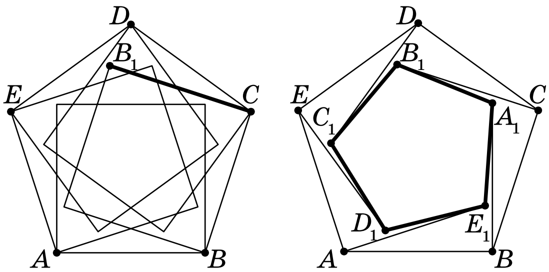


Осталось разобрать случай, когда S нечётно. Тогда сумма $S+S+S+S+S=5S$ (в неё входит по одному слагаемому S для каждой стороны) нечётна. Однако она имеет такую же чётность, что и сумма проекций всех сторон пятиугольника, которая равна периметру рамки, то есть чётному числу!

Таким образом, для любой чётности числа S мы получили противоречие. Значит, *не существует правильного пятиугольника, у которого все вершины целочисленные*! Но Злобнопотам – он же не настолько образованный! Он сам никогда до этого не догадается. Получается, что мы его обманываем?

– Это не обман, а военная хитрость! – возразил дятел Спятел. – Он не догадается не потому, что необразованный, а потому, что не использует голову по назначению! – Тут дятел Спятел бросил взгляд на сумасбродную картинку, задумался на секунду и продолжил уже более спокойно.

– На самом деле мы ведь не знаем, как думает Злобнопотам. Мы не можем залезть в его мозг – там слишком тесно! Но мы видели, что он прекрасно освоил выпиливание квадратов и, значит, дальше вполне бы мог рассуждать так, – дятел Спятел повернулся к сумасбродной картинке, взъерошил перья, наподобие того как Злобнопотам встопорщивал колючки на загривке, и продолжил, изображая рассуждающего Злобнопотама. – «Допустим, что мне удалось нарисовать правильный пятиугольник с вершинами в целых точках. Тогда, установив на лобзике подходящий угол и начав с целочисленной точки B, я могу – вжух! – сделать распил по стороне BC до целочисленной точки C. А если бы я в этот момент повернул лобзик на $90°$, как при выпиливании квадрата, я пропилил бы – вжух! – отрезок CB_1, второй конец которого, то есть точка B_1, тоже имеет целые координаты».



В результате этого умозрительного эксперимента Злобнопотам построил бы внутри пятиугольника точку B_1 с целыми координатами. Повторим эту конструкцию пять раз, беря вместо BC другие стороны пятиугольника. Мы получим – вжух! – маленький пятиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$ внутри исходного. Будем строить всё новые и новые пятиугольники и находить всё новые вершины с целыми координатами. Но в нашем исходном пятиугольнике конечное число таких точек, – трагически произнёс дятел Спятел, – когда-то они кончатся и наступит противоречие!

– Только обрати внимание на слова: «мы получим», «мы будем строить», – сказала Бусенька. – Это опять мы, а не Злобнопотам. Боюсь, Злобнопотам никакого противоречия не получит.

– У него был шанс! – не согласился дятел Спятел. – Думаю, пора проверить, как там наш герой.

Друзья снова вышли на берег. На берегу никого не было. А неподалёку от пилки для ногтей, ручного лобзика и большой двуручной пилы валялся со злостью разбитый аккумуляторный лобзик.

– Операция «Бензопила» успешно завершена, – грустно сказал дятел Спятел.

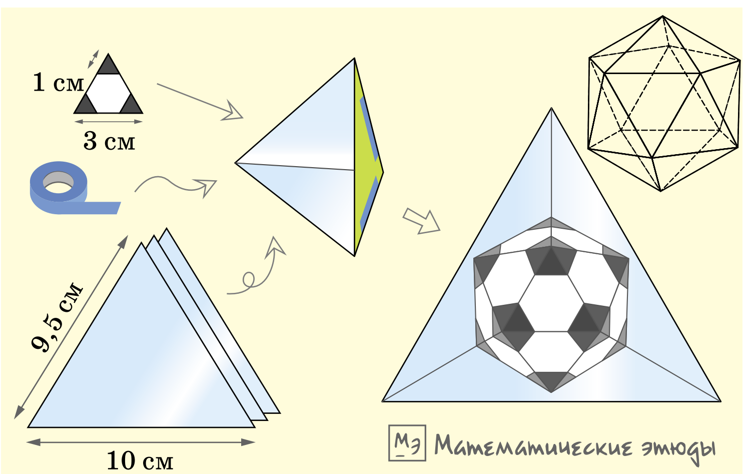
Художник Инга Коржнева

ЗЕРКАЛЬНЫЙ ИКОСАЭДР И ФУТБОЛЬНЫЙ МЯЧ

По материалам сайта etudes.ru

Приставьте три одинаковых зеркальных равнобедренных треугольника боковыми сторонами друг к другу, чтобы получился трёхгранный угол, зеркальный изнутри. Треугольники можно вырезать из пластика с зеркальным напылением и скрепить скотчем или изолентой вдоль боковых сторон – рёбер трёхгранного угла.

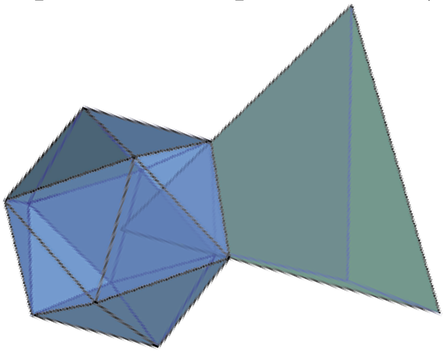
Теперь вырежьте из картона небольшой равносторонний треугольник, положите внутрь трёхгранного угла и загляните туда. Если основание зеркальных треугольников относится к боковой стороне как 10 к 9,5, вы увидите икосаэдр! Покачивая угол, можно рассмотреть икосаэдр с разных сторон.



Поверхность этого икосаэдра состоит из многократных отражений треугольника относительно зеркал. Обычный способ получить икосаэдр – взять 20 одинаковых правильных треугольников и скрепить их по сторонам, располагая вокруг каждой вершины по 5 треуголь-

ников, так чтобы получилось выпуклое тело. Эти треугольники называются *гранями* икосаэдра, а их стороны – *рёбрами*.

Вершина зеркального угла расположена в центре икосаэдра, который мы наблюдаем, а треугольные зеркала проходят через стороны одной из граней икосаэдра. Именно поэтому каждый зеркальный треугольник должен иметь такое же отношение сторон, как и треугольник с основанием – ребром икосаэдра и боковыми сторонами – радиусами описанной около икосаэдра сферы (а у такого треугольника отношение приближённо равно 10:9,5).



Теперь самое интересное! Перед тем как положить картонный треугольник в зеркальный угол, закрасим его в белый и чёрный цвета так, чтобы внутренняя белая область была правильным шестиугольником. (Для этого стороны чёрных треугольников надо взять в 3 раза меньше стороны картонного треугольника.) Тогда икосаэдр станет похож на футбольный мяч!

Ведь если у икосаэдра отсечь от каждой вершины маленькую пирамидку, получив многогранник, грани которого – правильные пятиугольники и шестиугольники, а потом надуть его, выйдет футбольный мяч.

Художник Максим Калякин

АНДРЕ ВЕЙЛЬ

Сергей Львовский

Окончание. Начало в № 8, 2018

Андре Вейль с женой Эвелиной, 1939 год

Выдающийся финский математик Ларс Альфорс (1907–1996). До Второй мировой войны работал в Финляндии, а после войны – в США. Андре и Эвелина Вейль гостили в семье Альфорса в 1939 году

Андре Вейль и война

В момент, когда началась Вторая мировая война и во Франции была объявлена всеобщая мобилизация, Андре Вейль с женой находились в поездке в Финляндии. Вейль был лейтенантом запаса; согласно французским законам, при объявлении мобилизации он был обязан самостоятельно явиться на сборный пункт. Вместо этого он остался в Финляндии.

Собственно, ещё за полтора года до этого, весной 1938 года, когда стало ясно, что дело идёт к войне, Андре Вейль твёрдо решил, что воевать он не будет. Вейль не был ни пацифистом, ни тем более сторонником Гитлера, но он был твёрдо убеждён, что эта война – не его дело. Он считал, что у каждого человека есть призвание, которому тот обязан (именно обязан!) следовать. В легендарные времена в древней Индии это призвание определялось кастой, в которой человек был рождён, а в наше время человек должен своё призвание понять. И бесспорно, по призванию Вейль был математиком, а вовсе не воином. Кроме того, Андре Вейль очень не любил военной пропаганды. Он с горечью вспоминал, как во время Первой мировой войны французские деятели науки и культуры публиковали статьи, в которых доказывали, что немецкие учёные и композиторы много ниже французских, а их немецкие коллеги писали аналогичные тексты, в которых немцы и французы менялись ролями. Наконец, Вейль не любил идти за толпой: он считал, что уклонившись от войны, он сможет хоть в небольшой степени побыть хозяином своей судьбы.

Жена Андре Вейля Эвелина вернулась во Францию к сыну, а Вейль остался в Финляндии. Они решили, что Андре отсидится какое-то время в нейтральной стране, а потом супруги воссоединятся и уедут в США. Выполнить этот план оказалось непросто.

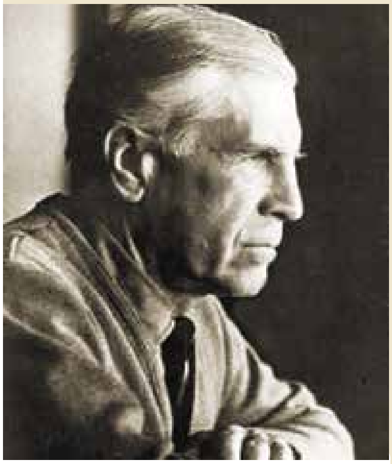
30 ноября 1939 года СССР начал войну с Финляндией, и обстановка в стране по понятным причинам стала нервозной. Неизвестно что делающий иностра-

нец стал вызывать подозрения – и Вейля арестовали. При обыске у него обнаружили показавшиеся подозрительными рукописи и адресованное ему письмо по-русски (от советского математика Л. С. Понтрягина). После этого сомнений не осталось: Вейль – советский шпион! Сам Вейль тоже вёл себя довольно опасно. Так, когда на допросе в контрразведке (разговор шёл по-немецки) ему в какой-то момент сказали: «Вы мне солгали», он не нашёл ничего лучше, чем в ответ указать на ошибку в спряжении глагола «лгать». Андре Вейлю всерьёз грозил расстрел; к счастью, финский математик Рольф Неванлинна за него поручился. От расстрела Вейль спасся, но финские власти рассудили, что в воюющей стране сомнительному иностранцу делать нечего: Вейля усадили в поезд, довезли до шведской границы и сдали с рук на руки шведским пограничникам.

Оставаться в Швеции у Вейля никаких оснований не было – единственным выходом для шведских властей было вернуть его во Францию. Вейля переправили в Англию; в Англии его арестовали и под конвоем отправили на корабле во Францию. Достойно упоминания, что в дороге Вейль порывался познакомить своего конвоира с ехавшим на том же пароходе знаменитым физиком Полем Ланжевеном.

По прибытии во Францию Вейля посадили в тюрьму, где он должен был дожидаться суда по обвинению в уклонении от призыва. В тюрьме он имел возможность переписываться, читать любимые книги и – главное – работать. Находясь в заключении, Вейль вычитал корректуру своей монографии про интегрирование в топологических группах, а также написал и отправил в «Доклады» Французской академии наук важную заметку, о которой ещё пойдёт речь. Вскоре после этого состоялся суд.

Вейля приговорили к пяти годам тюрьмы, но дали понять, что от наказания его могут освободить, если он попросится на фронт. Вейль такое прошение подал, и оно было удовлетворено. К этому моменту



Л.С.Понтрягин (1908–1988), в предвоенные и первые послевоенные годы – ведущий мировой специалист по топологии. Андре Вейль познакомился с Понтрягиным в 1935 году в Москве

Рольф Неванлинна (1895–1980), крупный специалист по комплексному анализу

Генерал Шарль де Голль (1890–1970).
В 1940 году отказался подчиниться соглашению о перемирии с Германией. Создатель организации «Сражающаяся Франция». В 1958–1969 годах – президент Франции

Маршал Филипп Петен (1856–1951).
В 1940 году заключил с Германией перемирие, равносильное капитуляции, и возглавил пронемецкое правительство в «свободной зоне». После освобождения Франции приговорён за государственную измену к расстрелу, заменённому пожизненным заключением из-за преклонного возраста

немцы вторглись во Францию и начали наступление. Вейль не успел принять участия в боях: часть, в которую его отправили, привезли на берег Ла-Манша, погрузили на корабль и эвакуировали в Англию.

В Англии нелепые события продолжились. Часть перевезённых из Франции военных собирались отправить морем во Французское Марокко, но из-за неразберихи группа, в которую входил Вейль, к отправлению опоздала, так что в Марокко вместо Вейля отправилось его личное дело.

К тому времени военная кампания во Франции пришла к печальному концу: Франция подписала с Германией перемирие на крайне тяжёлых условиях. Значительная часть страны была Германией оккупирована, а в оставшейся части (так называемая «свободная зона») немцы позволили сформировать пронацистское французское правительство, первое время обладавшее некоторой самостоятельностью. В частности, оно послало в Англию два плавучих госпиталя, чтобы забрать больных французских солдат. Вейль смог обманом попасть на один из этих кораблей и на нём вернулся во Францию.

Злоключения близились к концу. Вейлю удалось переправить Эвелину с её сыном из оккупированной зоны в «свободную» – первое время граница между зонами охранялась не эсэсовцами, а немецкой армией, и тут, к счастью, не обходилось без разгильдяйства и коррупции. Затем Вейль получил приглашение на работу в американский колледж. В марте 1941 года Андре, Эвелина и её сын Ален прибыли в Нью-Йорк, и на этом война для Андре Вейля закончилась.

Теоремы и гипотезы

Через несколько лет после приезда в США Вейль получил подходящую для математика его ранга работу в университете Чикаго, затем в Институте высших исследований в Принстоне, во Францию он тоже регулярно наезжал – словом, это была обычная карьера крупного учёного. Скажем теперь кое-что про его научные достижения.

Выше мы упоминали о короткой заметке, написанной Андре Вейлем в тюрьме. Эта заметка содержала формулировку и набросок доказательства чрезвычайно важного результата – так называемой «гипотезы Римана для кривых над конечным полем». Это был именно набросок: Вейль опирался на вспомогательное утверждение, доказывать которое он в тот момент не умел, но в ситуации, когда было неизвестно, что с ним будет дальше, он решил опубликовать незавершённую работу. Оказавшись в спокойной обстановке, Вейль принялся доводить эту работу «до ума». Для этого ему пришлось, ни много ни мало, по-новому изложить основания алгебраической геометрии! В 1946 году он публикует на эту тему трёхсотстраничную монографию, а в 1948, опираясь на неё, публикует, наконец, полное и подробное изложение своего результата 1940 года. Сейчас эта теорема Вейля также входит во все продвинутые учебники.


FRANCE COMBATTANTE

LAISSEZ-PASSER

No. 1663 Nom Mlle Weil

Prenoms Simone

Grade ou Profession Rédactrice

Bureau ou Service C.N.F

Londres le 30 Mars 1943

Le Chef du Service de Sécurité

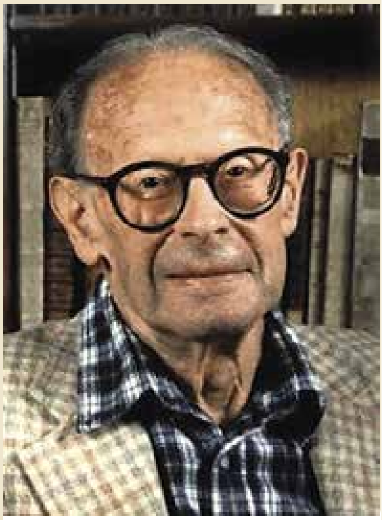
Удостоверение Симоны Вейль (1909 – 1943) – члена организации «Сражающаяся Франция». Эмигрировав в США, Вейль переправил туда своих родителей и сестру, но Симона вернулась в Англию, чтоб в «Сражающейся Франции» бороться с нацизмом

Доказав свою теорему, Вейль начал думать о том, как её обобщить. Опираясь на то, что он доказал для кривых, и на разбор некоторых других конкретных примеров, в 1949 году он выдвинул чрезвычайно дерзкую гипотезу, относящуюся уже не к кривым, а к многообразиям любой размерности. Если бы гипотезу Вейля (точнее, гипотезы: это не одно, а несколько связанных между собою утверждений) удалось доказать, то были бы установлены совершенно неожиданные связи между геометрией и арифметикой, но в момент, когда Вейль их формулировал, никто, включая его самого, не понимал, как это можно было бы сделать: похоже, для этого надо было определять совершенно новые математические понятия.

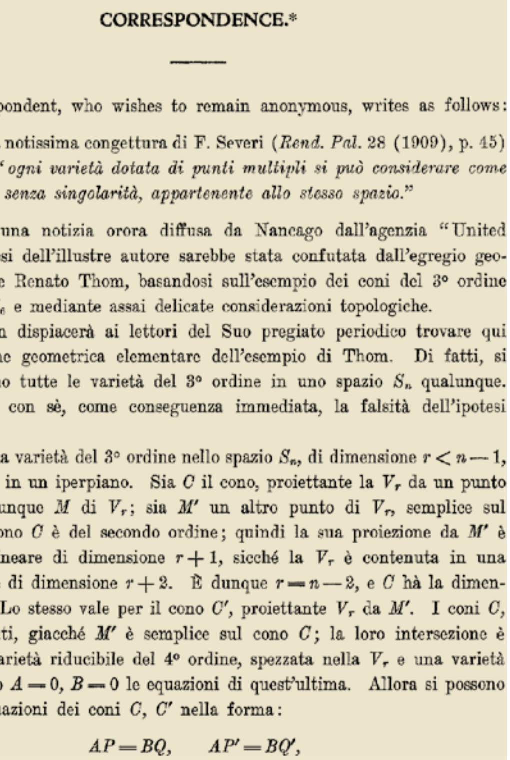

Симона Вейль

Казалось бы, что за доблесть выдвинуть лихую гипотезу, которую непонятно, как доказывать? Но тут и проявляется различие между графоманом и великим учёным, способным на предвидение: всё, что Вейль каким-то непостижимым образом угадал,

АНДРЕ ВЕЙЛЬ



Андре Вейль в старости



CORRESPONDENCE.*

pondent, who wishes to remain anonymous, writes as follows:

notissima congettura di F. Severi (*Rend. Pal.* 28 (1909), p. 45)
"ogni varietà dotata di punti multipli si può considerare come
senza singolarità, appartenente allo stesso spazio."

una notizia orora diffusa da Nancago dall'agenzia "United
si dell'illustre autore sarebbe stata confutata dall'egregio geo-
e Renato Thom, basandosi sull'esempio dei coni del 3° ordine
e mediante assai delicate considerazioni topologiche.
n dispiacerà ai lettori del Suo pregiato periodico trovare qui
ne geometrica elementare dell'esempio di Thom. Di fatti, si
o tutte le varietà del 3° ordine in uno spazio S_n qualunque.
con sè, come conseguenza immediata, la falsità dell'ipotesi

a varietà del 3° ordine nello spazio S_n, di dimensione $r < n-1$,
in un iperpiano. Sia C il cono, proiettante la V_r da un punto
unque M di V_r; sia M' un altro punto di V_r, semplice sul
ono C è del secondo ordine; quindi la sua proiezione da M' è
neare di dimensione $r+1$, sicché la V_r è contenuta in una
di dimensione $r+2$. È dunque $r = n-2$, e C hà la dimen-
Lo stesso vale per il cono C', proiettante V_r da M'. I coni C,
ti, giacché M' è semplice sul cono C; la loro intersezione è
arietà riducibile del 4° ordine, spezzata nella V_r e una varietà
$A=0$, $B=0$ le equazioni di quest'ultima. Allora si possono
azioni dei coni C, C' nella forma:

$$AP = BQ, \qquad AP' = BQ',$$

в дальнейшем подтвердилось. Сначала одну из этих гипотез доказал Б. Дворк, но к остальным гипотезам применить его метод не удалось. Затем А. Гротендик с учениками разработал те самые новые математические понятия, которые были необходимы для работы с гипотезами Вейля, и доказал ещё часть гипотез. Наконец, П. Делинь в 1974 году завершил доказательство гипотез Вейля в полном объёме. Многие считают, что (теперь уже бывшие) гипотезы Вейля – главное достижение алгебраической геометрии XX века.

Скажем ещё об одной гипотезе, связанной с именем Андре Вейля, — гипотезе Таниямы–Вейля. Она более известна широкой публике, чем гипотезы Вейля 1949 года, поскольку именно из неё вывели великую теорему Ферма. Первоначально эту гипотезу выдвинул японский математик Ю. Таниямa, но после этого Андре Вейль предположил, что выполняется существенно более точное утверждение, чем гипотеза Таниямы, и именно это более точное утверждение в конце концов было доказано (опять предвидение!).

В 1986 году умерла Эвелина, и это стало для Вейля тяжёлым ударом. В посвящённой её памяти книге «Воспоминания об ученичестве» Вейль пишет, что учился всю жизнь и продолжает учиться даже сейчас – он учится жить воспоминаниями.

Умер Андре Вейль в 1998 году.

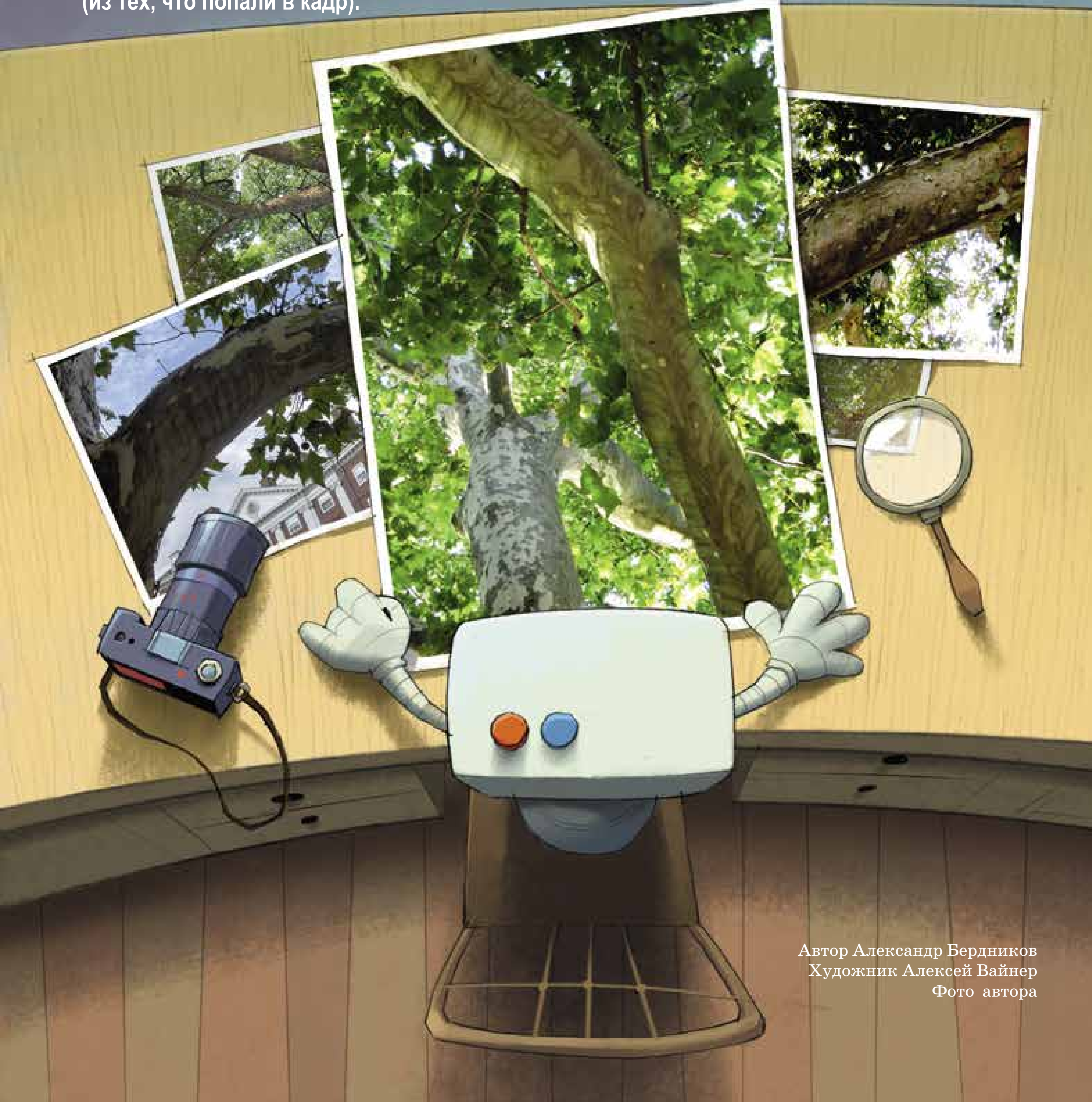
Эпилог

В 1957 году Андре Вейлю довелось доказать полезную, но очень простую теорему из алгебраической геометрии. К тому же её доказательство было совсем элементарным. Решив, что публиковать такое от своего имени будет несолидно, Вейль оформил статью в виде анонимного письма в редакцию одного из математических журналов. Само доказательство он изложил в стиле итальянских алгебраических геометров начала XX века. И всё это он написал по-итальянски!

ВЕТКА ДЕРЕВА

Квантик, стоя под деревом, увидел над собой коричневую ветку со странными «полосатыми» узорами. Ветка росла более-менее горизонтально, иногда изгибаясь вверх или вниз. Квантик сделал её фото, направив камеру вертикально вверх (толщина ветки – около 10 см, слева виден светлый ствол дерева). Заодно он сфотографировал ещё нескольких веток с похожими узорами.

Помогите Квантику по фотографии найти у коричневой ветки самое высокое место (из тех, что попали в кадр).



Автор Александр Бердников
Художник Алексей Вайнер
Фото автора

Ольга Кузнецова

На вкус и на цвет

Прадедушка был удивлён, застав Веронику перед горой фантиков от конфет.

– Это моя любимая коллекция, – похвалилась она.

– А я думал, мы с тобой лингвистику любим, – пожал плечами прадедушка.

– Так ведь фантики лингвистике не мешают! Даже помогают, вот смотри, сколько тут фантиков с красивыми узорами. А *узор* – это что? То, что можно *узреть*, увидеть! Ты сам говорил, что умение видеть, как устроены слова, – способность лингвиста!

– Ты, значит, очень зоркая? – улыбнулся прадедушка. – Тогда предлагаю игру на узоркость. Я описываю фантик, а ты его находишь.

– Легче лёгкого!

– Тогда найди-ка мне тот, который связан с пятками.

– Вот это загадал. Розовый, что ли?

– Ещё он связан с *тычинками*.

– Это явно неродственные слова. *Тычинки* – от слова *ткнуть*?

– Верно, *тычинки* и *тычины* (палки) происходят от *тыкать*, *ткнуть*. Отсюда же название одного знака препинания.

– *Точка* – место, куда ткнули, – догадалась Вероника, — а пятки оставляют следы, *пятна*. Значит, этот фантик в точечку или пятнышко!

– А я знаю ещё узоры, которые притворяются растениями! – вспомнила Вероника. – *В огурцах*, например. Это как закруглённая капля. Потом ещё бывает узор *в ёлочку*, *в яблоках* и *в горошек*!

– Правильно, но один из них не может быть узором для фантика.

Какой?

– А этот у тебя какой-то арлекинский, – сказал прадедушка, разглядывая очередной экспонат из коллекции.

– Дай-ка, – Вероника поднесла фантик поближе к глазам в надежде увидеть на нём хоть одного арлекина.

– *Арлекинский* по расцветке, – пояснил прадедушка, – сейчас ещё говорят *клоунский*, *попугайский* – то есть пёстрый, цветной. Попробуй теперь найти *канареечный* фантик.

– Это с птицами или это цвет такой? – задумалась Вероника. – Наверное, он жёлтый, как канарейка?

– Точно. А ты знаешь другие цвета, связанные с птицами?

– *Малиновый*, он от *малиновки* произошёл?

– Наоборот, птицу назвали по цвету. Зато *голубой* назван так по расцветке *голубя*. А можешь найти *мариновый* фантик?

– Какие-то у тебя цвета несовременные. Сейчас так не говорят!

– Ты права, но в современном языке есть родственные слова, с помощью которых можно догадаться.

– У нас в классе две Марины, но у одной тёмные волосы, а у другой – рыжие. Как разобраться?

– Надо понять, что это за имя такое, *Марина*.

– Почти как субмарина, подводная лодка.

– Правильно. Приставка *суб-* как раз значит *под-*.

– Значит, мариновый – это морской? Как цвет морской волны! А маринованные огурцы почему так называются?

– Из-за рассола. Древние римляне мариновали в морской воде. Кстати, сумеешь найти *аврорный* фантик?

– «Аврора» – это же крейсер! У меня нет фантиков с кораблями, – огорчилась Вероника.

– Подумай, почему корабли так называли. Что значит *Аврора*?

– Богиня какая-то.

– Древнеримская богиня зари. С каким цветом она может быть связана?

– Если заря, то розовый или оранжевый... Слушай, а *оранжевый* – он от апельсина произошёл?

– Произошёл, только не от русского, а от французского слова *оранж*.

– Я так и думала, в английском похоже!

– Догадываешься, откуда взялось название цвета *коричневый*?

– От *корицы*! – выпалила Вероника. – Корица же коричневая! Обожаю булочки с корицей. Надо же, сколько съедобных цветов! Вишнёвый, шоколадный, кремовый... Вкуснятина! А сиреневый и розовый – это вообще цвета от цветов. Интересно, если я скажу ребятам, что у меня есть фантик в сиреневый или розовый цветочек, то про что они подумают? Про цвет или про вид цветка?

– Скорее всего, про цвет, но ты можешь провести эксперимент в классе.

Догадайтесь, какие современные названия цветов соответствуют устаревшим *зольный, муравый, нагой?*

Художник Ольга Демидова

XXIV турнир математических боёв имени А.П. Савина

Материал подготовил Александр Блинков

Избранные задачи

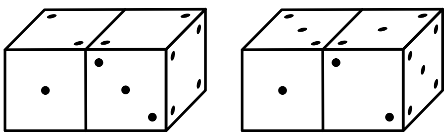
Ежегодно в конце июня школьники из многих городов съезжаются на летний турнир имени А. П. Савина. Мы приводим подборку избранных задач турнира 2018 года. После номера задачи указаны её автор и классы, в которых она предлагалась.

1. (*С.Токарев*, 5–6) В турнире матбоёв участвовали команды 5-х классов и команды 6-х классов. Пятиклассники выиграли на 7 боёв больше и проиграли на 13 боёв больше, чем шестиклассники. Кто выиграл больше боёв между командами 5-го и 6-го классов – пятиклассники или шестиклассники – и на сколько?

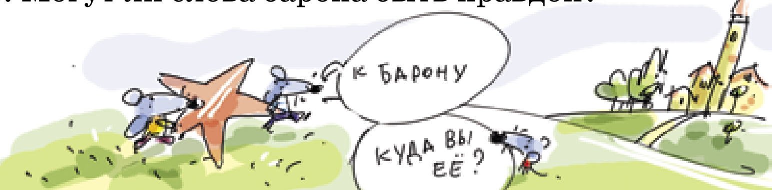
2. (*С.Токарев*, 5–7) Сто спортсменов заняли места с 1-го по 100-е. После того, как некоторые из них были дисквалифицированы за допинг, все остальные передвинулись на различное количество мест. Каково наименьшее возможное количество дисквалифицированных?

3. (*Д.Шноль*, 5–8) Саша и Женя идут по лыжне с одинаковыми скоростями. Если Саша остановится, то Женя догонит её через одну минуту. Навстречу им едет трактор со скоростью в два раза большей, чем у лыжниц. При приближении трактора лыжница останавливается и 10 секунд ждёт, пока трактор проезжает мимо неё (после чего лыжница продолжает движение). После трактора, уничтожающего лыжню, лыжницы идут в два раза медленнее. Через какое время после того, как Женя снова начнёт движение, она догонит Сашу? (Саша прокладывает лыжню, на которую выйдет Женя.)

4. (*А.Шаповалов*, 5–6) Есть два игральных кубика (возможно, не одинаковых), у каждого на гранях отмечено по 1, 2, 3, 4, 5 и 6 точек. Их два раза расположили по-разному и сфотографировали (см. рисунок). Известно, что суммарное количество точек на паре задних граней оба раза одинаковое. Чему оно равно?



5. (*А.Грибалко*, 7) Барон Мюнхгаузен заявил, что способен разрезать правильную пятиконечную звезду на две части и сложить из них многоугольник, который имеет центр симметрии (не переворачивая при этом части). Могут ли слова барона быть правдой?



6. (*С.Токарев*, 5–8) На доске написаны 7 единиц. За один шаг можно выбрать любые два числа и заменить каждое из них на их сумму. Можно ли такими заменами получить 7 других равных чисел на доске?

7. (*А.Шаповалов*, 7) Каждая грань кубика размером $2 \times 2 \times 2$ разбита на единичные квадраты. Какое наибольшее число сторон этих квадратов можно закрасить так, чтобы покрашенные отрезки не соприкасались концами?

8. (*С.Токарев*, 6–7) Разрежьте проволочный каркас куба на наименьшее количество частей, из которых можно спаять каркасы двух кубов, если сгибать проволоку: а) нельзя; б) можно.

9. (*С.Токарев*, 6–7) Число ДЮЖИНА делится на 12, а число ГРОСС делится на 144. Найдите С.

(*Гросс*, от нем. *groß – большой*, – старая мера счёта, равная дюжине дюжин.)

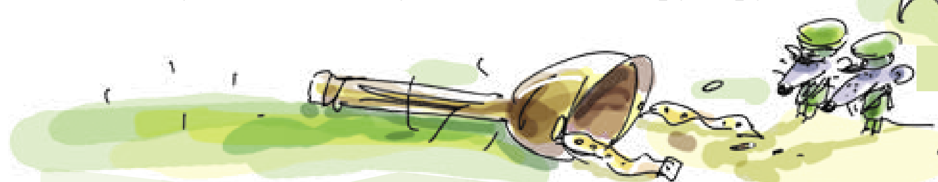
10. (*Е.Бакаев*, 6) На доске записаны числа 1, 2, ..., 1000. Одним действием можно стереть с доски ровно четыре числа: какое-нибудь число X; одно из чисел, отличающихся от X на 1; одно из чисел, отличающихся от X на 10; одно из чисел, отличающихся от X на 100. Можно ли за несколько действий стереть все числа?

11. (*М.Волчкевич*, 7–8) В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ на диагонали AD отмечена точка P, равноудалённая от вершины F и середины стороны AB. В каком отношении точка P делит AD?

Художник Сергей Чуб

12. (*А.Пешнин*, 7–8) Назовём семиугольник ***прямоугольным***, если у него есть четыре прямых угла. Докажите, что любой прямоугольный семиугольник можно разрезать на семь прямоугольных семиугольников.

13. (*М.Хачатурян*, 5–6) Утром пограничники обнаружили на перекопанной полосе 45 следов левых ног, 44 правых и 6 следов деревянного протеза, который, судя по отпечатку, принадлежит Одноногому Джо. Сколько нарушителей ночью перебежали границу? Длина шага у всех одинаковая, ширина полосы постоянна, все нарушители пересекали её кратчайшим путём и не наступали на следы друг друга.



НАШ КОНКУРС, XI ТУР

(«Квантик» № 7, 2018)

51. *Двум братьям сейчас 25 и 36 лет. Они заметили, что оба их возраста одновременно являются точными квадратами. Могло ли с ними такое быть и раньше?*

Ответ: да. Если сейчас у братьев разница возрастов 11 лет, то в другие дни года она может быть 10, 11 или 12 лет. Перебирая все пары точных квадратов от 1 до 36, найдём ещё лишь одну пару с такой разницей: 4 и 16.

52. *По контуру клетчатого квадрата 11×11 отмечены узлы сетки. Играют двое. Первый проводит во внутренней клетке квадрата диагональ, один конец которой уже отмечен, а второй конец – ещё нет, и отмечает второй конец. Второй игрок проводит диагональ клетки, соединяющую отмеченные узлы. Запрещается в одной клетке проводить две диагонали. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто из игроков может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?*

Первый может выиграть, если первым ходом проведёт диагональ из угловой клетки квадрата, а дальше будет её продолжать. Второй тогда сможет сделать лишь 5 ходов.

53. *Два джентльмена прогуливаются по бульвару. Они начали прогулку одновременно из противоположных концов и впервые встретились в 50 метрах от середины бульвара. Дойдя до конца бульвара, каждый сразу поворачивает и идёт обратно с той же скоростью. Джентльмены встретились лицом к лицу ещё дважды, после чего один догнал другого в конце бульвара. Найдите длину бульвара.*

Ответ: 700 м. Один прошёл бульвар столько раз, сколько встретился лицом к лицу со вторым, а второй прошёл бульвар на один раз больше, когда догонял первого. Значит, их скорости относятся как 3 к 4. Поделив бульвар на 7 равных частей, отметим расстояние от середины бульвара до точки их первой встречи. Оно равно половине одной части или 50 м по условию. Значит, длина бульвара $50\,\text{м}\times14=700\,\text{м}$.

54. *Можно ли так «перемешать» кубик Рубика, что все цвета останутся прежними, кроме центральных квадратиков – те поменяют цвет на цвет противоположного квадратика?*

Ответ: нет. Покажем, что можно считать, будто центральные квадратики граней насажены на «иглы ежа»: этот «ёж» (белый на рисунке 1) представляет собой 6 стержней, торчащих из одной точки вверх-вниз, вправо-влево и вперёд-назад.

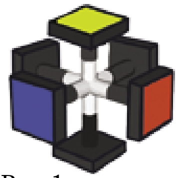


Рис. 1

Когда мы вращаем боковую грань, её центральный квадратик просто крутится на своей иголке, а сам ёж остаётся неподвижным, и концы иголок сохраняют свой цвет. Когда мы повернём среднюю грань, мысленно можно считать, что мы повернули и боковые иголки (их цвет от этого не изменится), то есть можно считать, что мы повернули всего ежа целиком.

Итак, ёж не мешает «перемешиваниям» кубика, и можно считать, что ёж двигается при этом как единое целое (кстати, кубик Рубика обычно так и устроен). Будем следить только за ежом и цветом концов его иголок (остальные детали кубика мысленно можно удалить).

Расположим ежа так: жёлтый квадратик вверху, на нас смотрят соседние синий и красный квадратики именно в этом порядке (рис. 1).

Если поменять все центральные квадратики на противоположные, жёлтый квадратик окажется внизу, синий и красный квадратики снова будут соседями, и если повернуть их к нам, снова слева будет синий, а справа красный. Но если теперь перевернуть кубик жёлтым квадратиком вверх, синий и красный квадратики будут смотреть на нас в другом порядке: слева красный, справа синий (рис. 2). Другими словами, ёж с раскрашенными концами иголок перейдёт в своё зеркальное отражение.

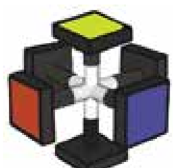


Рис. 2

Попробуем первого ежа (с цветными концами) совместить со вторым. Расположим оба «ежа» жёлтыми квадратиками вверх, синими – прямо на нас. Тогда красные квадратики у «ежей» не совместятся (в одном случае красный будет справа от синего, а в другом – слева). Значит, даже ежей совместить нельзя, и тем более – из кубика получить такой же с перекрашенными центральными квадратиками.

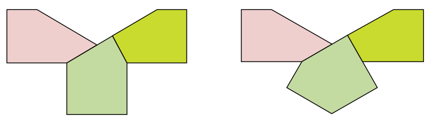
Свойство не совмещаться со своим зеркальным отражением называют *хиральностью*: им обладают наши руки, многие молекулы (см. статью «У зеркала», «Квантик» № 6, 2017).

55. *В непрозрачном мешке лежат в беспорядке фигурки пентамино 12 разных цветов,* *по 12 комплектов каждого цвета, – всего 1728 фигурок. Незнайка наугад достаёт одну за другой пентаминошки из мешка. Его цель – либо отыскать по одному экземпляру 12 фигурок разной формы (не важно, какого цвета), либо 12 каких угодно одноцветных фигурок, либо 12 одинаковых по форме фигурок каких угодно цветов. Какое наименьшее число фигурок должен вытащить Незнайка, чтобы гарантированно достичь цели?*

Ответ: 122. Если он вытащит всего 121 фигурку, то может случиться так, что среди них окажется по 11 разных фигурок 11 разных цветов, и цель достигнута не будет. Если же вытащены 122 фигурки, то либо среди них есть все формы фигурок (и тогда Незнайка собрал по одному экземпляру), либо какой-то формы нет. Тогда на не более чем 11 форм приходится 122 фигурки, поэтому какая-то форма представлена не менее чем 12 экземплярами.

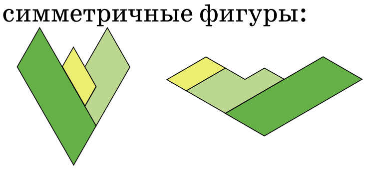
«ПЕРЕСТРОЙ-ка!» И ДРУГИЕ ГОЛОВОЛОМКИ («Квантик» № 8, 2018)

«СИММЕТРИКС 11–12»

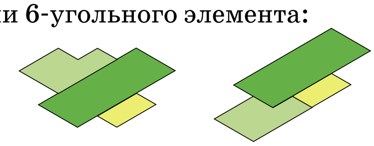


«ПЕРЕСТРОЙ-ка»

Просто симметричные фигуры:



Следующие две фигуры (с разным типом симметрии) получаются одна из другой при перемещении 6-угольного элемента:



ВЕТКА ДЕРЕВА

Полосы на остальных фото напоминают следы от стекающей по стволу жидкости: они направлены так, как стекала бы вода. Этого достаточно, чтобы разобраться с аналогичными полосами на коричневой ветке. Ведь тогда полосы, обогнув бока ветки, направляются вниз вдоль по ней. Поэтому место, от которого полосы расходятся (отмечено красным), самое высокое.

НА ВКУС И НА ЦВЕТ

Узоры *в горошек*, *в ёлочку*, *в огурцах* могут быть расцветкой, но *в яблоках* – относится только к масти лошадей. *Зольный* – серый (пепельный), *муравый* – зелёный (как трава-мурава, но не от слова *муравей*), *нагой* – телесный.

XXIV ТУРНИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ БОЁВ ИМЕНИ А. П. САВИНА. Избранные задачи

1. Ответ: шестиклассники выиграли на 3 боя больше.

Пусть перед турниром у всех пятиклассников в сумме было столько же конфет, сколько у шестиклассников, а после боя побеждённая команда отдаёт победителю конфету. Сравним количество конфет у пятиклассников и у шестиклассников после турнира. Ничейные бои и бои между командами одного и того же класса не изменили количество конфет у пятиклассников и шестиклассников. Пятиклассники получили на 7 конфет больше, чем шестиклассники, а отдали на 13 конфет больше, чем шестиклассники. Следовательно, у них стало на $13-7=6$ конфет меньше, чем у шестиклассников. Так как каждый бой, где шестиклассники победили пятиклассников, увеличивает разницу на две конфеты, то таких боёв было на 3 больше, чем боёв с противоположным исходом.

2. Ответ: 50.

Оценка. Рассмотрим двух спортсменов, занявших соседние места. Если их обоих не дисквалифицируют, то они по-прежнему будут занимать соседние места и передвинутся на одинаковое количество мест. Таким образом, хотя бы одного из них должны дисквалифицировать. Следовательно, количество дисквалифицированных должно быть не меньше 50.

Пример. Если дисквалифицируют всех спортсменов, стоявших на нечётных местах, то спортсмен, занимавший место $2N$, займет место N. Таким образом, оставшиеся передвинутся на различное количество мест.

3. Ответ: через 3 минуты. Поскольку трактор движется вдвое быстрее Жени, скорость их сближения втрое быстрее скорости Жени. То есть Женя остановится, уступая дорогу трактору, через 20 секунд после того, как остановилась Саша. Пропустив трактор, Женя дойдёт до места, где Саша пропускала трактор, за 80 секунд по целине (так как по лыжне дошла бы за 40 секунд). К этому моменту Саша прокладывала лыжню после встречи с трактором уже $80+20=$ $=100$ секунд, так как она потратила столько же времени на пропуск трактора, сколько и Женя.

После этого скорость Жени будет вдвое больше скорости Саши, то есть скорость сближения будет равна скорости Саши, и они встретятся ещё через 100 секунд.

4. Ответ: 8. Рассмотрим два случая расположения кубиков: 1) слева оба раза лежит один и тот же кубик; 2) кубики поменяли местами.

1) Этот случай не удовлетворяет условию, так как у левого кубика на задней грани одно и то же количество точек на каждом фото, а у правого кубика на задней грани на разных фото количество точек различается. Следовательно, суммарное количество точек на паре задних граней не может быть одинаковым.

2) У левого кубика на первом фото грани с 1 и 2 точками соседние. Запомнив, как именно расположены точки на этих гранях (друг относительно друга), посмотрим на этот же кубик на втором фото (там он справа). Ясно тогда, что напротив единичной точки может быть только 3 точки, а напротив двух точек – либо 4, либо 6.

Аналогично, у другого кубика напротив трёх точек – либо 5, либо 6, а напротив одной точки – 2. Тогда сумма точек на задних гранях на левом фото: 8 или 9, а на правом: 6 или 8.

Значит, искомое количество точек равно 8.

5. Ответ: могут. Пример приведён на рисунке 1.

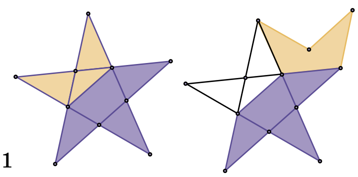


Рис. 1

6. Ответ: нельзя. После первого шага на доске будет 5 единиц и 2 двойки. Далее после каждого шага, очевидно, сохраняется такое свойство: количество наибольших чисел на доске чётно. Поэтому 7 равных чисел получить нельзя.

7. Ответ: 12. Заметим, что любая сторона единичного квадрата – это отрезок с концом в середине ребра данного куба. В кубе 12 рёбер и каждая середина ребра может быть использована не более одного раза. Значит, можно покрасить не более 12 отрезков, соблюдая требуемое условие.

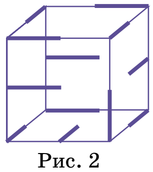


Рис. 2

На рисунке 2 приведён пример, когда покрашенных отрезков ровно 12.

8. а) Так как проволоку сгибать нельзя, после спайки должны получиться кубы с меньшей длиной ребра. Тогда каждое ребро куба должно быть разрезано. Значит, частей не меньше, чем 8 (количество вершин куба).

Разрезав каждое ребро посередине, получим 8 одинаковых частей (рис. 3, *а*). Из каждых четырёх можно спаять куб, не сгибая проволоку (рис. 3, *б*).

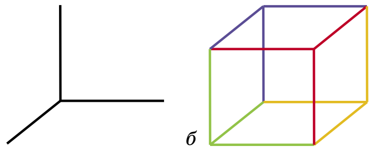


Рис. 3 *а* *б*

б) Достаточно разрезать на две части. Покажем два различных способа, считая, что ребро данного куба имеет длину 2.

Первый способ. Разрежем куб, «перекусив» пополам четыре параллельных ребра. Получим две одинаковые фигуры в виде «столика»: столешница – квадрат со стороной 2 и четыре ножки длины 1 (рис. 4, *а*). Покажем, как из этой фигуры спаять каркас единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4, *б*). Из столешницы согнём контур $AA_1B_1BCC_1D_1DA$, а ножки пойдут на четыре оставшихся ребра.

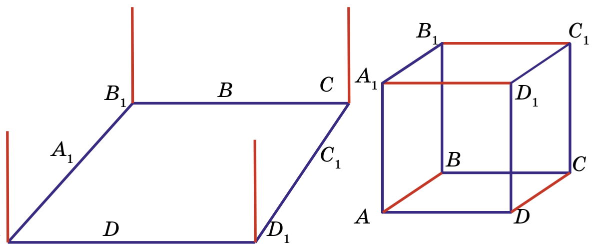


Рис. 4 *а* *б*

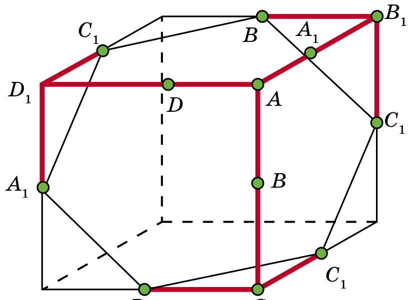


Рис. 5

Второй способ. Разрежем куб плоскостью, сечение которой – правильный шестиугольник. Получатся две одинаковые части. На рисунке 5 показано, в каких точках надо согнуть одну из частей (красную), чтобы получился каркас единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (точки с одинаковыми названиями надо совместить).

9. Ответ: 0. Так как оба числа делятся на 3, то суммы цифр в числах ДЮЖИНА и ГРОСС также делятся на 3. Следовательно, и сумма этих сумм делится на 3. В этой сумме участвуют десять различных букв, причём буква С – дважды. Следовательно, такая сумма равна С + (0 + 1 +... + 8 + 9) = С + 45, откуда следует, что С кратно трём. Кроме того ГРОСС делится на 4, поэтому С = 0.

Числа из условия существуют, например, ДЮЖИНА = 345978, ГРОСС =21600.

10. Ответ: можно. Возьмём 1000 одинаковых кубиков. Расположим 100 кубиков в виде квадрата размером 10×10 и впишем в них числа от 1 до 100 (в первой строке – числа от 1 до 10 по возрастанию, во второй – от 11 до 20 по возрастанию, и т.д.). В следующие 100 кубиков впишем числа от 101 до 200, расположив их аналогично, после чего наложим этот квадрат 10×10 вторым слоем на предыдущий. Аналогично создадим третий слой, четвёртый, и т.д., до десятого. Получим куб размером $10\times10\times10$, в котором числа, стоящие в соседних кубиках одного слоя, отличаются на 1 или на 10, а числа в соседних кубиках разных слоёв – на 100.

Рассмотрим произвольный кубик размером $2\times2\times2$. Зачеркнём число в одном из составляющих его единичных кубиков и в трёх соседних с ним (они как раз отличаются на 1, 10 и 100). Останется 4 единичных кубика, которые также можно вычеркнуть одним действием, согласно условию задачи. Таким образом, двумя действиями можно вычеркнуть весь кубик $2\times2\times2$, а куб $10\times10\times10$ на такие кубики легко разбивается.

11. Ответ: $AP:PD=3:1$. Пусть O – середина AD (центр правильного шестиугольника), K – середина AB. Из условия задачи и симметрии относительно AD следует, что $PK=PF=PB$ (рис. 6). Значит, треугольник BPK – равнобедренный.

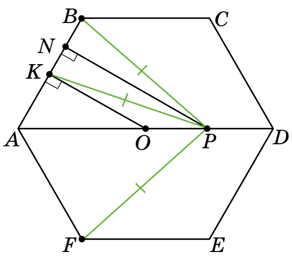


Рис. 6

Проведём отрезок OK и высоту PN треугольника BPK, которая является и его медианой. Так как $OK\perp AB$, то $OK\,||\,PN$. Тогда $AO:OP=AK:KN=2:1$ по теореме о пропорциональных отрезках. Так как $AO=OD$, то $AP:PD=3:1$.

Вместо теоремы о пропорциональных отрезках можно также использовать тот факт, что $\angle APN=30°$, поэтому $AP=2AN=\frac{3}{2}AB=\frac{3}{4}AD$.

12. Заметим, что у прямоугольного семиугольника есть хотя бы два соседних прямых угла. Следовательно, от него можно отрезать прямоугольник и оставшаяся часть будет опять же прямоугольным семиугольником. Прямоугольник можно разрезать на три прямоугольника, а каждый прямоугольник разрезать на два прямоугольных семиугольника, например, так, как показано на рисунке 7.

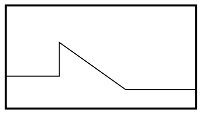


Рис. 7

13. Ответ: 9 нарушителей. Всего было оставлено 95 следов. У Джо – 6 следов протеза, значит, другая нога могла оставить 5, 6 или 7 следов (в сумме – от 11 до 13 следов у Джо). Тогда возможны 4 варианта пересечения полосы нарушителями. Нарушители могли сделать: 1) одни 10 шагов, а другие – 11; 2) одни 11 шагов, а другие – 12; 3) одни 12 шагов, а другие – 13; 4) одни 13 шагов, а другие – 14.

Рассмотрим каждый из вариантов, «разложив» 95 на сумму: сколько нарушителей сделали первое число шагов, и сколько – второе. Несложно установить (с помощью перебора или оценки), что для каждого варианта существует не более чем один способ:

1) $95=10\cdot4+11\cdot5$; 2) $95=11\cdot1+12\cdot7$;
3) невозможно; 4) $95=13\cdot3+14\cdot4$.

В зависимости от того, какую ногу Джо заменяет протез, всего отпечатков левых и правых ног было либо 45 и $44+6=50$, либо $45+6=51$ и 44 соответственно. Нарушители, сделавшие чётное количество шагов, сделали поровну шагов левой и правой ногой. А те, кто сделали нечётное количество шагов, меняют разницу между общим количеством левых и правых отпечатков на 1. Значит, количество нарушителей, сделавших нечётное количество шагов, не меньше разности между количеством левых и правых отпечатков, то есть не меньше чем 5 в первом случае и не меньше чем 7 во втором. Следовательно, возможен только первый вариант: 9 нарушителей, из которых четверо сделали по 10 шагов и пятеро – по 11.

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Итоги прошлого конкурса будут опубликованы в 11-м номере. А теперь мы начинаем конкурс 2018–2019 учебного года!

Высылайте решения задач I тура, с которыми справитесь, не позднее 1 октября в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: v.ht/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

I ТУР

1. В клетчатом квадрате 6×6 можно зачеркнуть 9 клеток так, чтобы не было 5 незачёркнутых клеточек подряд ни по горизонтали, ни по вертикали (см. рисунок). А можно ли зачеркнуть всего

а) 8 клеток; б) 7 клеток;

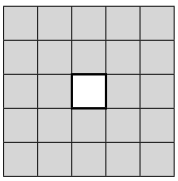
в) 6 клеток так, чтобы выполнялось то же условие?

2. У входа в парк развлечений висит электронное табло, показывающее время (часы и минуты). Когда табло показало 9:00, в парке открылись шесть аттракционов и работали до вечера по 1, 2, 3, 4, 5 и 6 минут соответственно с минутным перерывом. Когда Олег пришёл днём в парк, ни один аттракцион не работал. Какое время показывало электронное табло в этот момент?

Авторы: Соня Голованова и Юрий Маркелов (1),
Евгений Братцев (2), Сергей Костин (4), Игорь Акулич (5)

3. Квантик написал 100 различных натуральных чисел, а Ноутик написал число, делящееся на каждое из них. Докажите, что число Ноутика хотя бы в 100 раз больше самого маленького числа у Квантика.

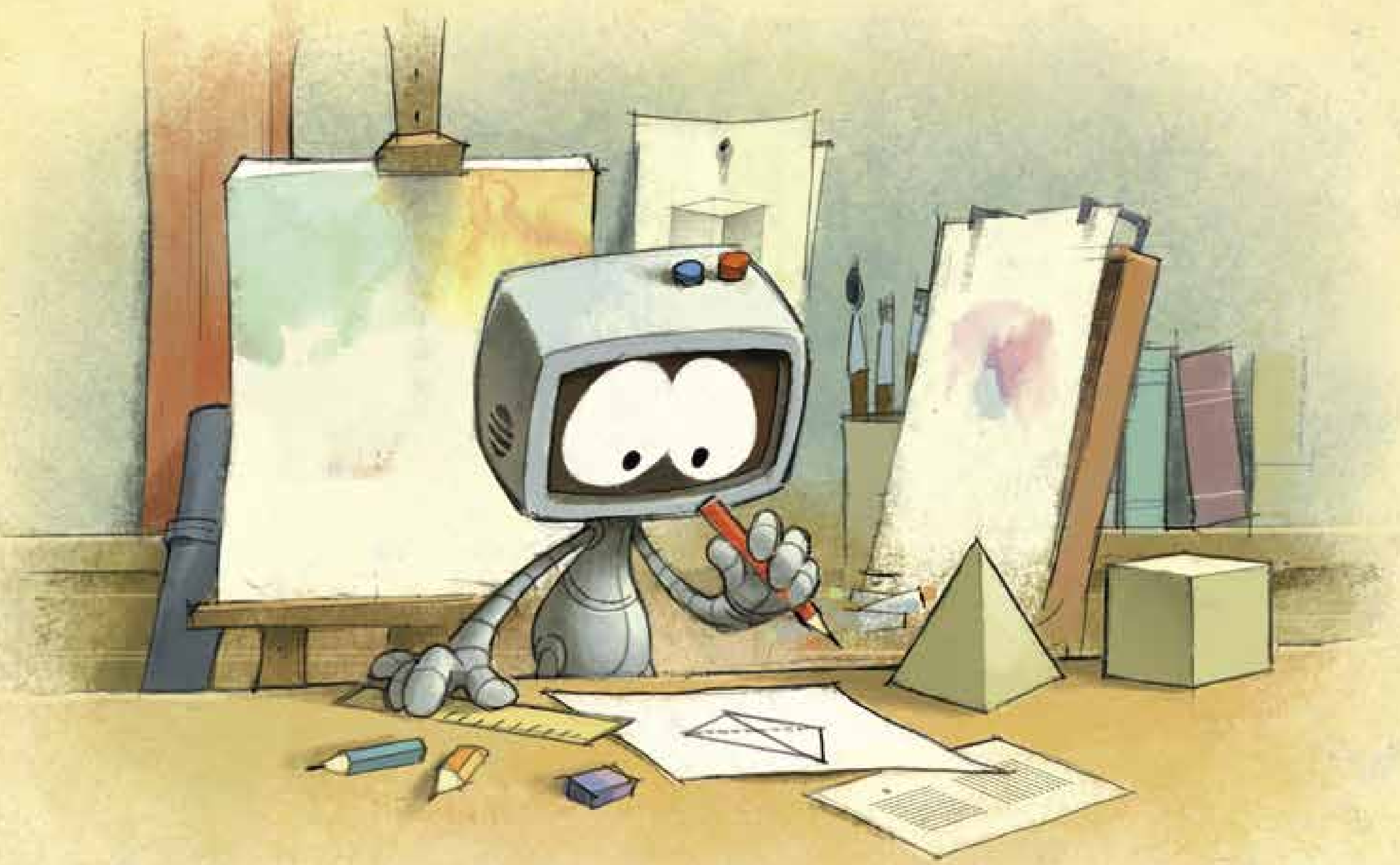
4. Разрежьте квадрат 5×5, в центре которого вырезано отверстие 1×1, на три фигуры с равными периметрами и равными площадями.



5. а) Квантик и Ноутик показывают такой фокус. Зритель задумывает любые шесть разных целых чисел от 1 до 125 и сообщает их только Ноутику. После этого Ноутик называет Квантику какие-то пять из них, и Квантик угадывает шестое задуманное зрителем число. Предложите способ, как могли бы действовать Квантик и Ноутик, чтобы фокус всегда удавался.

б) Сумеют ли фокусники добиться успеха, если зритель сам указывает Ноутику, какие пять из шести задуманных им чисел Ноутик должен назвать Квантику?

Художник Николай Крутиков

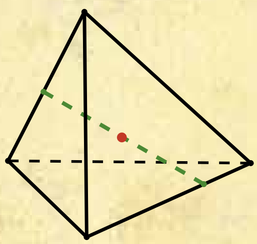


С ПУСТОТАМИ ИЛИ БЕЗ?

Квантик нарисовал выпуклый многоугольник и легко заштриховал его, проводя отрезки с концами на сторонах многоугольника.

Потом он подумал – а можно ли заштриховать любой выпуклый многогранник (вместе с внутренностью), проводя отрезки с концами на его рёбрах? Или для каких-то многогранников это не удастся и внутри останутся незаштрихованные пустоты?

Другими словами: верно ли, что для каждой точки внутри любого выпуклого многогранника найдётся отрезок с концами на рёбрах многогранника, проходящий через эту точку (см. рисунок)?



Решите задачу для треугольной пирамидки (у неё 6 рёбер), куба (у него 12 рёбер) и попробуйте разобраться с общим случаем.

Из старых задач с подготовительных сборов к Международной математической олимпиаде

Художник Алексей Вайнер

ISSN 2227-7986
9 772227 798183 18009