№ 6 | июнь 2015

Издаётся при поддержке Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО)

e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№6
ИЮНЬ
2015

ЧУДАК-ЧАСОВЩИК

ЦВЕТНЫЕ ТЕНИ

УГОЛ В КВАДРАТЕ

Enter

ДОРОГИЕ ДРУЗЬЯ!

Вы можете оформить подписку на «Квантик» в любом отделении Почты России. Подписаться на следующий месяц можно до 10 числа текущего месяца. Наш подписной индекс **84252** по каталогу «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать».

Почтовый адрес:
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д.11, журнал «Квантик».

Кроме журнала, «Квантик» выпускает:

Альманахи – материалы журналов за очередное полугодие в едином издании; вышли в свет уже 5 выпусков!

Плакаты – в комплекте 10 плакатов с занимательными задачами для школьных кабинетов математики и физики.

Календарь загадок – календарь на текущий год с задачей-картинкой на каждый месяц.

Всё это можно купить в магазине «Математическая книга» по адресу: г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11, сайт **biblio.mccme.ru**, или заказать по электронной почте **biblio@mccme.ru**

Где ещё можно купить продукцию «Квантика», смотрите по ссылке:
kvantik.com/kupit.html

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
kvantik12.livejournal.com
vk.com/kvantik12

Открыта подписка на электронную версию журнала!
Подробности по ссылке: **http://pressa.ru/magazines/kvantik#/**

ISSN 2227-7986
06
9 772227 798152

Главный редактор: Сергей Дориченко
Зам. главного редактора: Ирина Маховая
Редакция: Александр Бердников, Дарья Кожемякина, Елена Котко, Андрей Меньщиков, Максим Прасолов, Григорий Фельдман
Художественный редактор и главный художник: Yustas-07
Верстка: Рая Шагеева, Ира Гумерова
Обложка: художник Yustas-07
Формат 84х108/16. Издательство МЦНМО

Журнал «Квантик» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство ПИ N ФС77-44928 от 4 мая 2011 г.
ISSN 2227-7986
Тираж: 5000 экз.
Адрес редакции: 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.
Тел.: (499) 241-08-04.
e-mail: kvantik@mccme.ru

По вопросам распространения обращаться по телефону: (499) 241-72-85;
e-mail: biblio@mccme.ru
Подписаться можно в отделениях связи Почты России, подписной индекс **84252**.
Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «ИПК Парето-Принт», г. Тверь.
www.pareto-print.ru
Заказ №

СОДЕРЖАНИЕ

Игорь Акулич

ЧУДАК-ЧАСОВЩИК

(ПРОДОЛЖЕНИЕ СТАТЬИ «НОВЫЕ ПРИКЛЮЧЕНИЯ ПРОДОЛЖАЮТСЯ»)

– Федя, что это ты на меня так смотришь? Только не говори, что опять задачу про часы нашёл!

– Да, Даня, именно так и скажу. Нашёл! И такую заковыристую, что, боюсь, не одолеем. Вот послушай: *«Один чудаковатый часовщик смастерил странные часы. От полуночи до часу ночи они шли нормально, показывая верное время, но затем часовая стрелка начинала идти со скоростью минутной, а минутная – со скоростью часовой. Через час стрелки вновь менялись скоростями, и так – каждый час. Укажите все моменты, когда часы показывают верное время»*.[1]

– Ну, по крайней мере, с полуночи до часу ночи они уж точно покажут верное время!

– Об этом я и сам догадался. А потом-то что?

– Не знаю... Но вот что мне совсем не нравится, так это то, что здесь, похоже, мы одними полусутками, как было раньше, не обойдёмся. Вот посмотри. Минутная стрелка за первый час передвигается на полный оборот, за второй – на $\frac{1}{12}$ оборота, за третий – опять на полный оборот, и так далее. То есть за каждую пару часов минутная стрелка передвинется на $1\frac{1}{12}$ оборота. Полсуток – это 6 раз по 2 часа, и потому стрелка передвинется на $1\frac{1}{12} \cdot 6$, то есть шесть с половиной оборотов, и в результате будет показывать вертикально вниз! То же самое, конечно, будет и с часовой стрелкой – через половину суток она тоже сдвинется на шесть с половиной оборотов. Правда, за следующие полсуток обе стрелки восстановят вертикальное положение.

– Значит, надо рассматривать интервал в целые сутки, то есть 24 часа. Притом отдельно рассматривать чётные и нечётные часы...

– Эврика! Нечётные часы рассматривать не надо!

– Почему?

– Ну смотри. В начале самого первого часа исходное положение стрелок верное (00:00), и идут они с *правильными* скоростями. А дальше за каждую пару часов и часовая, и минутная стрелки передвинутся на $1\frac{1}{12}$ оборота, то есть займут заведомо *неверное*

[1]Автор задачи – Анатолий Павлович Савин (1932–1998), один из создателей журнала «Квант», организатор первых турниров «Математика 6–8».

исходное положение. По крайней мере, минутная – это точно; ведь правильное её положение в начале каждого часа должно быть вертикально вверх! Получается, что в течение каждого нечётного часа (за исключением самого первого) стрелки идут с *правильными* скоростями, но из *неправильных* стартовых позиций. Конечно, они не смогут показать верное время!

– Логично. Но для чётных часов такое рассуждение не проходит…

– Верно, не проходит. Там и скорости неверные, и исходные положения. И потому минус на минус может дать плюс.

– Точно! Если скорости неверные, то за чётный час минутная стрелка совпадёт с минутной стрелкой на правильных часах один раз.

– Это ещё почему?

– Мы ведь уже поняли, что через каждый час наша минутная стрелка будет на каком-то часовом делении. Пусть она в начале чётного часа будет на делении k. Правильная минутная в этот момент – вверху циферблата. За этот чётный час правильная минутная пройдёт целый оборот и совпадёт с неправильной где-то между k и следующим часовым делением. То же самое для часовых стрелок!

– Ловко ты придумал, Федя! Но загвоздка в том, что они должны совпасть в один и тот же момент времени. А мне что-то не верится.

– Так давай проверим! За первые $2n$ часов, то есть к концу чётного часа, каждая стрелка прошла n раз по $1\frac{1}{12}$ оборота – это $n+\frac{n}{12}$ оборотов, и значит, обе стрелки сейчас уехали вперёд от верха циферблата на $\frac{n}{12}$ оборота. А правильные минутная и часовая стрелки прошли соответственно $2n$ и $\frac{2n}{12}$ оборотов, то есть правильная минутная – вверху циферблата, а правильная часовая – на $\frac{2n}{12}$ оборота впереди. Смотри, наша минутная стрелка на $\frac{n}{12}$ оборота обогнала правильную минутную, а наша часовая на те же $\frac{n}{12}$ оборота отстала от правильной часовой.

– Да, вижу! Выходит, к концу чётного часа минутные стрелки разъехались на такое же расстояние, что и часовые. Но движется пара минутных стрелок «так же», как и пара часовых (скорости быстрых стрелок

Художник Евгений Паненко

одинаковы, и скорости медленных – тоже)! Значит, если за этот чётный час минутные стрелки один раз совпали, то и часовые совпали единожды – в тот же самый момент. Вот и получается, что за каждый чётный час наши часы покажут правильное время ровно один раз!

– Рано радуешься, Даня! Напоминаю, что нам нужно найти, когда именно они покажут правильное время.

– Ой, это же считать надо...

– Ничего-ничего! Через $2n$ часов после полуночи правильная минутная стрелка отстаёт от неправильной на $\frac{n}{12}$ оборотов. Пусть они встретились за x минут до этого. Правильная минутная стрелка за x минут сделала $\frac{x}{60}$ оборотов, неправильная – в 12 раз меньше, то есть $\frac{x}{12\cdot 60}$ оборотов. Получаем, что $1-\frac{n}{12}=$ $=\frac{x}{60}-\frac{x}{12\cdot 60}$, откуда $x=(12-n)\cdot\frac{60}{11}$, где n – целое число, лежащее в пределах... э-э-э... от 1 до 12.

– Ну, раз так, то всё предельно ясно. Как видно, при максимальном $n=12$ получаем $x=0$, что неинтересно: это полночь, а с первым часом мы уже разобрались. При $n=1$ получаем $x=60$, что тоже интереса не представляет: это самое начало второго часа, оно же – конец первого часа, с которым мы также разобрались. Для остальных же n от 2 до 11 включительно получаем 10 ответов: 3 часа $\frac{60}{11}$ минут, 5 часов $\frac{120}{11}$ минут, и так далее вплоть до 21 часа $\frac{600}{11}$ минут. Итого получаем часовой интервал плюс десять «точечных» значений.

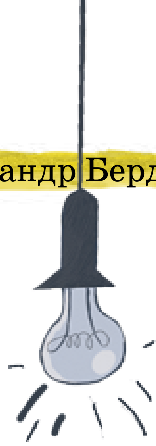
– Слушай, пока мы тут решали, у меня возникла идея о немного других тоже чудаковатых часах: пусть они идут верно от полуночи до *первого совпадения стрелок*, а в момент совпадения меняются скоростями. При втором совпадении они опять меняются скоростями, и так далее при каждом совпадении. Вопрос тот же: найти все моменты, когда часы показывают верное время.

– Нет уж, давай отложим это дело на другой раз. Всё-таки сильно меня выматывают такие задачи. Уже и во сне кроме стрелок ничего не вижу.

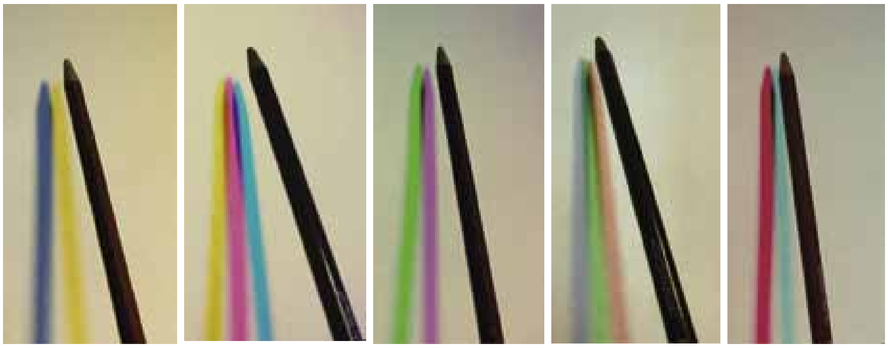
Обращение к читателям. Давайте не будем откладывать. Попробуйте решить предложенную задачу для модифицированных чудаковатых часов. А потом сверьте свой ответ с приведённым на стр. 30.

ЦВЕТНЫЕ ТЕНИ

Александр Бердников

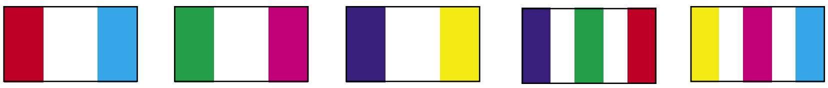


Перед вами несколько фотографий карандаша на фоне белого листа: кроме самого карандаша, видны несколько его разноцветных теней.



1 2 3 4 5

Фотографии получались так: карандаш освещался двумя или тремя источниками света, каждый из которых имел свой цвет. Вот какие комбинации цветов были использованы:



а) б) в) г) д)

Задача: *выясните, какой из наборов а) – д) был использован в каждой из фотографий 1 – 5.*

Только чур не тыкать бездумно в похожие картинки! Чтобы не попасться в ловушку, здесь нужно маломальски разобраться в происходящем.

Ответ будет напечатан в одном из следующих номеров.

Художник Инга Коржнева

Материал подготовил
Михаил Евдокимов

Быстрее, выше, сильнее!

Волейбол

В волейбольном турнире, проходившем в один круг (каждая команда играет с каждой ровно один раз), 20% всех команд не одержали ни одной победы. Сколько всего команд участвовало в этом турнире, если в волейболе не бывает ничьих?

Фольклор

Борьба

В турнире по борьбе участвовало 9 борцов из трёх стран, по три от каждой страны. Все борцы имеют разную силу и в поединке любых двух из них всегда побеждает сильнейший. Могло ли так случиться, что во встречах команд по системе «каждый с каждым» первая страна по числу побед одержала верх над второй, вторая – над третьей, а третья – над первой?

«Квант» для младших школьников

Футбол

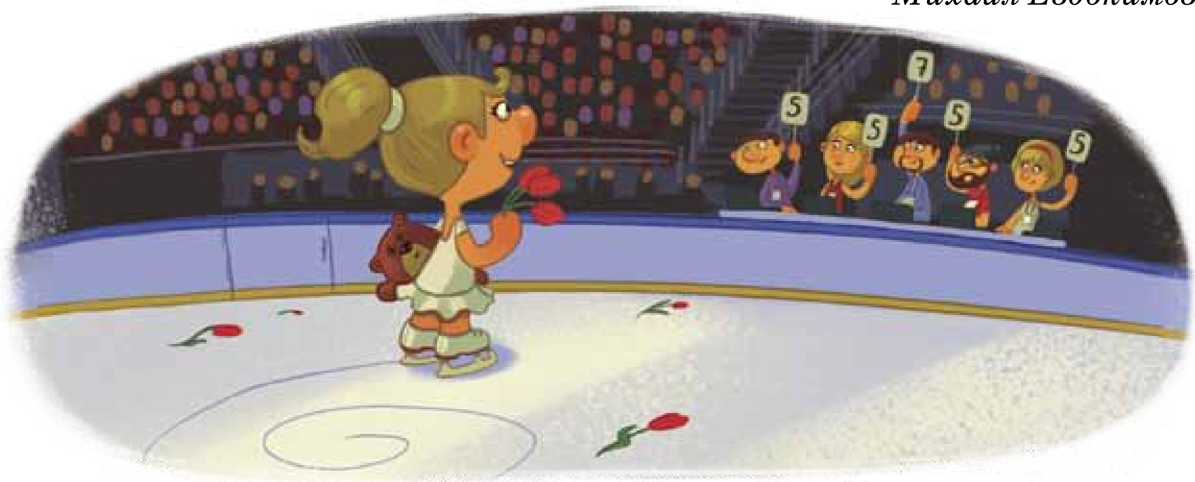
Турнир по футболу проходил в один круг – каждая команда играет с каждой ровно один матч. Могло ли случиться, что команда, занявшая первое место по новой системе подсчёта очков (за победу 3 очка, за ничью 1 очко), по старой системе (за победу 2 очка, за ничью 1 очко) была бы последней?

Соросовская олимпиада

Фигурное катание

В турнире по фигурному катанию несколько судей, каждый из которых ставит оценку фигуристам. Затем по этим оценкам вычисляется среднее – это и есть балл за выступление. Может так случиться, что кто-то из судей будет намеренно завышать оценку фигуристам из своей страны и занижать оценку их основным конкурентам. Что можно придумать, чтобы этого избежать?

Михаил Евдокимов



Художник Анна Горлач

Ответы присылайте до 1 июля по адресу kvantik@mccme.ru с пометкой «Четыре задачи».

НАГЛЯДНАЯ МАТЕМАТИКА

Александр Блинков,
Сергей Дориченко,
Максим Прасолов

УГОЛ В КВАДРАТЕ

Можно ли доказать математическую теорему или обнаружить новый факт, просто перегибая лист бумаги? Оказывается, да!

ЭКСПЕРИМЕНТ

Возьмите в руки бумажный квадрат и склейте две его соседние стороны, получив что-то вроде кулька (рис. 1; советы по изготовлению – внизу страницы).

Положите кулёк на стол и аккуратно прижмите рукой (сплющите). Что получилось?

Понять ответ можно и по-другому, не склеивая кулька: положите на стол бумажный квадрат и загните один из его углов, как показано на рисунке 2.

Теперь загните второй угол так, чтобы две из сторон квадрата совместились (рис. 3).

Это и есть наш сплющенный кулёк!

Чтобы удобнее было вести дальнейший разговор, мы отметили на рисунке 3 несколько точек.

Заметили, что точки M, E и N лежат на одной прямой? Так получается потому, что каждый угол квадрата равен 90° – состыковавшись, два таких угла образуют развёрнутый угол.

А чему равен угол MAN? Конечно, половине угла квадрата – сейчас угол MAN «двухслойный», а если отогнуть обратно загнутые части, мы получим угол квадрата. То есть угол MAN равен 45°.

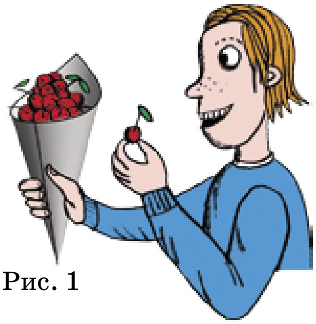


Рис. 1

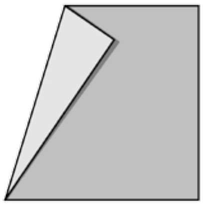


Рис. 2

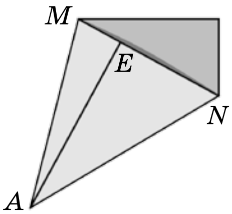
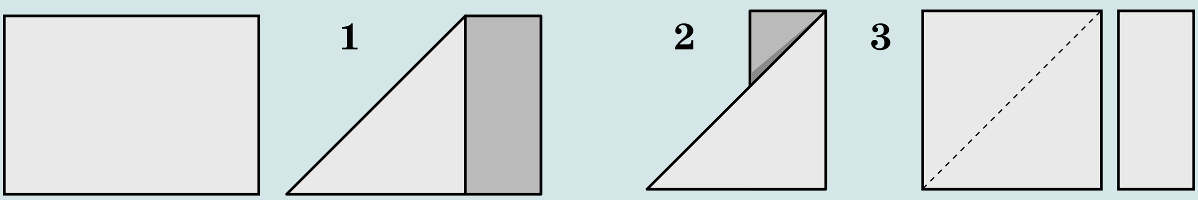


Рис. 3

В ПОМОЩЬ ЭКСПЕРИМЕНТАТОРУ

Как вырезать квадрат из прямоугольного листа бумаги



1. Перегните лист, наложив одну из его сторон на соседнюю, и прогладьте рукой. У вас получится фигура в виде треугольника, к которому примыкает прямоугольник.

2. Отогните этот прямоугольник, снова прогладьте лист рукой, а затем аккуратно оторвите прямоугольник по линии сгиба.

3. Расправьте лист – у вас в руках окажется квадрат.

ПОЖИНАЕМ ПЛОДЫ

А теперь применим сделанные нами наблюдения для решения нескольких красивых задач. Все они начинаются с одного и того же условия (мы не будем его повторять):

На сторонах квадрата ABCD отмечены точки M и N так, что угол MAN равен 45° (рис. 4).

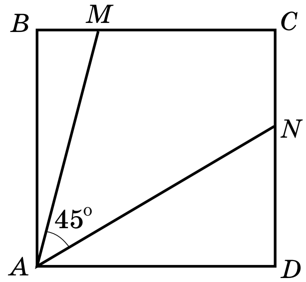


Рис. 4

Такая у нас везде будет исходная картинка. А докажем мы про неё много интересных утверждений.

1. *Периметр треугольника MCN равен половине периметра квадрата ABCD.*

Начало решения напрашивается: перегнём квадрат по отрезкам *AM* и *AN* (рис. 5).

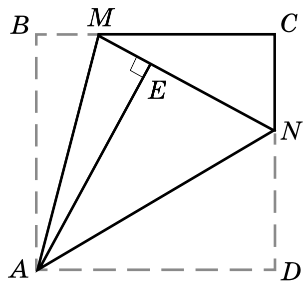


Рис. 5

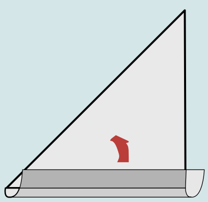
Из предыдущего ясно, что при этом стороны *AB* и *AD* совместятся, а кусочки *BM* и *DN* состыкуются (в точке *E*), превратившись в сторону *MN*. Получается, что две стороны квадрата (*CB* и *CD*), перегнувшись в точках *M* и *N*, превратились в треугольник *CMN*, что и требовалось!

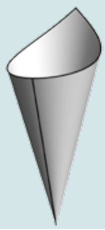
2. *Расстояние от вершины A до прямой MN равно стороне квадрата.*

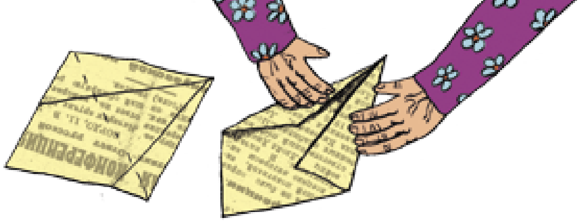
Расстояние от точки до прямой – это длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую. В нашем случае искомый перпендикуляр – это *AE*, и он такой же длины, как и сторона квадрата.

Как склеить кулёк из квадрата

Перегните полученный квадрат по диагонали и склейте скотчем совместившиеся стороны квадрата (наклейте полоску скотча на одну сторону, переверните согнутый квадрат и закончите склейку, перегнув полоску скотча). Расправьте то, что получилось, и у вас в руках окажется кулёк, с которого мы начали статью.







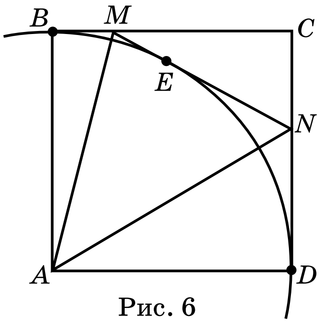


Рис. 6

■ **3.** *Окружность с центром A и радиусом, равным стороне квадрата, касается стороны MN и продолжений сторон CM и CN треугольника MCN (рис. 6).*

Окружность касается прямой, если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности. Поэтому эта задача сразу следует из предыдущей: точками касания будут B, E и D.

Проведём на рисунке 4 дополнительную линию – диагональ BD квадрата (рис. 7).

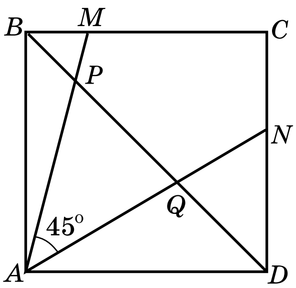


Рис. 7

■ **4.** *Пусть диагональ BD квадрата пересекает отрезки AM и AN в точках P и Q (рис. 7). Тогда из отрезков BP, PQ и DQ можно составить прямоугольный треугольник с прямым углом напротив отрезка PQ.*

При перегибании квадрата по отрезкам AM и AN отрезок BP займёт положение отрезка EP, а отрезок DQ – положение отрезка EQ (рис. 8). Углы ABP и ADQ равны по 45°, а после перегибания они вместе составят угол PEQ – значит, он прямой! Мы получили прямоугольный треугольник PEQ с прямым углом напротив PQ.

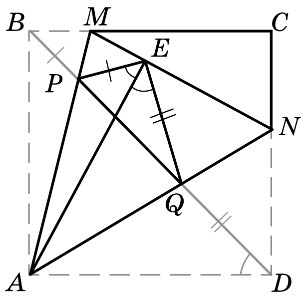


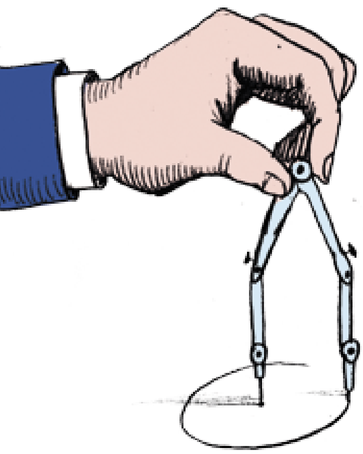
Рис. 8

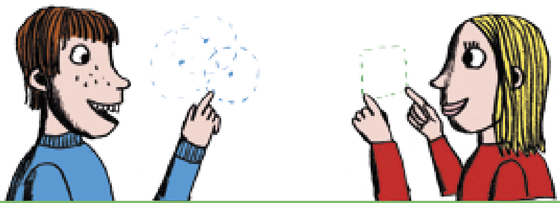
■ **Упражнение 1.** *Докажите обратные утверждения: если точки M и N выбраны на сторонах квадрата так, что выполняется одно из условий* 1–4, *то угол MAN равен* 45°.

■ **Упражнение 2.** *Угол PCQ равен* 45°.

Рассмотренную нами геометрическую картинку придумал замечательный математик Вячеслав Викторович Произволов (она встречается в нескольких его задачах). Кстати, если вы ещё не знакомы с его книгой «Задачи на вырост» – советуем прочитать.

На этом можно было бы остановиться – но в нашей картинке спрятано ещё столько фактов! Правда, они уже посложнее и требуют больше знаний. Если вы готовы бороться с трудностями (самостоятельно или с помощью учителей и друзей), – читайте дальше.





ПРОДОЛЖЕНИЕ ДЛЯ САМЫХ НАСТОЙЧИВЫХ

Знаете ли вы, что окружность из задачи 3 называется ***вневписанной*** для треугольника MCN? Это потому, что она *касается стороны и продолжений двух других сторон этого треугольника.* У каждого треугольника есть три вневписанные окружности (рис. 9).

Упражнение 3. *Докажите, что точка A – центр вневписанной окружности треугольника PEQ (рис. 8).*

5. *Точки M и N – центры двух вневписанных окружностей треугольника PEQ (рис. 8).*

Докажем свойство, например, для точки N (рис. 10). Заметим, что расстояния от точки N до прямых EQ и QD равны – ведь эти прямые переходят друг в друга при перегибании по прямой AN. Заодно ясно, что угол QEN тоже равен 45°. Получается, что EN делит угол между отрезком QE и продолжением отрезка PE пополам – ведь этот угол прямой (так как равен прямому углу PEQ). Но тогда если перегнуть квадрат по EN, то прямая EQ перейдёт в прямую PE.

Значит, расстояния от точки N до сторон треугольника PEQ одинаковы, и N – центр его вневписанной окружности.

6. *Углы APN и AQM – прямые.*

Докажем свойство, например, для угла APN (рис. 11).

Поскольку вневписанная окружность с центром в N касается продолжений сторон PE и PQ, при перегибании по отрезку PN прямые PE и PQ совместятся. Это значит, что углы NPQ и NPE равны. Но углы APQ и MPE тоже равны (поскольку APQ и BPM равны как вертикальные, а также BPM и EPM равны). Тогда равны углы APN и MPN, а в сумме они составляют развёрнутый угол. Значит, оба они равны по 90°.

Упражнение 4. *Докажите, что $AQ = MQ$ и $AP = NP$.*

Чтобы двигаться дальше, надо хорошо владеть программой по геометрии для 8 класса. Например, если вы уже знаете, что высоты любого треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке, то справитесь и с таким упражнением:

Упражнение 5. *Докажите, что прямые MQ, NP и AE пересекаются в одной точке.*

Напоследок вот ещё три утверждения про нашу картинку – докажите их, когда овладеете необходимыми знаниями.

7. *Вокруг четырёхугольника $ABMQ$ можно описать окружность, и её центр попадёт в середину отрезка AM.*

8. *Площадь треугольника PAQ в два раза меньше площади треугольника MAN.*

9. *Центр окружности, описанной около треугольника MAN, лежит на отрезке AC.*

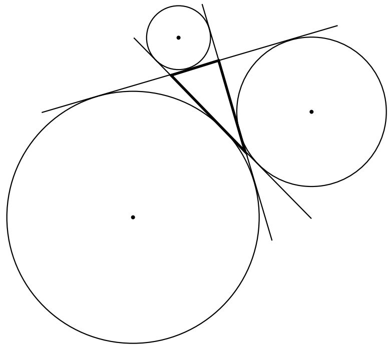


Рис. 9

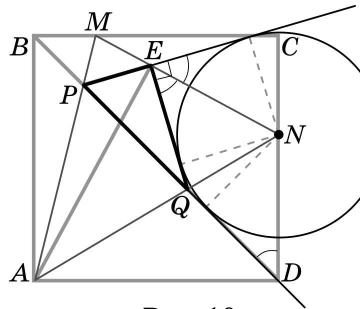


Рис. 10

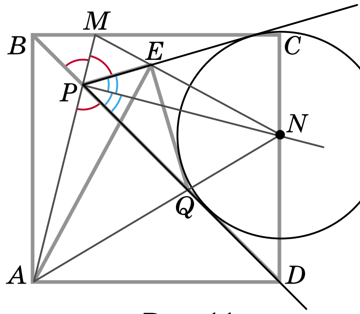


Рис. 11

Художник Артём Костюкевич

Андрей Щетников

ИГРУШЕЧНОЕ СУДНО НА ВОЗДУШНОЙ ПОДУШКЕ

В «Квантике» № 3 за 2013 год описано, как сделать игрушку на воздушной подушке из компакт-диска и шарика. Она скользит почти без трения по гладкой поверхности. За этим трюком и другими, ещё более удивительными, стоит интересная физика.

ПАРЕНИЕ НАД СТОЛОМ... И ПОД ПОТОЛКОМ!

Возьмите пластиковую трубку с внутренним диаметром около 15 мм и отпилите от неё кусок длиной в несколько сантиметров. Прикрепите кусок трубки к центральному отверстию компакт-диска с помощью пластилина или термоклея (к той стороне диска, где у него дорожки с информацией). Намотайте на трубку резинку, а затем наденьте резиновый воздушный шарик. Теперь закрепите на трубе горловину шарика резинкой. Аппарат готов.

Сначала повторим опыт с парением над столом. Надуйте шарик через отверстие, перекрутите его горловину, чтобы шарик не сдулся раньше времени, поставьте диск на гладкую горизонтальную поверхность и раскрутите горловину. Судно будет парить над столом несколько секунд, опираясь на поток воздуха, который течёт в узком зазоре между диском и столом и поддерживает диск «на плаву», как воздушная подушка. Этот опыт лучше получается с узкой трубкой, например, с корпусом от шариковой ручки.

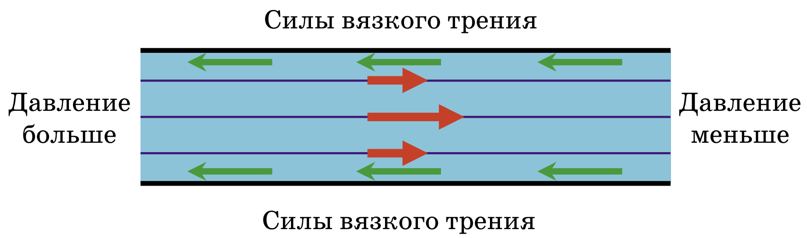
Для второго опыта ширина трубки должна быть не меньше сантиметра. Приставим диск с надутым шариком к ровному потолку и вновь дадим выход воздуху. Удивительно, но факт: теперь судно зависнет под потолком, и поток воздуха между диском и поверхностью потолка будет действовать на диск, как присоска.

По-видимому, дело в ширине зазора между диском и поверхностью. Под весом судна зазор становится уже, когда судно парит над столом, и шире, когда оно парит под потолком. Получается, что при узком зазоре диск отталкивается от поверхности, а при расширении зазора отталкивание сменяется притяжением. Эту зависимость просто пощупать руками: попытайтесь легонько то прижимать, то оттягивать парящий диск, и вы почувствуете его сопротивление. Эта же зависимость объясняет и то, почему диск парит над столом ровно, не заваливаясь на бок: опущенный бок сразу оттолкнётся, а поднявшийся – притянется обратно.

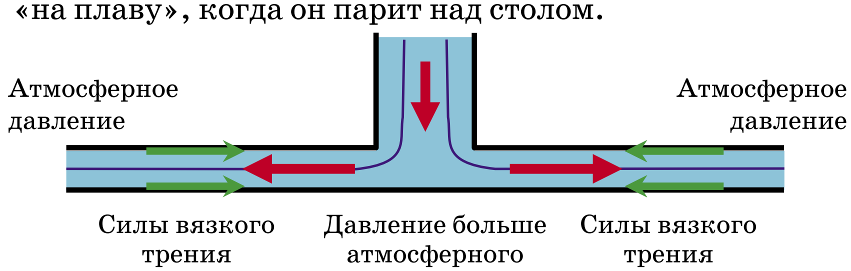
Как такое может быть?

ОБЪЯСНЕНИЕ ОТТАЛКИВАНИЯ

Когда воздух или жидкость движется по длинным узким трубам, на их течение заметно влияет вязкое трение. На первый взгляд, жидкость могла бы скользить вдоль прямой трубы по инерции, её не надо постоянно проталкивать через трубу. Но в реальности пристеночные слои жидкости тормозятся стенками трубы, следующие слои тормозятся пристеночными, и так далее. Из-за этого, чтобы прокачивать жидкость через ровную трубу, нужно, чтобы давление на входе в трубу превышало давление на выходе – тогда разность давлений будет уравновешивать вязкие силы, тормозящие жидкость.



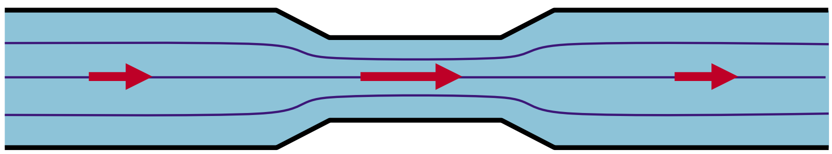
Так же ведёт себя воздух в зазоре под диском, если зазор достаточно узкий. На самом краю диска давление почти атмосферное, а чем ближе к центру, тем оно должно быть больше, чтобы проталкивать воздух наружу, несмотря на трение. Это давление, вместе с реактивной тягой вылетающей струи, поддерживает диск «на плаву», когда он парит над столом.



СВЯЗЬ СКОРОСТИ С ДАВЛЕНИЕМ

Объяснение притяжения начнём с такого опыта. Держа пару стаканов на расстоянии полсантиметра друг от друга, сильно дуньте в щель между ними. Стаканы ощутимо дёрнутся друг к другу! Это проявляет себя закон Бернулли: если жидкость или газ протекает через трубу переменного сечения, то где скорость потока больше, там давление меньше. Поскольку через все сечения трубы за одинаковое время протекает одно и то же количество жидкости, скорость потока будет больше на узких участках трубы; значит, на узких участках давление будет меньше, чем на широких.

На первый взгляд закон парадоксален. Но подумайте сами: чтобы протолкнуть жидкость из широкой части трубы в узкую, надо разогнать её; а для разгона давление в широкой части должно быть выше, чем в узкой. И обратно, если жидкость из узкой части попадает в широкую, скорость в широкой части падает, и когда в эту медленно текущую жидкость втекает быстрая жидкость из узкой части, она своим напором создаёт в широкой части повышенное давление, которое её же и замедляет.



Скорость меньше, давление больше | Скорость больше, давление меньше | Скорость меньше, давление больше

ПРИТЯЖЕНИЕ ДИСКА

Вернёмся к диску. Воздух движется от центра диска к краю во все стороны сквозь щель постоянной ширины. Но чем ближе к краю, тем щель становится длиннее. Площадь щели увеличивается, а значит, скорость потока воздуха уменьшается. В результате, по закону Бернулли, давление на краю повышается. Но там оно почти атмосферное, а значит, ближе к центру диска оно было ниже. Вот и объяснение притяжению!

СОЕДИНИМ ОБА ОБЪЯСНЕНИЯ ВМЕСТЕ

Может показаться, что оба опыта полностью разобраны: парящий над столом диск отталкивается от поверхности из-за сил вязкого трения, а парящий под потолком диск притягивается к поверхности из-за проявления закона Бернулли. Но ведь вязкое трение и закон Бернулли действуют в обоих опытах.

Оказывается, толщина щели как раз и определяет, какое давление окажется сильнее: от трения или от Бернулли. При сужении щели начинает «побеждать» трение и диск отталкивается, а при расширении трение «проигрывает» Бернулли и диск притягивается. В результате при любых отклонениях диск стремится вернуться на то расстояние, при котором отталкивание с притяжением компенсируются.

Чтобы убедиться в этом, сделаем такой мысленный опыт. Будем фиксировать диск на разных расстояниях от поверхности и следить, как при этом меняется баланс между давлением, вызванным силами трения, и понижением давления из-за закона Бернулли.

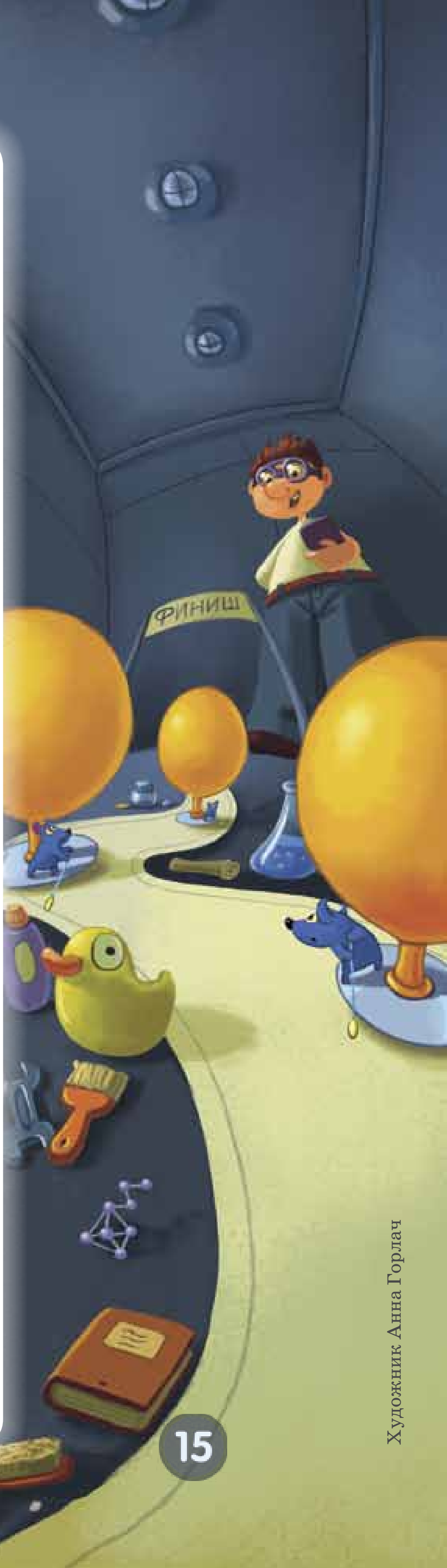
Например, начнём приближать диск к поверхности. Если при этом скорость потока воздуха везде останется неизменной, то не изменится и вклад от Бернулли. А вот эффект от трения увеличится. Во-первых, давление, борющееся с трением, теперь действует на меньшую площадь щели. Значит, давления понадобится больше для создания прежней проталкивающей силы. Во-вторых, вырастет и сама сила трения, с которой нужно справиться, так как стенки стали ближе к середине потока и сильнее его тормозят.

Итого: при меньшем зазоре и той же скорости потока вклад от Бернулли не изменится, а от трения – увеличится, и поток начнёт больше отталкивать диск.

На самом деле, скорость упадёт (из-за большего трения). После этого трение уменьшится, но и эффект от Бернулли упадёт не меньше, так что опять баланс сместится в пользу трения и диск будет отталкиваться.

При расширении зазора все рассуждения сработают в обратную сторону.

Вот почему наше судно может летать и над столом, и под потолком.



Художник Анна Горлач

Сергей Федин

БЕТХОВЕН, ДУРОВ И ДИРИХЛЕ

Две из этих историй известны, а одна полностью придумана. Надо догадаться, какая именно. Вычислить её можно по какой-нибудь нелепости, несуразности, спрятанной в тексте. Попробуйте!

БЕТХОВЕН

Великий немецкий композитор Бетховен в последние годы жизни полностью оглох и не мог слушать музыку. Но ещё хуже было то, что он стал настоящим лунатиком. Почти каждую ночь Бетховен вставал с кровати, а затем, не просыпаясь, гулял по самому краю крыши своего дома. При этом он улыбался, а его пальцы двигались, как будто он играл на пианино какую-то прекрасную музыку. Наутро он ничего не помнил.

Но однажды ночью, когда луна светила особенно ярко, позади гуляющего по крыше Бетховена мяукнула кошка. Композитор проснулся, в изумлении огляделся, а потом ринулся обратно. Прибежав домой, он быстро записал на нотной бумаге чудесную мелодию, которая звучала в нём, пока он бродил по крыше. Впоследствии он назвал эту гениальную пьесу «Лунной сонатой» в память о своих ночных прогулках. До сих пор это самое знаменитое произведение Бетховена.

ДУРОВ

Сто лет назад жил в России знаменитый дрессировщик Дуров. Публика любила его не только за удивительные аттракционы с животными, но и за весёлый нрав и находчивость.

Во время одного из выступлений Дурова два хулигана из зрителей очень мешали ему своими глупыми замечаниями. По ходу действия Дуров произнёс какую-то фразу. Один из хулиганов громко прокомментировал:

– Он сказал чушь!

В ответ Дуров повернулся к обидчикам и отчеканил:

– Вы ослы…

Оскорблённые хулиганы вскочили с мест, собираясь расправиться с дрессировщиком. Дуров же улыбнулся и спокойно продолжил фразу:

– Вы ослы-шались!

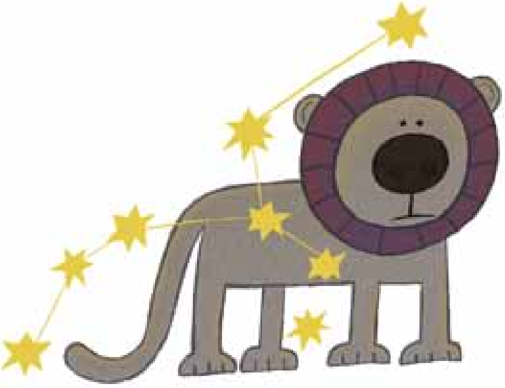
ДИРИХЛЕ

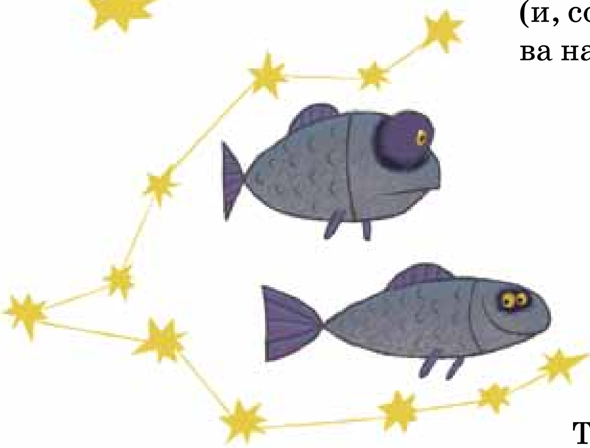
Известный немецкий математик Дирихле любил формулы гораздо больше слов и потому был очень молчаливым. Поэтому он обошёлся без слов, даже когда сообщал своему отцу телеграммой о рождении сына. В этой, наверное, самой короткой в мире телеграмме было написано вот что: $2+1=3$.

Художник Капыч

ПЯТЬ ЗВЁЗДОЧЕК

Игорь Акулич





Такое название в народе присвоили одной старинной задаче, которую и по сей день порой предлагают школьникам на интеллектуальных соревнованиях:

Не отрывая карандаша от бумаги, нарисуйте пять пятиконечных звёзд. При этом звёзды не должны пересекаться; допускается только их соприкосновение в вершинах.

Особенность задачи в том, что требуется не просто изобразить пятёрку звёздочек, а сделать это *как можно быстрее*, поскольку побеждает тот, кто справится с задачей раньше других. Это привело к выработке способов скорейшего рисования заданной фигуры, один из которых (самый, наверно, распространенный) таков. Сначала рисуем «частокол» из пяти «кольев» (и, соответственно, десяти отрезков), продвигаясь слева направо (рис.1):

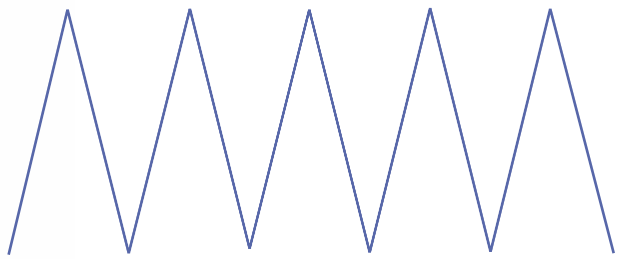


Рис. 1

Теперь каждый «кол» превращаем в звёздочку, подрисовывая к нему по три отрезка. Сначала – самый правый (рис.2):

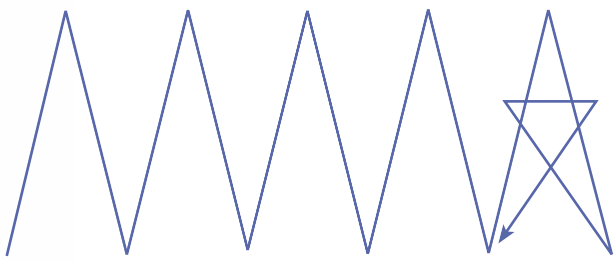


Рис. 2

Затем – второй справа (рис.3):

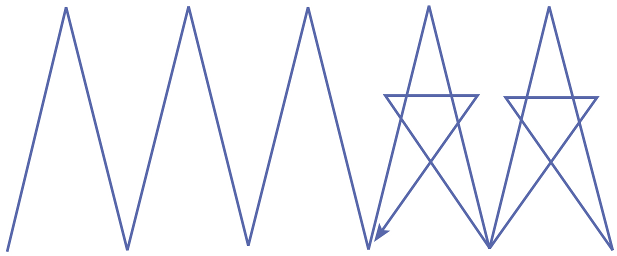


Рис. 3

И так далее, пока не получим то, что требовалось (рис.4).

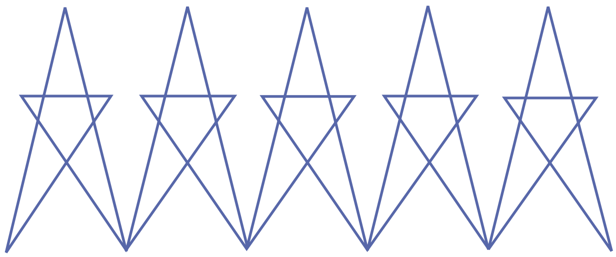


Рис. 4

Конечно, у такого решения имеется хорошо заметный недочёт: звёздочки оказываются «неправильными» – не все их стороны равны, да и углы между ними оставляют желать лучшего. Но ничего не поделаешь – правильные звёзды при таком рисовании «налезли» бы друг на друга.

Однако давайте осмыслим именно *спортивную* часть задачи: как нарисовать конфигурацию по возможности быстрее? Как видим, она содержит $5\times5=25$ отрезков. Если считать, что каждый отрезок (независимо от длины) участник рисует в течение 0,2 секунды, то всего ему потребуется $0{,}2\times25=5$ секунд.

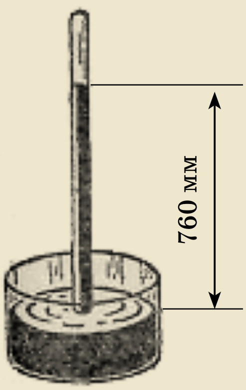
А теперь подумайте: нельзя ли сократить это время? Ну, хотя бы на полсекунды (или больше)? А то и на полторы секунды (или больше)?

Художник Инга Коржнева

БЛЕЗ ПАСКАЛЬ

Борис Дружинин

Иллюстрация опыта Паскаля



Давление воздуха, удерживающее ртуть на такой высоте, называется давлением в одну атмосферу

Окончание. Начало в №5 за 2015 г.

ПУСТОТА

Когда воду качают насосом, вода сама поднимается вслед за поршнем, не позволяя образоваться пустому пространству между поршнем и поверхностью воды. В древности Аристотель объяснял это тем, что «природа не терпит пустоты».

Но однажды случилось невероятное. При строительстве большого фонтана во Флоренции вода, как ей и положено, послушно поднималась за поршнем насоса, но на высоте около 10 метров вдруг заупрямилась и остановилась. Строители обратились за разъяснениями к самому Галилею. Того занимали другие проблемы, и он отшутился, сказав, что начиная с такой высоты природа перестаёт бояться пустоты.

Шутки шутками, но Галилей предположил, что высота подъёма жидкости зависит от её плотности: во сколько раз плотность жидкости больше, во столько раз высота подъёма меньше. Он поручил своим ученикам Торричелли и Вивиани разобраться в этом непонятном явлении. Чтобы не возиться с длинными стеклянными трубками, ученики стали использовать вместо воды ртуть. В результате их исследований на свет появился гениально простой опыт, который каждый мог если не повторить, то увидеть, как это делает кто-то другой. Практически во всех школьных учебниках есть описание и изображение этого опыта. Запаянная с одного конца метровая стеклянная трубка полностью заполняется ртутью. Открытый конец трубки зажимается пальцем, трубка переворачивается и погружается в сосуд с ртутью. Потом палец убирается. И что же? Уровень ртути в трубке понизится и остановится на высоте 2,5 фута (760 мм) над поверхностью ртути в сосуде.

Уровень воды в трубке в 13,6 раза выше уровня ртути, и именно во столько же раз плотность воды меньше плотности ртути – замечательное подтверждение предположения Галилея. Торричелли сделал вывод, что в трубке над ртутью ничего нет (знаменитая «торричеллиева пустота»). А что ртуть не выливается, так ей не позволяет это сделать давление атмосферного воздуха.

Но какое отношение имеет ко всему этому Блез Паскаль? Самое прямое: ведь не случайно единица измерения давления носит его имя. А такой чести удостаиваются немногие.

В те далёкие времена радио и телевидение ещё не придумали, а об интернете и говорить нечего, так что до Руана сведения об удивительных опытах итальянцев с пустотой дошли не сразу. Конечно же, Блез Паскаль заинтересовался «торричеллиевой пустотой». Он повторил опыты итальянцев и получил те же результаты. К радости жителей Руана, он проводил свои опыты прямо на улице на виду у всех.

Но только повторением Блез Паскаль не ограничился. Он проверил зависимость высоты столба жидкости от её плотности. В ход пошли различные масла, сахарные и соляные растворы, плотность которых можно менять, добавляя новые порции сахара или соли. Особенно понравились руанцам опыты с многочисленными сортами вин, которыми так славится Франция. Представляете, целая бочка вина, а над ней возвышается высоченная стеклянная трубка, тоже заполненная вином. Естественно, все с удовольствием помогали молодому Блезу Паскалю. Результаты опытов ещё раз блестяще подтвердили гениальное предположение Галилея.

А что же заполняет трубку над поверхностью ртути? Существовало мнение, что там находится некая субстанция, «не обладающая никакими свойствами». Прямо как в сказке – пойди туда, не знаю куда, принеси то, не знаю что. Блез Паскаль решительно заявляет: раз эта материя не обладает никакими свойствами и её нельзя обнаружить, то её попросту нет. И кто с этим не согласен, пусть сумеет доказать её присутствие.*

В 1647 году Блез Паскаль опубликовал трактат, где описал опыты с «торричеллиевой пустотой» и объяснил их результаты.

Блез Паскаль
(скульптурный портрет, 1781, Париж, Лувр)

Паскаль занят изучением циклоиды, вычерченной на листке, который он держит в руке; у ног разбросаны листки его «Мыслей» и лежит открытая книга его «Писем провинциалу».

Работа знаменитого скульптора Огюстена Пажу, скульптура была предназначена для короля Людовика XVI.

*На самом деле над столбом жидкости есть её пары: совсем незначительное количество для ртути, но заметное для воды.

Не только сама истина даёт уверенность, но и одно искание её даёт покой…

Блез Паскаль

«Мемориал» Паскаля

В ночь с 23 на 24 ноября 1654 года Паскаль записал свои мысли о науке и вере на кусочек пергамента, который впредь всегда носил с собой. Он продолжал писать о религии в «Мыслях».

Не так-то просто понять, а тем более повторить современный физический эксперимент. А вот Блез Паскаль мог бы и в наши дни легко показать ту самую «пустоту» и научить всех желающих получать её самим. Возьмите пластиковый шприц (без иглы), наполните водой и выпустите излишки воздуха. Заткните шприц пальцем и с силой оттяните поршень. Из воды начнёт испаряться растворённый в ней воздух. Уберите палец и выпустите этот воздух. Повторите процедуру несколько раз. Вскоре большая часть растворённого воздуха испарится и, оттянув поршень в очередной раз, вы получите над водой практически пустоту.

И СЛУЧАЙ, БОГ ИЗОБРЕТАТЕЛЬ…

В те времена люди часто играли в кости. И вот перед Блезом Паскалем поставили такую задачу: «сколько раз требуется бросить сразу две игральные кости, чтобы вероятность того, что хотя бы один раз на обоих кубиках выпадут две шестёрки, превысила вероятность того, что две шестёрки не выпадут ни разу?» Дело в том, что при подсчёте разными способами получались разные же ответы, из-за чего даже сложилось мнение о «непостоянстве математики».

Блез Паскаль блестяще справился с этой задачей и принялся рассматривать другие, в частности задачу о разделе ставок. И дело здесь не в условии задачи, оно излишне громоздкое, а в том, что в то время никто другой не смог даже грамотно её сформулировать. Естественно, никто не смог и понять решение, предложенное Блезом Паскалем.

Хотя это не совсем так. Нашёлся в Европе один человек, понявший и по достоинству оценивший идеи Блеза Паскаля, – Пьер Ферма (тот самый, который сформулировал «великую теорему Ферма»).

Задачу о ставках Ферма решил иначе, чем Паскаль, и между ними возникли некоторые разногласия. Но после обмена письмами они пришли к согласию.

> *Само собой понятное и очевидное не следует определять: определение лишь затемнит его.*
>
> Блез Паскаль

«Наше взаимопонимание полностью восстановлено, – пишет Блез Паскаль. – Я вижу, что истина одна и в Тулузе, и в Париже».

Они продолжили обмениваться письмами, и в конце концов из этой переписки родилась теория вероятностей.

Ни один раздел физики не может обойтись без теории вероятностей, основы которой заложил Блез Паскаль. Никогда и ничего невозможно измерить абсолютно точно. Также нельзя абсолютно точно предсказать поведение отдельных частиц и целых механизмов. Всё – и результаты экспериментов, и предсказанные модели поведения – носит вероятностный характер.

Омнибус

БОЛЬШОЕ ПАССАЖИРСКОЕ СПАСИБО

Каких-нибудь полтора века назад всё, что находилось в Москве за Бульварным кольцом, считалось окраиной. Такой маленькой была Москва в сравнении с нынешней. Но топать пешком из конца в конец всё равно было весьма утомительно.

В Европе встречались города и побольше. Правда, вовсю работали извозчики, но поди дождись их где-нибудь на отдалённой окраине.

И осенью 1661 года Блез Паскаль предложил герцогу де Роанне организовать дешёвый и доступный способ передвижения в многоместных каретах по строго определённым маршрутам. Идея всем понравилась, и 18 марта 1662 года в Париже открылся первый маршрут общественного транспорта, получившего название *омнибус* (в переводе с латыни – «для всех»).

Так что, читая книжку в метро или покачиваясь в трамвае, мы должны с благодарностью вспоминать Блеза Паскаля.

К сожалению, Блез Паскаль не отличался крепким здоровьем, часто болел и умер, не дожив до 40 лет. Он родился 19 июня 1623 года, а умер 19 августа 1662 года.

Эпитафия Паскалю
Церковь Сент-Этьен-дю-Мон. Париж

О числе 2015

Ксения Пахомова

До начала занятия в математическом кружке оставалось полчаса. В аудитории были пока только Лёва и Антон. Ребята бойко обсуждали свои решения задач из турнира «ПОНИ – в мире знаков».

– А ты знал, что 41° по Фаренгейту – это 5° по Цельсию? – спросил Лёва.

– Спрашиваешь! Это просто. А ты решил задачу, где с помощью чисел от 1 до 7 необходимо записать 2015? – поинтересовался Антон и пошел к доске.

На огромной доске, почти во всю ширину аудитории, появилась запись:

$$2015=\square\times(\square\times\square+\square)\times(\square\times\square+\square)$$

– Элементарно! – самодовольно ухмыльнулся Лёва. – Я разложил 2015 на простые множители: $2015=5\times13\times31$. В первый прямоугольник надо поставить пятерку. А получить 13 и 31 несложно. Попробуй сам!

Антон принялся за дело: записал произведение $5\times13\times31$ и перевёл взгляд на задачу. Недолго подумав, выписал такое решение:

$$2015=5\times(6\times2+1)\times(7\times4+3).$$

Глаза у Антона заблестели, и от внезапно нахлынувшей радости он затараторил:

– Лёва! Лёва! Слушай! Я думаю, что нам в этом году частенько будет встречаться число 2015 на олимпиадах по математике. Надо наверняка знать все его делители.

Пока Антон выписывал на доске все восемь делителей: 1, 5, 13, 31, 65, 155, 403, 2015, Лёва тихонько подошёл и записал: $13\times5\times31$.

– Смотри! – произнёс Лёва. – Красиво? Хоть справа читай, хоть слева. Всё одинаково, и запомнить легко.

– Классно! Палиндром получается. Я про числа 13 и 31 ещё кое-что знаю.

Звонкий стук мела распространялся по аудитории. На доске появилось числовое равенство: $13^2=169$.

– В обратном порядке 961. А это квадрат числа 31, – сообщил Антон.

– Неудивительно, – возразил Лёва. – Если 13 и 31 умножать сами на себя в столбик, то каждое слагаемое в одном столбике (13 и 39) будет иметь зеркальное слагаемое в другом столбике (31 и 93), и при сложении не будет переносов. Поэтому в результате получаем те же цифры в обратном порядке. Например, у чисел 2012^2 и 2102^2 цифры тоже в обратном порядке.

Дверь отворилась и стали заходить другие кружковцы. Увидев на доске «чёртову дюжину», школьники начали шумно спорить о несчастливом свойстве числа 13. Остановиться они смогли только после прихода преподавателя. Лёва и Антон договорились, что обсудят число 2015 позже. Но после занятия поговорить не получилось, и оставался только интернет.

– Привет! Я ещё нашёл интересные факты о 2015. Хочешь посмотреть? – прочитал Лёва. Это было сообщение от Антона. Лёва ответил не раздумывая:

– Хочу! Давай ты напишешь мне о своих находках, а я тебе о своих.

– Отлично, согласен. Смотри! Помнишь, мы говорили про простые числа 13 и 31? Если взять простое число 17 и число 48, каждое возвести в квадрат, а затем из большего квадрата вычесть меньший, то получим 2015. А теперь переставим цифры в этих двух числах, проделаем такие же действия и получим тот же результат: $84^2-71^2=2015$.

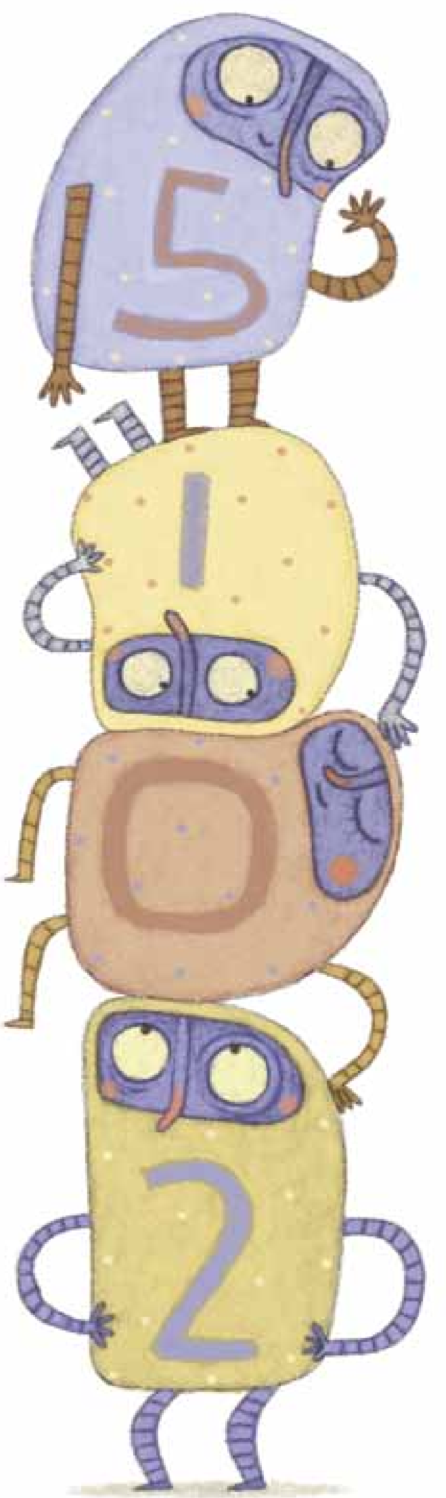
– Ишь ты! – восхитился Лёва. – А другие подобные примеры тебе известны?

– Точно таких же у меня нет. Но я пока нашёл ещё две пары чисел, где разность квадратов даёт 2015: $204^2-199^2=2015$ и $1008^2-1007^2=2015$. Последнее я даже переписал: $\left(\frac{2016}{2}\right)^2-\left(\frac{2014}{2}\right)^2=2015$.

– Да, красиво получилось!

–Смотри, как я нашёл. Записываю 2015 как разность двух неизвестных квадратов a и b: $2015=a^2-$ $-b^2=(a-b)(a+b)$. Выходит, $(a-b)$ и $(a+b)$ – делители 2015, а мы их все уже нашли. Вот я и перебрал случаи: записываем 2015 как произведение двух множителей и приравниваем меньший к $a-b$, а больший к $a+b$. Скажем, пишем $a-b=1$, $a+b=2015$, а дальше легко: если эти два уравнения сложить, получаем $2a=2016$, а если из второго вычесть первое, получаем $2b=2014$. И сразу находим a и b.

Находка Антона показалась Лёве интересной, и ему захотелось придумать что-то подобное. Он приготовил себе чашку чая, взял тетрадь и начал рас-



суждать. На занятиях они рассматривали не только разность квадратов, но и разность кубов. «Почему бы мне не воспользоваться формулой?» – подумал Лёва. В тетради появилась запись: $a^3-b^3=(a-b)\times(a^2+ab+$ $+b^2)$. «Неужели перебор чисел? – продолжал Лёва. – Должен быть более прогрессивный метод. Разность кубов равна 2015, тогда 2015 делится на $(a-b)$. Посмотрим делители...»

Чай уже давно остыл, но Лёва не мог оторваться от поиска двух замечательных целых чисел. Наконец-то они были найдены. Это обрадовало его, и он поспешил написать об этом Антону.

– Представляешь, только две пары целых чисел являются решением уравнения: $a^3-b^3=2015$. Смотри: $14^3-9^3=2015$ и $(-9)^3-(-14)^3=2015$. Можешь попробовать доказать. Я вот это сделал! – написал Лёва.

– Попробую, конечно. Мне в голову не приходила идея рассматривать ещё и отрицательные числа.

– А я нашёл, как записывается 2015 в двоичной системе: 11111011111, – гордо заявил Антон. – Теперь и у меня получился палиндром.

– Давай теперь какие-нибудь простенькие задачки с числом 2015 загадаем друг другу?

– Хорошо, давай.

В скором времени Антону от Лёвы пришло письмо:

«В примере вместо знаков «+» и «–» стоят звёздочки. Расставь знаки так, чтобы получилось верное равенство:

$$1006*1005*1004*1003*1002*1001=2015».$$

Лёва молниеносно решил и отправил свою задачу:

«Используя цифры от 0 до 5, знаки вычитания и умножения, запиши число 2015. А можно ли вместо вычитания обойтись сложением?»

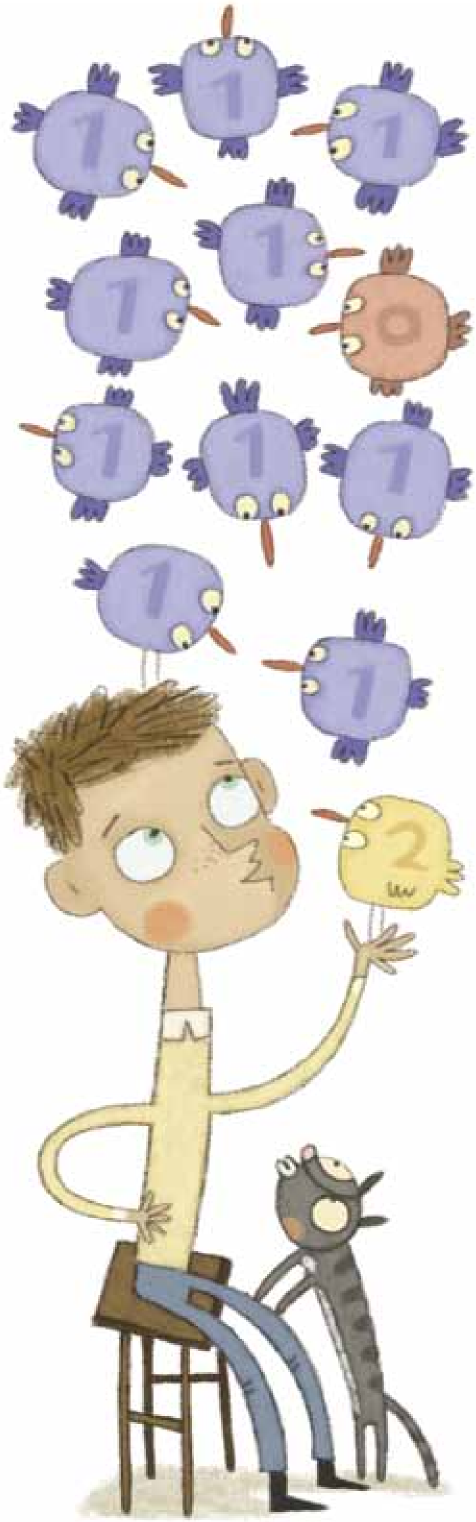
– Теперь надо поделиться своими результатами с ребятами на математическом кружке! – предложил Антон.

– Отлично! Пока! – согласился Лёва и ещё раз пересмотрел свои записи в тетради.

«Очень интересное число 2015, надеюсь, и год будет замечательным!» – подумал он и пошёл заваривать чай.

Упражнение 1. *Попробуйте и вы решить задачи Антона и Лёвы.*

Упражнение 2. *Найдите ещё какие-нибудь интересные свойства числа* 2015.



Художник Елена Цветаева

КОНКУРС по РУССКОМУ ЯЗЫКУ

Приглашаем всех желающих принять участие в нашем новом конкурсе. Возможно, вам, дорогие читатели, привычнее задачи по математике и физике, но попробуйте порешать и эти задачи, не пожалеете! А ещё покажите их своим друзьям-гуманитариям и любимому учителю русского языка.

Для победы вовсе не обязательно решить всё – присылайте то, что получится.

Решения первого тура ждём по адресу **kvantik@mccme.ru** не позднее 1 сентября.

Победителей ждут призы. Желаем успеха!

Предлагайте задачи собственного сочинения – лучшие будут опубликованы!

I ТУР

Задача 1. Найдите слово (имя существительное, нарицательное, в единственном числе), в котором имеются две одинаковые буквы, сразу вслед за которыми идут две другие одинаковые буквы.

И.Ф. Акулич

Задача 2. Из названия страны *Боливия* можно, отбросив две первые буквы, получить название другой страны – *Ливия*.

Из названия жителя одной европейской столицы можно таким же способом получить название жителя другой европейской столицы. Что это за столицы?

И.Б. Иткин

Задача 3. Слово *переносица* образовано от слова *нос*. А какое ещё существительное образовано от названия части тела с помощью приставки *пере*-?

С.И. Переверзева

Задача 4. Когда-то название этого вкусного и полезного продукта писалось то через «я», то через «ю». Сейчас ни одной из этих букв в его названии нет. Назовите этот продукт.

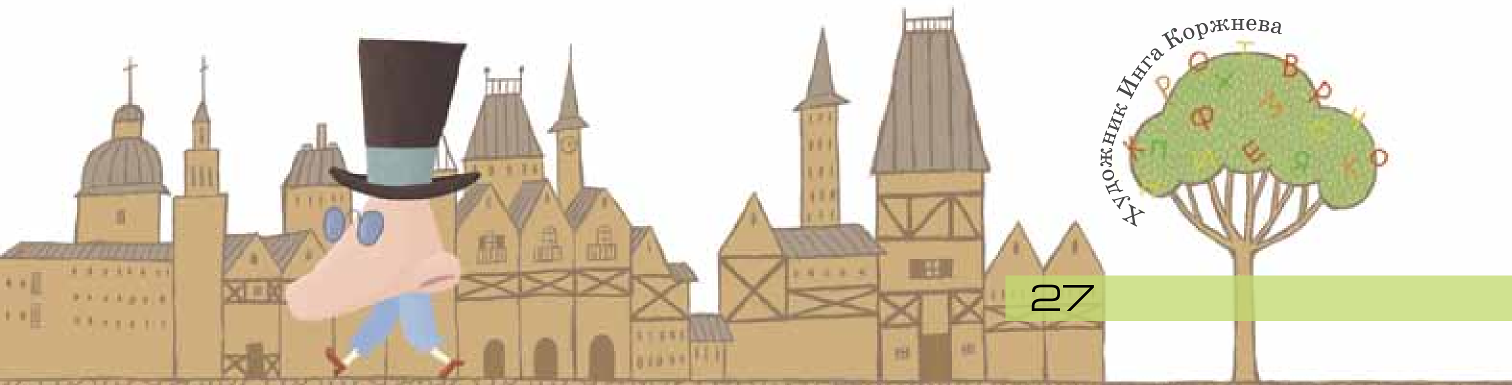
Л.М. Полянская

Задача 5. Яша заметил, что в русском языке первые несколько порядковых числительных можно разделить на две группы:

Группа 1	Группа 2
второй	первый
четвёртый	третий
пятый	шестой
	седьмой

По какому принципу?

Я.Г. Тестелец

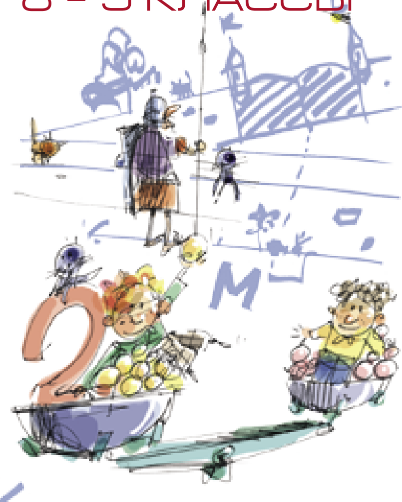


XXXVI ТУРНИР ГОРОДОВ

Избранные задачи

Недавно прошёл весенний тур XXXVI Международного математического Турнира городов. Приводим задачи базового варианта для 8 – 9 классов. В скобках после номера задачи указано, сколько баллов присуждалось за её полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов.

ВЕСЕННИЙ ТУР, 8 – 9 КЛАССЫ



Базовый вариант

1 (3 балла). Можно ли раскрасить грани куба в три цвета так, чтобы каждый цвет присутствовал, но нельзя было увидеть одновременно грани всех трёх цветов, откуда бы мы ни взглянули на куб? (Одновременно можно увидеть только три любые грани, имеющие общую вершину.)

Егор Бакаев

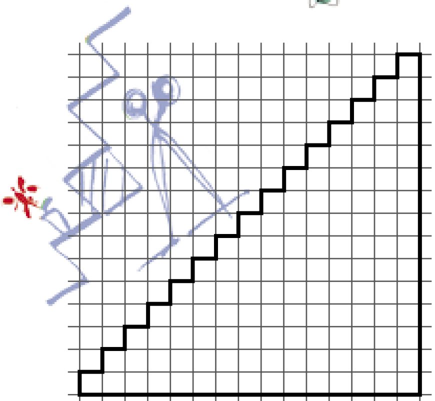
2 (4 балла). На стороне AB треугольника ABC отметили точки K и L так, что $KL = BC$ и $AK = LB$. Докажите, что отрезок KL виден из середины M стороны AC под прямым углом.

Егор Бакаев

3 (4 балла). Петя сложил 10 последовательных степеней двойки, начиная с некоторой, а Вася сложил некоторое количество последовательных натуральных чисел, начиная с 1. Могли ли они получить один и тот же результат?

Николай Авилов

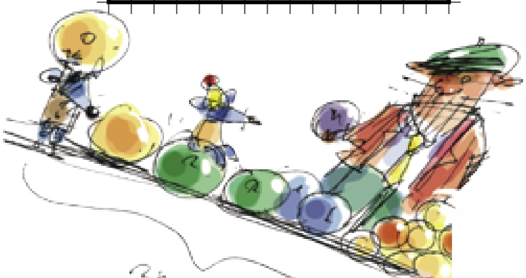
4 (4 балла). На какое наименьшее количество квадратов можно разрезать лесенку из 15 ступеней (см. рисунок)? Резать можно только по границам клеток.



Егор Бакаев

5 (5 баллов). Дано $2n+1$ чисел (n – натуральное), среди которых одно число равно 0, два числа равны 1, два числа равны 2, ..., два числа равны n. Для каких n эти числа можно записать в одну строку так, чтобы для каждого натурального m от 1 до n между двумя числами, равными m, было расположено ровно m других чисел?

Игорь Акулич



Художник Сергей Чуб

НАШ КОНКУРС («Квантик» № 4, 2015)

16. *– У Димы больше тысячи книг!*

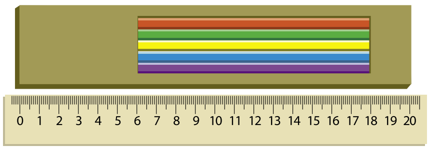
– Да нет, у него меньше тысячи книг.

– Ну уж хотя бы одна-то книга у него точно есть.

Известно, что среди этих утверждений ровно одно верное. Сколько книг может быть у Димы? Укажите все возможные варианты.

Можно рассуждать, например, так. У Димы не может быть больше 1000 книг: тогда и первое, и третье утверждения были бы верны. У Димы не может быть от 1 до 999 книг: тогда верны и второе, и третье утверждения. Остаются две возможности: 1000 книг или ни одной. Проверьте, что обе они подходят под условие задачи.

17. *Квантик купил коробочку с окошком, в которой вплотную друг к другу были уложены карандаши (как на рисунке). Квантик вертел коробочку и так и сяк, но карандаши всегда закрывали всё окошко целиком. Значит ли это, что карандаши длиной со всю коробку? Или они могут быть короче, и тогда какова их минимальная длина?*



Ответ: карандаши могут быть короче, их минимальная возможная длина – 18 см.

Если сдвинуть карандаши к левому краю коробочки, они всё равно закроют окошко целиком. Значит, их длина не меньше 18 см. Если их длина ровно 18 см, то они будут закрывать окошко целиком в любом положении: их правый конец всегда будет за отметкой 18 см, а левый – не дальше отметки 2 см.

18. *В конце учебного года шестиклассник Ваня посчитал количество замечаний в своём дневнике за 6-й класс. Их оказалось 50. Ваня заметил, что с каждым годом количество замечаний возрастает на одно и то же число. Сколько замечаний получит Ваня за все 11 лет учёбы в школе, если эта закономерность будет продолжаться? Укажите все возможные ответы.*

Всего классов 11, 6-й класс расположен как раз посередине. Пусть каждый год замечаний становилось на x больше. Тогда в 5-м классе замечаний было $50-x$, а в 7-м – $50+x$, то есть за 5-й и 7-й класс вместе Ваня получил 100 замечаний. Аналогично, в 4-м классе было $50-2x$ замечаний, а в 8-м – $50+2x$ замечаний, то есть суммарно за 4-й и 8-й класс – тоже 100 замечаний. Точно так же получаем, что по 100 замечаний Ваня получил за 3-й и 9-й классы, за 2-й и 10-й, и за 1-й и 11-й. Всего замечаний набирается $50+100+100+100+100+100=550$.

19. *В середине Сашиной линии метро есть две станции с похожим интерьером: «Зелёная» и «Лесная». Саша раз в месяц ездит на важное занятие на «Лесную» через «Зелёную». Но каждый раз получается так: Саша зачитывается новым номером «Квантика», не слышит объявлений диктора и оказывается перед дверями вагона, которые через несколько секунд закроются, не зная, где он – на «Зелёной» или на «Лесной». Как лучше поступать Саше, чтобы в среднем он тратил меньше времени: выходить или ехать до следующей станции?*

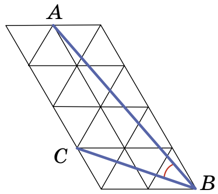
Поезда ходят в обе стороны с промежутком в 3 минуты, время в пути между соседними станциями – тоже 3 минуты.

Если Саша выйдет из вагона, то в лучшем случае он окажется на «Лесной», а в худшем – на «Зелёной». В первом случае он не потратит лишнего времени, а во втором случае ему надо будет подождать следующего поезда (лишние три минуты). Итого в среднем он потратит лишние 1,5 минуты.

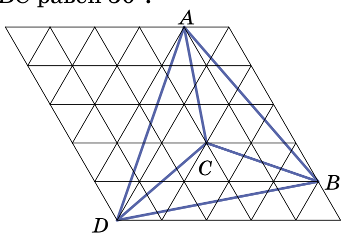
Если Саша проедет дальше, то в лучшем случае он проехал «Зелёную», а в худшем – проехал нужную ему «Лесную». В первом случае он не потратит лишнего времени, а во втором случае потратит лишние 6 минут только на проезд от «Лесной» до следующей станции и обратно и ещё в среднем 1,5 минуты на ожидание поезда. Итого в среднем он потратит лишние 3,75 минуты.

В итоге лучше выходить сразу.

20. *На бумаге «в треугольную клеточку» нарисован рисунок. Найдите величину угла ABC. (У треугольников-клеточек все углы равны по 60°. При решении вам может пригодиться такой факт: сумма углов любого треугольника равна 180°.)*



Отметим точку D, как показано на рисунке. Из рисунка видно, что отрезки AB, BD и DA равны (они построены «по клеточкам» одинаково), и отрезки CA, CB и CD тоже равны (по той же причине). Тогда ABD – равносторонний треугольник, разрезанный на три одинаковых равнобедренных треугольника. Углы равностороннего треугольника равны 60°. Значит, угол ABC равен 30°.



НЕЗЕМНАЯ КРАСОТА («Квантик» № 5, 2015)

Земля примерно в пять раз ближе к Солнцу, чем Юпитер. Значит, смотря на Юпитер с Земли (или с её орбиты), мы смотрим на него почти со стороны Солнца, и поэтому освещённую часть Юпитера мы должны увидеть почти целиком. А на одном из фото видна лишь примерно половина поверхности Юпитера, освещённой Солнцем. Поэтому такое фото можно получить лишь вдали от Земли.

ЧУДАК-ЧАСОВЩИК

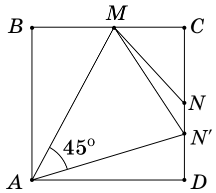
Решение задачи о модифицированных чудаковатых часах.

Эта задача намного проще первой, и её можно решить вообще без сложных вычислений. Как мы уже знаем из предыдущих статей про стрелки, они совпадают каждые $\frac{12}{11}$ часа. Легко видеть, что после каждого обмена скоростями стрелки «стартуют» из *правильного положения*, но скорости их правильны не всегда, а лишь каждый нечётный период длиной $\frac{12}{11}$ часа. Каждый чётный период на модифицированных часах минутная стрелка совпадает с часовой на правильных часах, а часовая – с минутной на правильных часах. Поэтому в чётном периоде чудаковатые часы покажут правильное время только тогда, когда стрелки совпадут, то есть лишь в начальный и конечный моменты. Так как за полсуток имеется всего 11 периодов (нечётное количество!), то и здесь одной половиной суток не обойтись. Таким образом, часы показывают правильное время в течение 11 промежутков (включая, естественно, и их концы): от 0 часов до $\frac{12}{11}$ часов; от $\frac{24}{11}$ до $\frac{36}{11}$ часов; от $\frac{48}{11}$ до $\frac{60}{11}$ часов; ...; от $\frac{240}{11}$ до $\frac{252}{11}$ часов.

УГОЛ В КВАДРАТЕ

Упражнение 1. Идея решения такая: если зафиксировать точку M, то точка N определяется любым из условий 1–4 однозначно. Из этого будет следовать, что каждое условие выполнено *только в том случае*, если угол MAN равен 45°.

Итак, докажем утверждение, обратное утверждению 1. Пусть периметр треугольника MCN равен половине периметра квадрата. Отметим на стороне CD квадрата точку N' так, чтобы угол MAN' был равен 45° как на рисунке справа. По утверждению 1, периметр треугольника MCN' равен половине периметра квадрата. Значит, периметры треугольников MCN и MCN' совпадают. Если точка N' дальше от вершины C, чем точка N, то $CN' > CN$ и $MN' > MN$. Другими словами, периметр треугольника MCN' больше периметра треугольника MCN – противоречие.

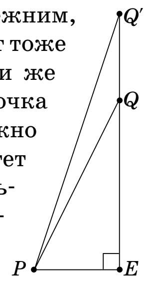


Если N' ближе к C, чем N, то периметр MCN' меньше периметра MCN. Поэтому $N = N'$ и, значит, угол MAN равен 45°.

Перейдём к утверждениям 2 и 3. Если выполнено условие 2, то выполнено условие 3, как легко видеть. Поэтому достаточно вывести равенство $\angle MAN = 45^\circ$ из условия 3 (тогда из условия 2 это равенство будет следовать автоматически).

Итак, пусть окружность с центром A и радиусом, равным стороне квадрата, касается стороны MN. Как и раньше, отметим на стороне CD точку N' так, чтобы угол MAN' был равен 45°. По утверждению 3, MN' касается той же окружности. Однако к любой окружности из точки снаружи можно провести только две касательных. Для точки M это прямая MB и прямая MN, которая совпадёт с прямой MN'. Значит, $N = N'$ и, значит, угол MAN равен 45°.

Наконец, перейдём к утверждению 4. Как и раньше, отметим на стороне CD точку N' так, чтобы угол MAN' был равен 45°. Точку пересечения AN' с BD обозначим через Q'. По условию 4, из отрезков BP, PQ' и $Q'D$ можно составить прямоугольный треугольник с гипотенузой PQ'. Если точка Q' ближе к вершине D, чем точка Q, то $PQ < PQ'$ и $QD > Q'D$. Это противоречит тому, что если в прямоугольном треугольнике один катет оставить прежним, а гипотенузу увеличить, то второй катет тоже увеличится (см. рисунок справа). Если же точка Q' дальше от вершины D, чем точка Q, то $PQ > PQ'$ и $QD < Q'D$, что невозможно по аналогичной причине (если один катет оставить прежним, а гипотенузу уменьшить, то второй катет тоже уменьшится). Значит, $Q = Q'$, $N = N'$ и угол MAN равен 45°.



Упражнение 2. Если перегнуть квадрат по диагонали BD, то точки C и A совместятся, а значит, угол PCQ совместится с углом PAQ. Поэтому угол PCQ тоже равен 45°.

Упражнение 3. Как уже отмечалось, при перегибании по прямой AP прямая PQ переходит в прямую EP. В частности, перпендикуляр, опущенный на PQ из точки A, перейдёт в равный ему перпендикуляр, опущенный на прямую EP. Значит, точка A равноудалена от прямых PQ и EP. С помощью перегибания по прямой AQ получаем, что расстояния от точки A до прямых PQ и EQ тоже равны. Поэтому окружность с центром в A и радиусом, равным расстоянию до прямых PQ, EP и EQ, касается стороны PQ и продолжений сторон EP и EQ треугольника PEQ, то есть это вневписанная окружность треугольника PEQ.

Упражнение 4. По утверждению 6, в треугольнике AQM угол AQM прямой, а угол MAQ по условию равен 45°. Значит, угол AMQ тоже равен 45° (по сумме углов треугольника), то есть треугольник AQM равнобедренный: $AQ = MQ$. Аналогично доказывается, что $AP = NP$.

Упражнение 5. По утверждению 6, NP и MQ – высоты треугольника AMN; AE – третья его высота. Но, как известно, прямые, содержащие высоты любого треугольника, пересекаются в одной точке.

Решения задач 8 и 9, а также много других интересных и сложных задач по этой теме ищите в статье А. Блинкова и Ю. Блинкова «Угол в квадрате» в «Кванте» №4 за 2014 год.

БЕТХОВЕН, ДУРОВ И ДИРИХЛЕ

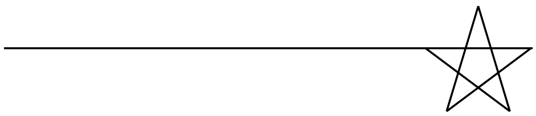
Бетховен действительно оглох в конце жизни, и «Лунная соната» у него была, но вот всё остальное неправда. Ведь он никак не мог услышать мяуканье кошки за спиной.

ПЯТЬ ЗВЁЗДОЧЕК

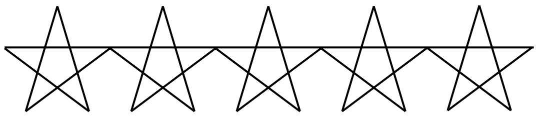
Понятно, что сократить время ровно на полсекунды или полторы секунды не получится: так как каждый отрезок требует 0,2 секунды, то суммарное время должно быть кратно этой величине. Но оба указанных значения можно превзойти! Укажем, как.

Первый способ состоит в том, чтобы провести сначала слева направо горизонтальный отрезок, который по длине впятеро превосходит горизонтальный отрезок каждой звёздочки:

А теперь, продвигаясь справа, сначала подрисовываем четыре отрезка, получая первую звёздочку:

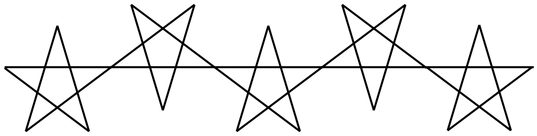


Потом таким же способом добавляем ещё четыре звёздочки, доведя их число до пяти:



Сколько же отрезков нам пришлось начертить? Сначала один длинный (но время изображения одного отрезка неизменно!), затем ещё 5 раз по 4. Итого – 21 отрезок, и затраченное время составит $0{,}2 \times 21 = 4{,}2$ секунды – экономия времени заметно превосходит полсекунды! Более того – здесь можно даже (теоретически, конечно) добиться, чтобы звёздочки были правильными.

Чтобы ещё уменьшить время, обратим внимание на то, что при переходе от каждой звёздочки к следующей мы вынужденно делаем «излом» траектории. Но можно без него обойтись, если вторую и четвёртую звёздочки нарисовать в перевёрнутом виде, в результате чего получится такая картинка:



Такой подход позволяет обойтись всего лишь 17-ю отрезками и уложиться в $0{,}2 \times 17 = 3{,}4$ секунды. Экономия времени здесь 1,6 секунды – больше, чем полторы!

Казалось бы, дальше ехать некуда. Но, оказывается, полученный результат можно существенно улучшить. Попробуйте! Пример мы опубликуем в следующем номере.

О ЧИСЛЕ 2015

Упражнение 1.

$1006 + 1005 + 1004 + 1003 - 1002 - 1001 = 2015;$

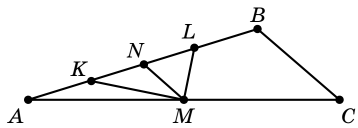
$5 \cdot 403 \cdot (2-1) = 2015;\ 4 \cdot 503 + 1 + 2 = 2015.$

XXXVI ТУРНИР ГОРОДОВ. ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ

1. Ответ: можно.

Покрасим верхнюю грань в первый цвет, нижнюю – во второй, а остальные четыре – в третий.

2. Пусть N – середина стороны AB. Тогда N будет одновременно и серединой KL. При этом MN будет средней линией треугольника BAC, и значит, её длина равна $\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}KL$. Получается, что точка M лежит на окружности с центром в точке N и диаметром KL, то есть угол KML опирается на диаметр – а такой угол, как известно, прямой.



3. Ответ: могли.

Сумма первых n последовательных чисел $1 + 2 + \ldots + n$ равна $n(n+1)/2$. Сумма десяти последовательных степеней двойки $2^k + 2^{k+1} + \ldots + 2^{k+9}$ равна $2^k(1 + 2 + \ldots + 2^9)$. Но $1 + 2 + \ldots + 2^9 = 2^{10} - 1$ (это легко проверить, прибавив к обеим частям равенства 1: в левой части $1 + 1$ превратится в 2, затем $2 + 2$ – в 4, и так далее). Получается, что должно выполняться равенство: $n(n+1)/2 = 2^k(2^{10} - 1)$, то есть $n(n+1) = 2^{k+1}(2^{10} - 1)$. Возьмём $n = 2^{10} - 1$, тогда $n + 1 = 2^{10} = 2^{k+1}$, то есть $k = 9$.

Получили пример: $2^9 + \ldots + 2^{18} = 2^9(2^{10} - 1) = 1 + 2 + 3 + \ldots + (2^{10} - 1)$.

4. Ответ: на 15 квадратов.

Очевидно, крайние левые клетки двух разных строк не могут принадлежать одному квадрату. Значит, квадратов не меньше 15. Пример с 15 квадратами приведён на рисунке.

5. Ответ: для любых.

Расположим числа так:

$\ldots, 6, 4, 2, n, 0, 2, 4, 6, \ldots, 5, 3, 1, n, 1, 3, 5, \ldots$

(сначала стоят в убывающем порядке все чётные положительные числа, меньшие n, потом n, 0, те же чётные числа в возрастающем порядке, далее все нечётные, меньшие n, – в убывающем порядке, потом n и те же нечётные числа в возрастающем порядке).

Тогда между единицами стоит одно число n, и между каждой следующей парой нечётных чисел (меньших n) добавляется по два числа. Аналогично, между двойками стоят два числа n и 0, и между каждой следующей парой чётных чисел (меньших n) добавляется по два числа. А межу числами, равными n, находятся все числа, меньшие n, начиная с 0, – то есть как раз n чисел $(0, 1, 2, \ldots, n-1)$.

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем **конкурсе**.

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, не позднее 1 июля по электронной почте **kvantik@mccme.ru** или обычной почтой по адресу:

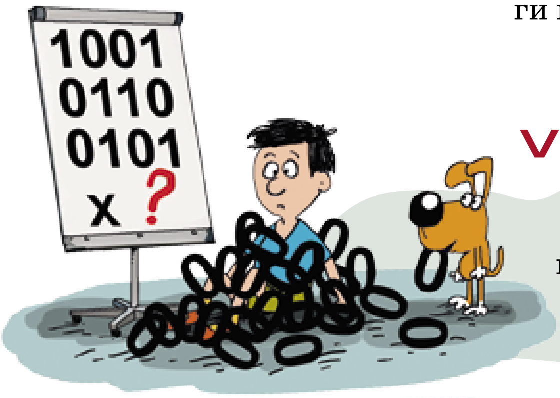
119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный адрес.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте www.kvantik.com. Итоги будут подведены в конце года. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик», научно-популярные книги и диски.

Желаем успеха!

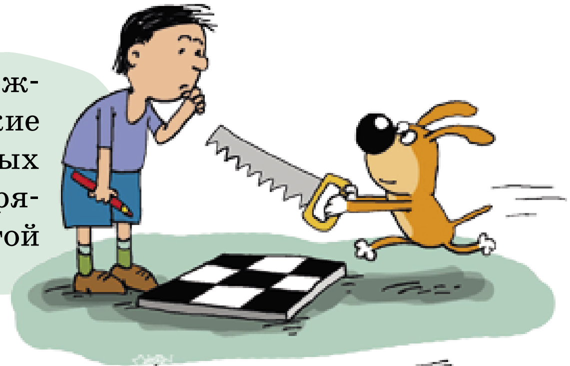
VI ТУР



26. Можно ли умножить число 101001000100001 на другое целое число так, чтобы среди цифр произведения не было нуля?

27. Сто одинаковых шкатулок расположены в один ряд. В одной из шкатулок находится бриллиант. На каждой шкатулке сделана надпись: «Бриллиант лежит в соседней шкатулке (слева или справа)». Известно, что ровно одна надпись из ста правдивая, а все остальные – ложь. Разрешается открыть ровно одну из шкатулок. Можно ли открыть такую шкатулку, чтобы после этого точно узнать, где лежит бриллиант?

Авторы задач: Григорий Гальперин (27), Павел Кожевников (30)



28. а) Каким наименьшим числом прямых можно разрезать все клетки доски 3×3? Нарисуйте такие прямые и докажите, что меньшим числом прямых обойтись нельзя. (Чтобы клетка была разрезана, прямая должна проходить через внутреннюю точку этой клетки.)

б) Та же задача для доски 4×4.

29. Петя, Коля и Вася решали задачи из задачника и решили вместе 100 задач, при этом каждый из них решил ровно 60 задач. Будем называть задачу, которую решили все трое, лёгкой, а задачу, которую решил только один из ребят, – трудной. Каких задач было больше, лёгких или трудных, и на сколько?

30. Тётя Маша купила рулон обоев радиуса 15 см на катушке радиуса 5 см (то есть толщина обоев на катушке равнялась 10 см). Она оклеила обоями половину стен в комнате, и толщина обоев стала равна 5 см (то есть рулон стал радиуса 10 см). «Ну что же, израсходовано полрулона, как раз хватит на вторую половину», – подумала тётя Маша. На какую часть стены на самом деле хватит ей оставшейся части рулона?

Художник Николай Крутиков

МАШИНЫ НА ТРОТУАРЕ

Две одинаковые машины стоят передними колёсами на тротуаре, а задними – на дороге.

У какой машины дно сильнее наклонено к поверхности дороги: у той, которая стоит перпендикулярно тротуару, или у той, которая стоит под углом?

Будет ли какая-то из машин скатываться, если её снять с тормоза?

Автор Григорий Фельдман
Художник Максим Калякин