№4 | апрель 2012

Издается при поддержке Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО)

e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

Про **КУЗДРУ** и **БАРМАГЛОТА**

Как работают **СУПЕРКОМПЬЮТЕРЫ**

№4
апрель
2012

ЧТО ТАКОЕ ФЛЕКСАГОНЫ?

ЯПОНИЯ, КИТАЙ и ПИЦЦА

КАК НАЙТИ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ?

Enter

ДОРОГИЕ ДРУЗЬЯ!

Вы держите в руках уже четвёртый номер нашего журнала. Посмотрели на обложку? Не переживайте за Квантика – хоть он и оказался на необитаемом острове среди моря флексагонов, выход всегда найдётся. Нужно только развернуть их другой стороной, и море превратится в сушу! Подробный рассказ о флексагонах и их удивительных свойствах, а также инструкцию по изготовлению ищите в этом номере.

Нам приходит много писем с решениями задач конкурса – большое спасибо! Приглашаем всех, кто ещё не присоединился, к участию в конкурсе.

Нам очень важно знать, что вам нравится в журнале, а что – нет, какие статьи показались интересными, а какие – не очень, о чем ещё вы хотели бы прочитать в журнале. Присылайте свои отзывы и пожелания.

Наш электронный адрес:
kvantik@mccme.ru

www.kvantik.com

Художник Yustas-07

Главный редактор: Сергей Дориченко
Зам. главного редактора: Ирина Маховая
Редакторы: Александр Бердников,
Григорий Фельдман
Главный художник: Yustas-07
Художественный редактор: Дарья Кожемякина
Верстка: Ира Гумерова, Рая Шагеева
Обложка: художник Yustas-07
Формат 84х108/16. Издательство МЦНМО

Журнал «Квантик» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство ПИ N ФС77-44928 от 4 мая 2011 г.
Тираж: 1-й завод 500 экз.

Адрес редакции:
119002, Москва,
Большой Власьевский пер., 11.
Тел. (499)241-74-83.
e-mail: kvantik@mccme.ru
По вопросам распространения обращаться по телефону:
(499) 241-72-85;
e-mail: biblio@mccme.ru

Подписаться можно в отделениях связи Почты России, подписной индекс **84252**.

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ЗАО "ИПК Парето-Принт", г. Тверь.
www.pareto-print.ru
Заказ №

СОДЕРЖАНИЕ

По течению и против

Сергей Дориченко

Впервые опубликовано в журнале «Квант+», №2 за 2011 г.

Андрей, Даня, Миша и Федя собрались после уроков на математический кружок. Преподавателя в классе ещё не было, но кто-то уже написал на доске несколько задач. Первая была такая.

1. Двое ребят одновременно прыгнули с плывущего по реке плота и поплыли в разные стороны: первый – по течению, а второй – против. Через 5 минут они развернулись и вскоре вновь оказались на плоту. Кто вернулся раньше? (Каждый плыл равномерно со своей скоростью.)

– Интересно, это для нас задача? – спросил Миша.

– Эх, сейчас бы на речку, куда интереснее, чем эти ваши задачи, – ответил Федя. – Да и вообще задача неправильная.

– Почему? – спросил Миша.

– Надо было ещё сказать, что скорости этих двоих больше скорости течения, – сказал Федя. – Иначе тот, кто против течения прыгнул, не сможет от плота отплыть.

– А вот и сможет, – возразил Даня, – даже если его скорость равна скорости течения.

– Да что ты выдумываешь? – закричал Федя. – Он тогда на одном месте будет барахтаться. Со мной так было летом. Плыву изо всех сил против течения, а рядом на берегу ёлка растёт здоровенная. Так я сколько ни грёб, все время напротив неё был. Еле на берег потом выбрался. Очень уж река была быстрая.

– Ну хорошо, ты на одном месте будешь, но плот-то не будет тебя ждать, – заметил Даня. – Плот же не на берегу, как твоя ёлка, его река унесёт.

– Вы меня совсем запутали, – сказал Федя. – Значит, если я даже медленнее течения плыву, я всё равно от плота уплыву?

– Конечно, – подтвердил Даня, – ведь плот совсем течению не сопротивляется, а ты, хоть и слабо, но гребёшь против.

– Ну и как тогда задачу решать?

Ребята молчали, каждый пытался сообразить, но решение не приходило.

– У меня идея, – вдруг сказал Андрей. – Пусть всё на озере происходит. Тогда оба вернутся одновременно: плот стоит, каждый плывёт от него 5 минут и столько же возвращается.

– Но у нас-то река, а не озеро, – возразил Даня. – Ещё течение добавляется!

– Ну и что? Река всё, что в неё попало, одинаково движет вперёд: со скоростью течения. А это значит, что течения как бы и нет.

– Пожалуй, правда. Неужели всё так просто?

– Конечно. А в туман, когда берега не видно, ты вообще реку от озера не отличишь!

– Придумал, придумал! – Все посмотрели на Федю, который от волнения даже руками размахивал. – Я могу ещё понятнее объяснить. У меня папа кинооператор, он боевик снимал, и там был похожий случай. Вот представьте, ехал бы он по берегу всё время напротив плота и снимал его на плёнку. Что бы мы потом на экране увидели?

– Ничего особенного, – пожал плечами Даня. – В центре экрана плот стоит, а противоположный берег с деревьями едет, как за окном в поезде.

– Нам берег сейчас не интересен, – строго сказал Федя. – Важно, что был бы неподвижный плот, причём на неподвижной воде! С него в разные стороны спрыгнули двое. За 5 минут каждый отплыл на своё расстояние и обратно проплывёт его за те же 5 минут.

– Да, здорово, – сказал Андрей. – Кажется, это называется «перейти в систему отсчёта, связанную с плотом», моему брату на физике рассказывали.

– Не умничай. А про поезд ты удачно вспомнил, как мы сразу не сообразили. – Федя просто сиял от удовольствия. – Река всё вперёд движет, как будто поезд или самолёт. Вот если мы с тобой побежим в разные стороны по коридору летящего самолёта и через пару секунд побежим обратно, то встретимся в исходной точке.

– Ага, – согласился Даня. – И если подпрыгнуть в самолёте вверх, то приземлишься на то же место, откуда прыгал. Хоть у самолёта скорость огромная, он из-под тебя не улетит.

– А потому, – подхватил Андрей, – что это у него относительно земли скорость большая. Но и ты летишь с той же скоростью. Вот для тебя самолёт и неподвижен.

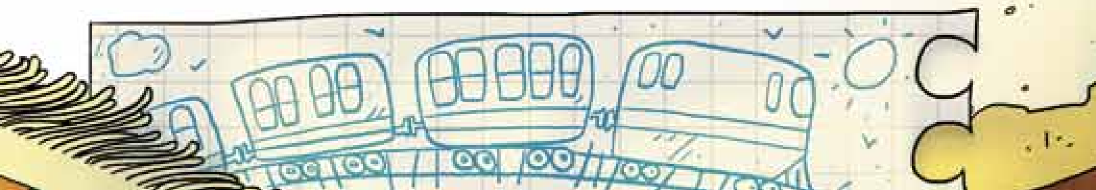
– Правда, когда я летел в самолёте, – сказал Федя, – меня во время взлёта в кресло так и вдавило. Попробовал бы я тогда подпрыгнуть. А если бы в коридоре стоял, так и покатился бы в хвост.

– Так самолёт тогда скорость набирал, двигался с ускорением, – ответил Даня. – Это совсем другое дело. Не зря же во время взлёта и посадки там ходить запрещается.

– Теперь понятно, почему в фильмах ковбои не боятся бежать по крыше поезда и с вагона на вагон прыгать, – не унимался Федя. – А это всё равно, что по неподвижному составу бежать.

– Ну не совсем, – возразил Андрей. – Ты когда подпрыгнешь, тебя встречный воздух тормозить начнёт: он-то не движется вместе с поездом. Если поезд очень быстро едет, тебя вообще с крыши может ветром снести. А во времена ковбоев поезда медленно ездили, обычная лошадь могла поезд обогнать.

– Пока вы там спорили про своих ковбоев, я задачу решил алгебраически, с помощью уравнения, – замахал листком бумаги Миша. – Показать?



– Да и так всё ясно. Ну ладно, показывай, не зря же ты старался.

Ребята столпились над Мишиным листком.

– А у меня очень коротко. Пусть v – скорость реки, x – скорость первого, в метрах в минуту. Первый сначала плывёт 5 минут по течению со скоростью $x + v$ относительно берега. А возвращается пусть t минут, уже со скоростью $x - v$. Тогда в итоге он сдвинется от начального положения на $5(x + v) - t(x - v)$ метров, а плот сдвинется на $(5 + t)v$ метров. Но они должны оказаться в одной точке. Приравнивая, получаем $t = 5$. Ну и для второго так же проверяется.

– У нас то же самое, только без всяких там x и v.

– Давайте и вторую задачу решим.

2. Города A и B находятся на берегу прямой реки в 10 км друг от друга. На что у парохода уйдёт больше времени: проплыть от A до B и обратно или проплыть 20 км по озеру?

– Ну, эта задача ещё проще, – сразу заявил Федя. – Когда пароход плывёт по течению, ему река помогает. А когда он плывёт против течения, ему река мешает, и всю выгоду от полученной помощи съедает. Значит, одно и то же получается, что от A до B и обратно проплыть, что по озеру.

– Что-то тут не так, – засомневался Андрей. – Представь, что скорость парохода равна скорости течения. Он тогда в тот город, что выше по течению, вообще не доплывёт, не поборет течение. А по озеру запросто. Так что, наверное, по озеру всегда быстрее.

– А где у меня ошибка?

– Кажется, я понял. Вот ты говоришь, течение помогает, мешает... А что это значит?

– Что тут неясного?

– Помогает – значит каждую секунду ещё на сколько-то метров вперёд пододвигает, а мешает – каждую секунду на столько же метров обратно отодвигает, по сравнению с озером.

– Так и я то же самое говорю, только короче и понятнее.

– Да ты главное забыл. Пароход плывёт вверх и вниз одно и то же расстояние. Но вниз он проплывает его быстрее, чем вверх. А значит, течение помогает ему меньше времени, чем мешает! Вот и получается, что выгода будет меньше, чем вред.

– Ах я дубина! Да, здорово. Выходит, по озеру быстрее получится.

– А я снова алгебраически задачу решил, – сказал Миша.

– Слушай, ты, алгебраист-отличник, – набросился на него Федя. – Ну что тут писать, если уже и так всё ясно.

– Видел я, как вам всё было ясно. Вы запутались, вот я и составил уравнение. Я же не знал, что вы так скоро распутаетесь.

– Ладно, показывай. Эх, неохота проверять.

На листке было написано следующее:

v – скорость парохода,
u – скорость реки (в км/ч)
10 км по течению: $\frac{10}{v+u}$ ч,
10 км против течения: $\frac{10}{v-u}$ ч,
всего: $\frac{10}{v+u} + \frac{10}{v-u} = \frac{20v}{v^2-u^2}$ ч
20 км по озеру: $\frac{20}{v}$ ч
$\frac{20v}{v^2-u^2} > \frac{20}{v} \Leftrightarrow 20v^2 > 20(v^2-u^2)$.

– Я вычисления плохо понимаю, – сказал Федя, – я люблю без них обходиться. Так, есть у нас что-нибудь нерешённое?

На доске оставалась ещё одна задача.

3. Пароход вниз по реке идёт от А до В трое суток, а от В до А – пять суток. Сколько времени будут плыть плоты от А до В?

– Ой, а тут наверняка уравнение составлять придётся, – помрачнел Федя. – Вот сказано, что вниз по реке пароход плывёт трое суток, а вверх – пять. И что это значит?

– Да просто скорости их относительно земли относятся как 5 к 3, – сказал Андрей.

– Чьи скорости? – не понял Федя.

– Ну, парохода, который по течению плывёт, и который против, – пояснил Андрей. – Можно даже так сказать: выпустим два одинаковых парохода, один вниз по течению, а другой вверх. Тогда если первый проплыл по реке 5 км, второй за это время проплывёт 3 км.

– Слушайте, да это же гениальная идея! – подхватил Даня.

– Какая ещё идея?

– Два парохода из пункта *А* одновременно выпустить в разные стороны. Только надо в этот момент ещё и плот по течению отправить.

– А зачем? – удивился Федя.

– Да плот всё время посередине между пароходами будет, если расстояние вдоль реки считать! Вспомни задачу про ребят, которые с плота спрыгнули.

– Ух ты, классно! Пароходы – как будто те двое. А раз пароходы одинаковые, то удаляются от плота с равными скоростями. Только как нам это поможет?

– А вот как. Если первый пароход отплыл от *А* на $5x$ км, то второй – на $3x$ км, так? Плот в это время посередине между ними. А где эта середина будет-то?

– Расстояние между пароходами $8x$ км, половина – это $4x$ км. Значит, плот будет... на расстоянии x км от пункта A вниз по течению.

– Вот задача и решена. Тебя интересует, когда плот окажется в пункте B, то есть за x берёшь расстояние между A и B. Первый пароход проплывёт за это время пять расстояний от A до B, а одно такое расстояние он проплывает за трое суток. Значит, пять расстояний проплывает за 15 суток, это ответ.

– А я составил уравнение, там тоже совсем просто получается, – сказал Миша.

– Слушай, ты без своих уравнений просто жить не можешь, – рассердился Федя.

– Да вы посмотрите, всего три строчки. Обозначим расстояние между пунктами A и B за 1.

– Я не понял, 1 чего?

– Да какая разница. Есть же между ними какое-то расстояние. Можно его за единицу измерения принять. Помнишь, в том мультфильме длину удава в попугаях измеряли? А мы будем измерять путь в расстояниях между A и B. Ничем не хуже километров. Так всегда делают для удобства, чтобы не вводить лишнюю переменную.

– Ладно, что дальше?

– Пусть скорость парохода – v, скорость течения – u наших единиц в сутки. Тогда по условию $3(v + u) = 1$ и $5(v - u) = 1$, откуда $v + u = 1/3$, $v - u = 1/5$. Вычитая из первого уравнения второе, получим $2u = 1/3 - 1/5 = 2/15$, то есть $u = 1/15$. Значит, плот доплывёт от A до B за 15 суток.

– И у нас ответ такой же.

– А я сам задачу придумал! Ура! – Андрей выбежал к доске и схватил в руки мел.

– Да ну...

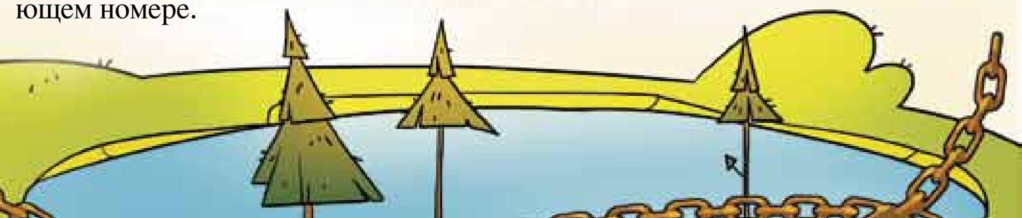
– Нет, правда. Мне так первое решение про пароходы понравилось, что я сам задачу придумал. Вот решите-ка. – И Андрей написал на доске условие.

– Понятно, понятно, – закричал Даня. – Это практически та же самая задача.

4. Из пункта А вниз по течению прямой реки одновременно отплыли плот и катер, а навстречу им в тот же момент из пункта В отправился такой же катер. Докажите, что в тот момент, когда первый катер достигнет пункта В, плот окажется точно посередине между пунктом А и вторым катером.

Ребята быстро справились с задачей Андрея, и она им очень понравилась. Решите и вы эту задачу.

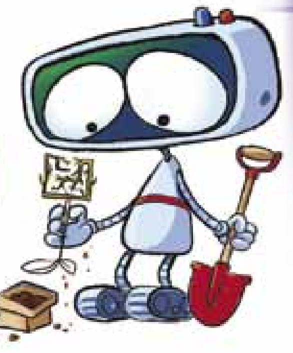
Тут в класс зашёл учитель. А что было дальше, читайте в следующем номере.



Художник Виктор Пяткин

Глеб Погудин

КАК НАЙТИ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ?



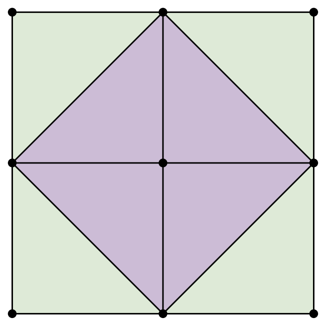
Такие арифметические действия, как сложение, вычитание, умножение и деление, вы наверняка уже давно освоили и при желании можете провести их без помощи калькулятора. Однако в арсенале математика есть ещё несколько операций с числами. Об одной из них – о квадратном корне – и пойдёт речь в этой статье.

По определению, *арифметическим квадратным корнем* из числа x называется такое положительное число y, что $y \cdot y = y^2 = x$ (говорят, что «y в квадрате равен x»). Обозначают это так: $y = \sqrt{x}$. Вычислить корень (или, как говорят, *извлечь корень*) из некоторых чисел легко, вспомнив таблицу умножения: $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$ и так далее.

Квадратный корень удобно представлять себе следующим образом. Пусть есть квадрат с площадью a см^2, тогда его сторона равна $\sqrt{a}$ см. И правда, ведь если сторона квадрата $\sqrt{a}$ см, то его площадь будет равна $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ см^2. Поскольку у большего квадрата и сторона длиннее, то сразу получаем очень важный для нас факт:

если $a > b$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

Рассмотрим четыре рядом стоящих одинаковых квадратика со стороной 1 (1 см, 1 дюйм, 1 м – это всё равно).



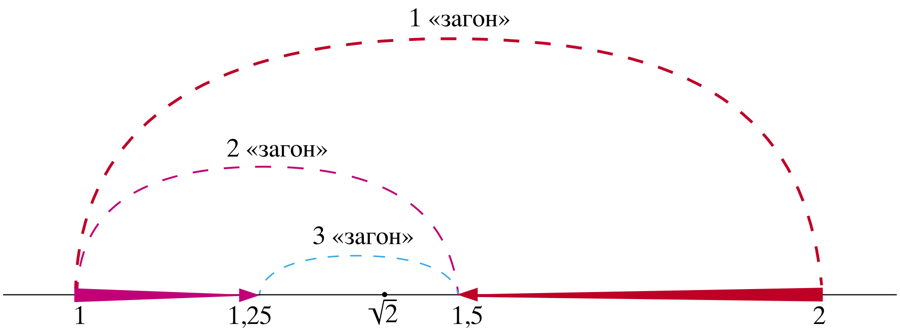
Большой квадрат состоит из восьми одинаковых треугольничков, а синий квадрат – из четырёх

Очевидно, что синяя фигура – квадрат. Его площадь равна половине площади большого квадрата, то есть $\frac{4}{2} = 2$. Если сторона заштрихованного квадрата y, то $y \cdot y = 2$, значит, $y = \sqrt{2}$.

Калькулятор говорит, что $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ Многоточие означает, что цифры после запятой продолжаются до бесконечности. Как же калькулятор мог получить этот ответ? Сейчас расскажем.

Основная идея состоит в том, чтобы зажать $\sqrt{2}$ между числом, меньшим его, и числом, большим его (то есть поместить его в «загон»), а потом постепенно этот «загон» сужать. Так как $1 < 2 < 4$, мы можем утверждать, что $1 < \sqrt{2} < 2$. Для сужения «загона» воспользуемся *методом деления пополам* (или, научно говоря, *дихотомией*). А именно, разделим отрезок между 1 и 2 пополам – получим два возможных «загона» $[1;\ 1{,}5]$ и $[1{,}5;\ 2]$. Искомый $\sqrt{2}$ будет находиться в одном из

них. Так как $1{,}5^2 = 2{,}25 > 2$, то $1 < \sqrt{2} < 1{,}5$; значит, $\sqrt{2}$ лежит в «загоне» $[1;\ 1{,}5]$. Снова поделим отрезок пополам – получим два возможных «загона»: $[1;\ 1{,}25]$ и $[1{,}25;\ 1{,}5]$. Потом выясним, в какой из половин лежит $\sqrt{2}$ (так же, как и в прошлый раз, сравнив $1{,}25^2$ и 2). И так далее... Будем всё ближе подбираться к $\sqrt{2}$.



Получаем I инструкцию по вычислению $\sqrt{2}$:

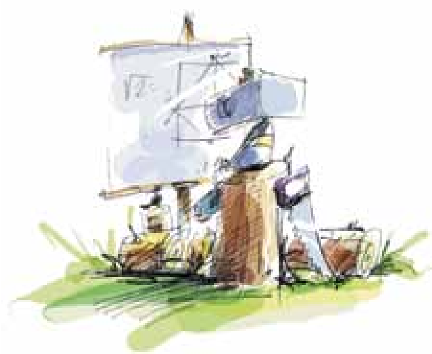
1. *Пусть мы уже знаем, что* $\sqrt{2}$ *находится в «загоне»* $[a;\ b]$.

2. *Находим его середину* $\frac{a+b}{2}$ *– она будет одним из концов нового «загона».*

3. *Если* $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > 2$, *то новым «загоном» будет* $\left[a;\ \frac{a+b}{2}\right]$, *а если же неравенство в другую сторону, то* $\left[\frac{a+b}{2};\ b\right]$.

4. *Если «загон» все ещё кажется слишком широким, идём к пункту* 1. *Иначе выдаём в качестве ответа середину «загона».*

Способ вычисления $\sqrt{2}$ вроде бы придумали. Но когда мы примерно вычисляем что-либо, нас всегда интересует, насколько сильно мы можем ошибаться. Только что мы подсчитали, что $1 < \sqrt{2} < 1{,}5$. А это означает, что если мы скажем, что $\sqrt{2} = 1{,}25$, то ошибёмся не более чем на 0,25. В таком случае 1,25 называют приближённым значением, а 0,25 – погрешностью. Чем меньше погрешность, тем точнее вычисления. Сколько же раз надо проделать деление пополам (будем называть его *шагом*), чтобы погрешность стала меньше, например, одной сотой? Заметим, что погрешность равна попросту половине длины «загона». А эта длина, в свою очередь, каждый раз уменьшается вдвое. Значит после n шагов погрешность будет равна $\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}}_{n\text{ штук}}$. Чтобы это число стало меньше одной сотой, достаточно взять $n = 6$.



На самом деле количество шагов можно сильно уменьшить. Пускай есть два числа $a > b$ такие, что $ab = 2$. Если заменить в левой части этого равенства одно из наших чисел на другое, получим неравенства $aa > 2$ и $bb < 2$. Извлекая корень, получим $b < \sqrt{2} < a$. Но числа x и $\frac{2}{x}$ как раз такие ($x\cdot\frac{2}{x} = 2$). Отсюда следует такой важный вывод:

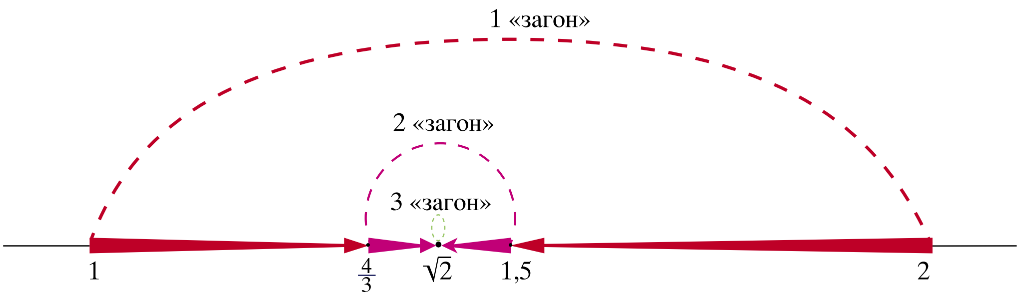
$\sqrt{2}$ *всегда лежит между* x и $\frac{2}{x}$

Именно на этом соображении и будет основана модификация нашего способа.

Теперь, выяснив, что $\sqrt{2}$ лежит либо в $[1; 1{,}5]$, либо в $[1{,}5; 2]$, можно не возводить 1,5 в квадрат, а сразу сузить «загон» для $\sqrt{2}$ ещё сильнее: сказать, что $\sqrt{2}$ находится между 1,5 и $\frac{2}{1{,}5}$. При этом мы пока даже не знаем, какое из этих двух чисел больше! Но это, конечно, легко выяснить: $2:1{,}5=2:\frac{3}{2}=\frac{4}{3}=1{,}333\ldots$

Продолжим: у нас есть «загон» $[1{,}333\ldots; 1{,}5]$. Так же, как и раньше, находим его середину: $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\right)=\frac{17}{12}=1{,}4166\ldots$ Аналогично предыдущему шагу, можем заключить, что $\sqrt{2}$ находится между $\frac{17}{12}$ и $\frac{2}{\frac{17}{12}}=\frac{24}{17}=1{,}411764\ldots$

Получили новый «загон» $\left[\frac{24}{17}; \frac{17}{12}\right]$. Его длина равна $\frac{17}{12}-\frac{24}{17}=$ $=0{,}0049\ldots$ И вот уже на втором шаге мы получаем погрешность меньше одной сотой!



Получаем II инструкцию по вычислению $\sqrt{2}$:

1. *Пусть мы уже знаем, что* $\sqrt{2}$ *находится в «загоне»* $[a; b]$.

2. *Находим его середину* $\frac{a+b}{2}$ (*как и в старом способе*) – *она будет одним из концов нового загона*.

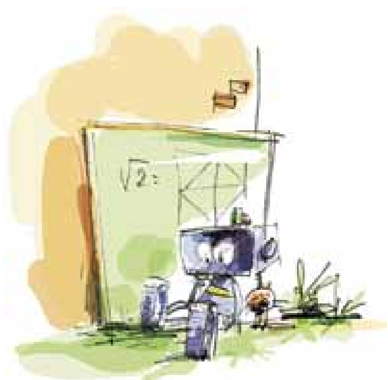
3. *Так как* $\sqrt{2}$ *находится между* $\frac{a+b}{2}$ *и* $\frac{2}{\frac{a+b}{2}}=\frac{4}{a+b}$, *объявляем новым «загоном» отрезок между* $\frac{a+b}{2}$ *и* $\frac{4}{a+b}$.

4. *Если погрешность нас устраивает, выдаём в качестве ответа середину «загона». Погрешность же будет равна половине длины «загона». Если погрешность все ещё слишком большая – идём к пункту* 1.

Теперь вы знаете достаточно, чтобы выполнить:

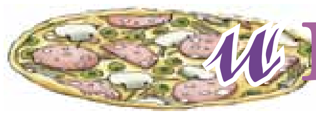
Упражнение. Найдите $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ с погрешностью меньше одной сотой.

Когда вы решите его, сразу поймёте, что теперь можете извлечь квадратный корень почти из чего угодно. Кроме, пожалуй, отрицательных чисел. Но это уже совсем другая история...



Художник Сергей Чуб

ГЕОМЕТРИЯ, Япония, Китай и пицца



Григорий Фельдман

Ах, как часто мы просто решаем задачи, а не наслаждаемся удивительными красотами, скрытыми в них. Решил задачу – и забыл про неё. А ведь порой условия задач, особенно геометрических, доставляют истинное удовольствие. Например, японцы рисовали чертежи наиболее красивых задач на деревянных дощечках красками и вывешивали в храмах (такие таблички назывались сангаку).

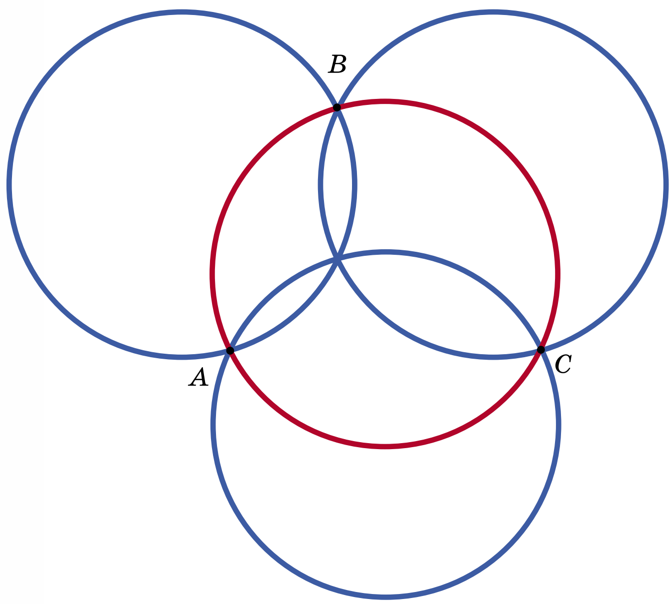
В этой небольшой заметке собраны формулировки нескольких задач с удивительными (на наш взгляд) условиями и картинками. Возможно, некоторые из них вам удастся решить.

Нам потребуется такое утверждение: через любые три точки, не лежащие на одной прямой, всегда можно провести единственную окружность (а через четыре точки – не всегда!). Окружность, проведённая через вершины треугольника, называется описанной около этого треугольника.

ТЕОРЕМА ДЖОНСОНА (1916)

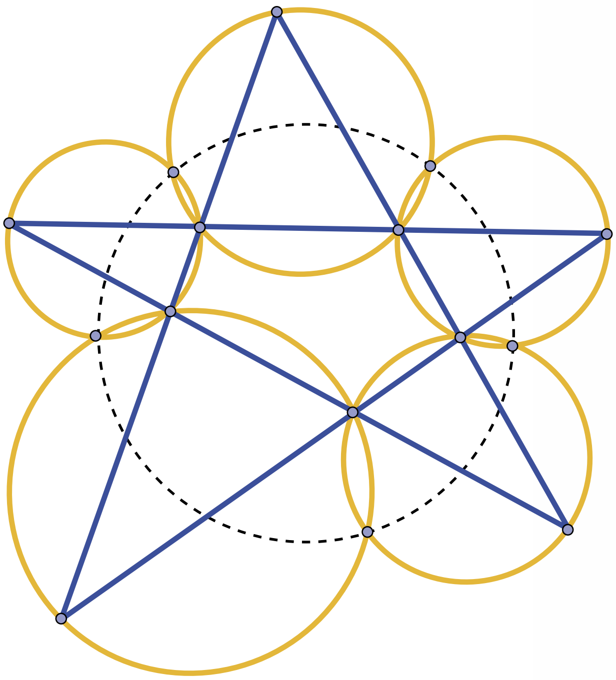
Три синие окружности имеют одинаковый радиус и пересекаются в одной точке. Тогда красная окружность, проходящая через точки A, B, C, имеет тот же радиус, что и синие.

Эта теорема изображена на обложке некоторых изданий замечательного сборника задач по геометрии В. Прасолова «Задачи по планиметрии».



ТЕОРЕМА О ПЯТИ ОКРУЖНОСТЯХ (МИКЕЛЬ, 1838)

Пять синих прямых образуют пятиконечную звёздочку (пентаграмму). Опишем окружности вокруг пяти треугольников, как на рисунке. Тогда вторые точки пересечения этих окружностей лежат на одной окружности.



Открыл этот факт французский математик Август Микель в 1838 году. Иногда эту теорему называют задачей Цзян Цзэминя в честь председателя Китайской Народной Республики. Он рассказал эту задачу студентам во время посещения Высшей школы Макао.

ПИЦЦА-ТЕОРЕМА (АПТОН, 1968)

Проведём через точку внутри круга четыре красные прямые так, чтобы углы между соседними составляли 45°. Они разрежут круг на восемь частей. Покрасим их в жёлтый и синий цвета так, как на рисунке. Тогда площадь, закрашенная синим, равна площади, закрашенной жёлтым.

Теорема имеет вполне практическое применение: два человека могут легко поделить между собой пиццу, не заботясь о точном нахождении центра. Из-за этого теорема и получила свое название.

Художник Евгения Константинова

Александр Блинков

Геометрические построения с помощью ТРЕУГОЛЬНИКА-ШАБЛОНА

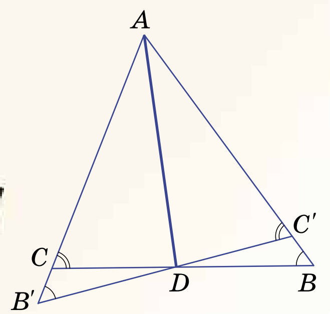


Рис. 1

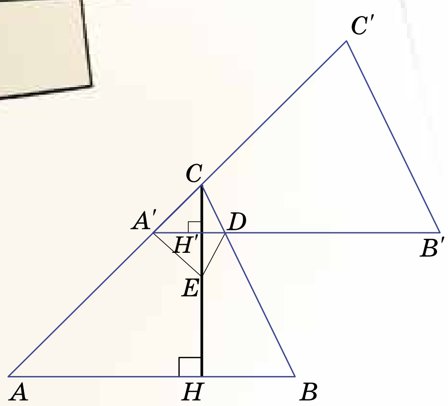


Рис. 2

В прошлом номере мы построили замечательные линии треугольника с углами 30°, 60°, 90° почти из ничего – можно было пользоваться только карандашом и шаблоном этого треугольника. Попробуем справиться с задачей посложнее и построить биссектрису, высоту, медиану и серединный перпендикуляр к стороне для *произвольного* треугольника, используя этот треугольник как шаблон.*

Проще всего дело обстоит с биссектрисой. Как и в предыдущем случае, несложно доказать, что в любом треугольнике биссектриса меньше хотя бы одной из двух сторон, между которыми она проведена (тут пригодится неравенство треугольника). Значит, в любом неравностороннем треугольнике можно построить любую из биссектрис уже известным нам способом (см. рис. 1).

Подумайте, почему этот способ не годится для равностороннего треугольника? А как в равнобедренном треугольнике построить биссектрису угла при вершине?

С высотой и медианой всё сложнее. Возьмём, например, в качестве шаблона какой-нибудь треугольник, «близкий» к равностороннему. Тогда построения, которые мы использовали для прямоугольного треугольника, сделать не получится – ведь длины никакой из сторон шаблона не хватит, чтобы использовать её в качестве линейки.

Надо как-то уменьшить размеры отрезков, которые придётся проводить. Неожиданно на помощь приходит ещё один вид движений на плоскости – параллельный перенос! Пусть дан произвольный треугольник-шаблон ABC, и требуется построить высоту CH и медиану CM. Изобразив треугольник ABC, перенесём его параллельно вдоль луча AC (см. рис. 2, 3). Вершину A сдвинем в точку A' так, чтобы длина отрезка CA' была намного меньше длины CA. При таком параллельном переносе треугольник ABC перейдёт в равный ему треугольник $A'B'C'$, причём стороны $A'B'$ и AB будут параллельны. Тогда в треугольнике $A'DC$, где D – точка пересечения $A'B'$ и BC, будут такие же углы, как и в исходном. Пользуясь шаблоном, можно отложить углы, равные углам A' и D треугольника $A'DC$ и построить треугольники $A'ED$ (рис. 2) и DFA' (рис. 3) – получились картинки, аналогичные тем, которые были для прямоугольного шаблона, но с уменьшенными размерами!

* Серия задач придумана А. Блинковым и Ю. Блинковым. Задачи использовались на XV турнире имени А.П. Савина и VIII устной математической олимпиаде в г. Москве (7 класс)

Треугольники $A'ED$ и $A'CD$ симметричны относительно стороны $A'D$, а треугольники DFA' и $A'CD$ симметричны относительно середины $A'D$. Тогда, проведя в первом случае отрезок CE, а во втором – отрезок CF, мы сможем продлить их до пересечения со стороной AB треугольника ABC и получим, соответственно, его высоту CH и медиану CM. Остаётся объяснить, почему это так.

В первом случае это совсем просто – так как $A'D$ и AB параллельны, то прямая CH, перпендикулярная $A'D$, будет перпендикулярна и AB.

Во втором случае заметим сначала, что треугольник ABC – это как бы равномерно растянутая копия треугольника $A'DC$, когда длины всех сторон увеличены в одно и то же число раз, а углы одного треугольника соответственно равны углам другого. В таких случаях говорят, что треугольник ABC *подобен* треугольнику $A'DC$. Кроме того, на этом чертеже есть ещё две пары подобных треугольников: $A'M'C$ и AMC; $DM'C$ и BMC. Значит, AM во столько же раз больше $A'M'$, во сколько раз CM больше CM' – но и во столько же раз и BM больше DM'. Так как $A'M' = M'D$, то $AM = MB$, то есть M – середина AB. *Более строго это можно доказать, познакомившись со свойствами частного случая подобия – гомотетией.*

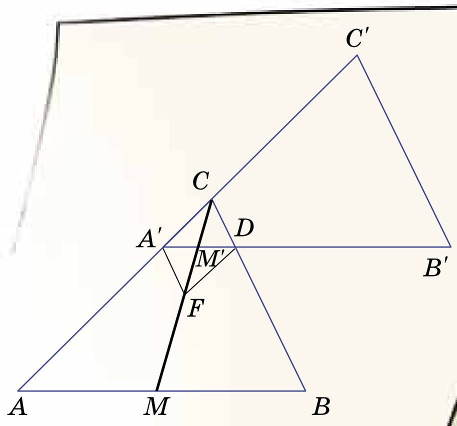


Рис. 3

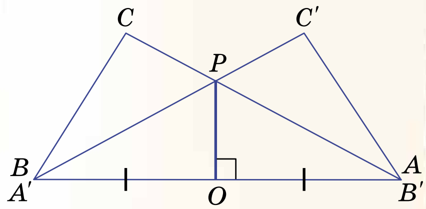


Рис. 4

Понятно, что, научившись строить середину любой стороны треугольника, мы сможем построить и серединный перпендикуляр к любой стороне, воспроизведя построение рисунка 4, а также любую среднюю линию треугольника. Не составит труда построить и четыре замечательные точки треугольника: центры вписанной и описанной окружности, точку пересечения высот (*ортоцентр*) и точку пересечения медиан (*центроид*). Попробуйте!

Заметим, что указанный способ построения высоты и медианы – не единственный. Подумайте самостоятельно над другими способами этих построений, а также над тем, какие ещё замечательные линии и точки можно построить, используя произвольный треугольник-шаблон. *В частности, можно найти способы построить прямую Эйлера, точки касания вписанной и вневписанных окружностей со сторонами треугольника, точки Жергонна и Нагеля, касательную к описанной около треугольника окружности в любой его вершине, симедианы треугольника и точку Лемуана и так далее.***

Надеемся, что построения с помощью треугольника-шаблона помогут вам глубже понять свойства основных преобразований плоскости, изучаемых в школьном курсе геометрии.

** Подобное исследование было успешно проведено С. Довжиком, на тот момент учеником 9 класса ЦО № 218, г. Москва

Художник Виктор Пяткин

Екатерина Антоненко

ФЛЕКСАГОНЫ

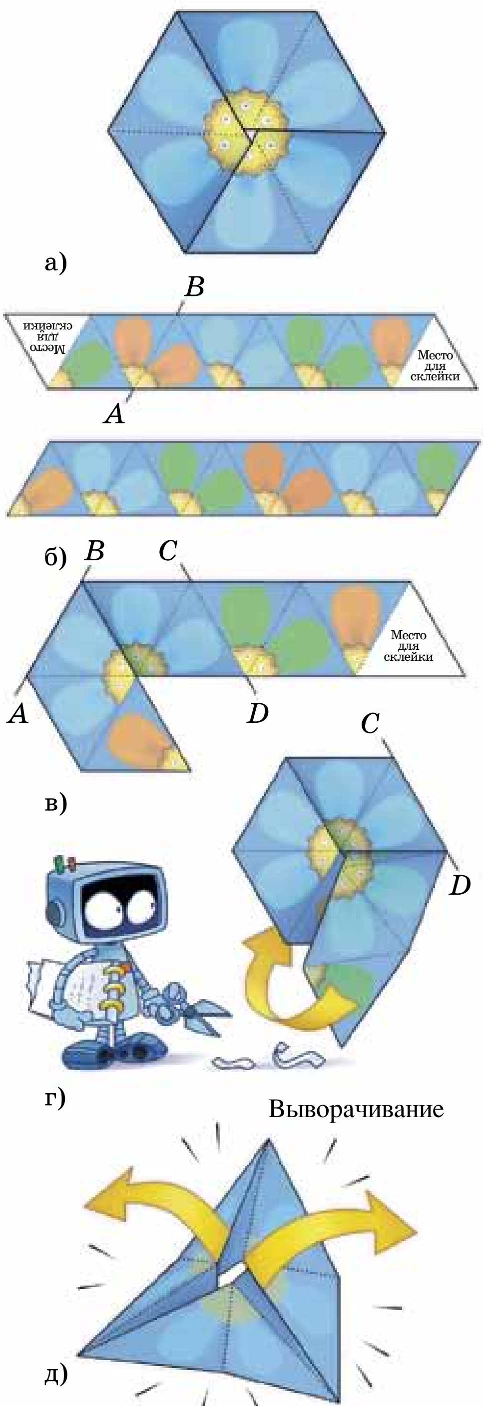


Рис. 1

Что такое флексагоны? – спросите вы. Ответ кроется в названии: от английского *to flex* – сгибаться, складываться. Флексагоны – многоугольники, сложенные из самых обычных полосок бумаги, однако они обладают очень необычным свойством – их можно вывернуть так, что наружу покажется спрятанная до этого внутри поверхность.

Флексагоны были открыты в 1939 году, когда аспирант-англичанин Артур Х. Стоун обрезал листы американского блокнота под английский размер. Из отрезанных полосок бумаги он начал собирать разнообразные фигуры и… одна из этих фигур раскрывалась при складывании пополам так, что видимой становилась совсем другая поверхность. Так был открыт первый флексагон, с тремя поверхностями. За ним немедленно последовали и другие фигуры: Стоун и его друзья организовали целый «Флексагонный комитет». Их достижением стала Полная Математическая Теория Флексагонов, которая указывала способ построения флексагона для любого заданного числа сторон.

Итак! Вы уже достаточно заинтригованы, но ещё не знаете, как сложить хотя бы одно такое чудо. Это легко исправить. Предварительно вырежьте развёртки (с. 17 – 18).

Начнём с того, с чего однажды началась вся история флексагонов, а именно с тригексафлексагона (рис. 1, а, б):

1. Аккуратно прогните полоску взад-вперёд по всем пунктирным линиям. После этого сложите её по линии *AB* «на себя» (пунктирная линия сгиба должна оказаться внутри) так, чтобы левый конец полоски теперь смотрел вниз (рис. 1, в).
2. Теперь сложите полоску по линии *CD* «от себя» (чтобы пунктирная линия сгиба оказалась снаружи) и вытащите «язычок» так, чтобы он лежал сверху (рис. 1, г).
3. Последний штрих: подверните торчащий язычок назад и склейте его с задней поверхностью фигурки. (Лучше всего для этого использовать клей-карандаш или ПВА). При этом должны склеиться друг с другом две незакрашенные стороны треугольников.
4. Можно начать выворачивать: согните шестиугольник так, чтобы середина фигуры поднялась кверху, при этом рёбра, изображённые на рис. 1, г сплошной лини-

ей, поднимаются вверх, а пунктирные сходятся к центру (рис. 1, д). Потяните за две из трёх вершин, оказавшихся в середине, и наша фигурка сама раскроется, являя миру новую поверхность!

Теперь попробуем наши силы на более сложном и более интересном объекте – гексагексафлексагоне (он будет иметь шесть разноцветных сторон; см. рис. 2).

1. Как и в предыдущем случае, прогните полоску по всем пунктирным линиям. Затем аккуратно сложите полоску по всем линиям, отмеченными стрелками на рис. 2, а, и вы получите «змейку». При этом все цветные треугольники, изображённые на рис. 2, б, скроются внутри. (С обеих сторон полученной змейки вы видите только три цвета, рис. 2, в).
2. По линии *AB* согните змейку «от себя» и переверните модель (рис. 2, в, г).
3. Согните модель по линии *CD* от себя и вытащите «язычок» так, чтобы он лёг сверху (рис. 2, г, д).
4. Вы должны увидеть перед собой шестиугольник, состоящий из шести треугольников одного цвета, и торчащий треугольничек другого цвета, как на рис. 2, д. Отверните его назад и склейте две незакрашенных грани. Дело в шляпе!
5. Выворачивается гексагексафлексагон по той же схеме, что и предыдущая модель. Однако при таких движениях мы сможем увидеть только три цвета нашей фигуры, хотя мы точно помним, что полоску красили в шесть цветов! Попробуйте тянуть за разные углы при выворачивании (рис. 2, е) и постарайтесь найти «прячущиеся» цвета. Уверяем вас – при должном любопытстве вы сможете увидеть их все.

И это ещё не всё. Если вы подумали, что все подобные изобретения человечества имеют форму шестиугольника, то вы глубоко заблуждаетесь. Познакомимся с новым представителем этого волшебного мира: тетрафлексагоном, который имеет форму четырёхугольника (рис. 3).

1. Вырежьте рамку с фруктами и сложите её последовательно в порядке 1-2-3-4 по линиям, отмеченным стрелочками на рис. 3, а, не забыв предварительно про-

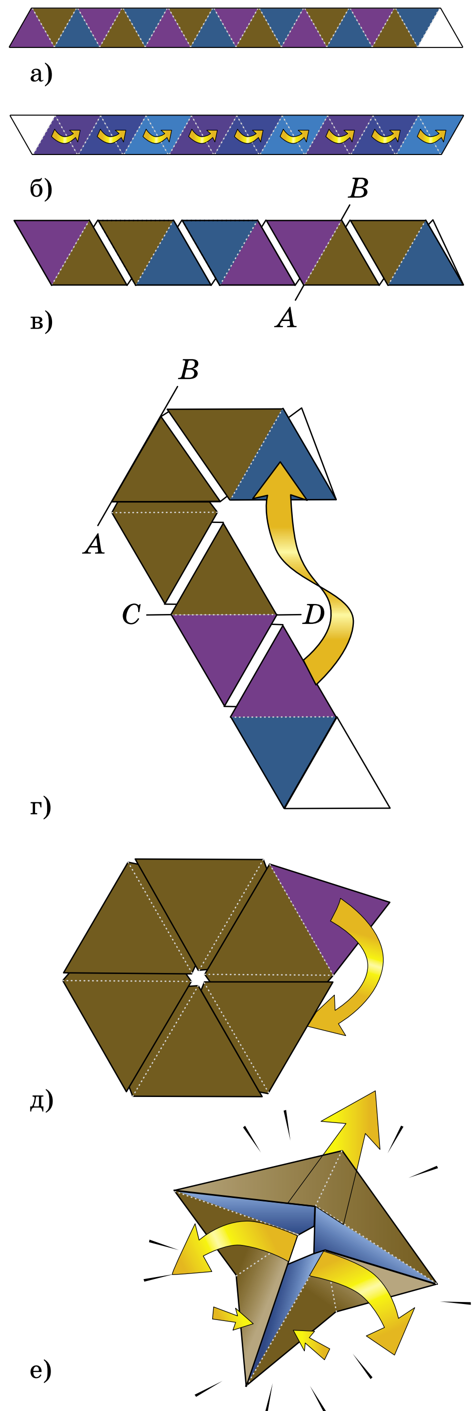
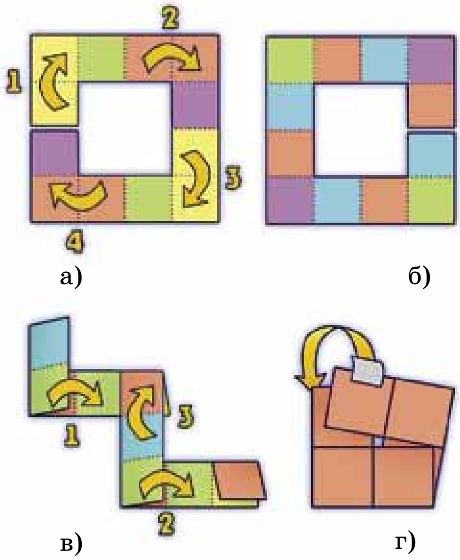
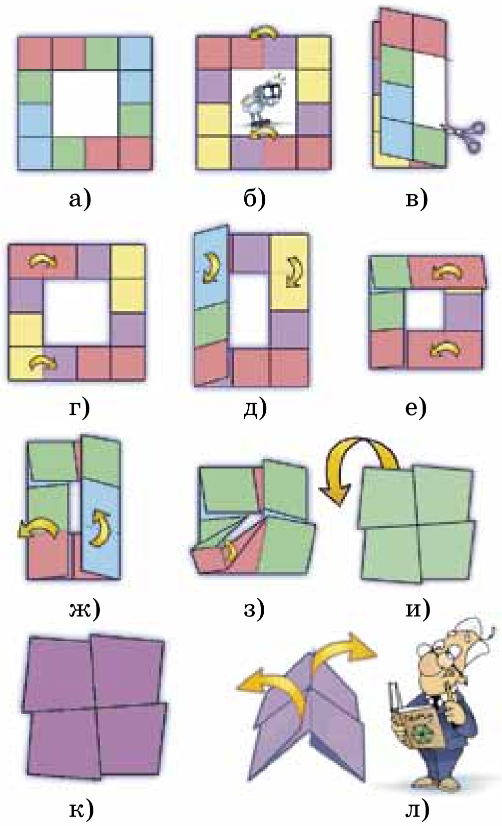


Рис. 2



а) б) в) г)

Рис.3



а) б) в) г) д) е) ж) з) и) к) л)

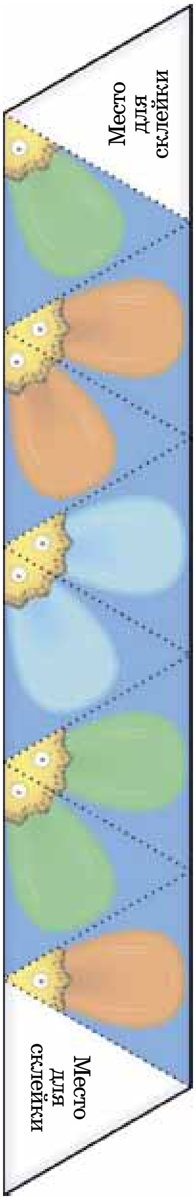
Рис.4

гнуть по всем будущим сгибам. Все линии сгибов окажутся внутри.

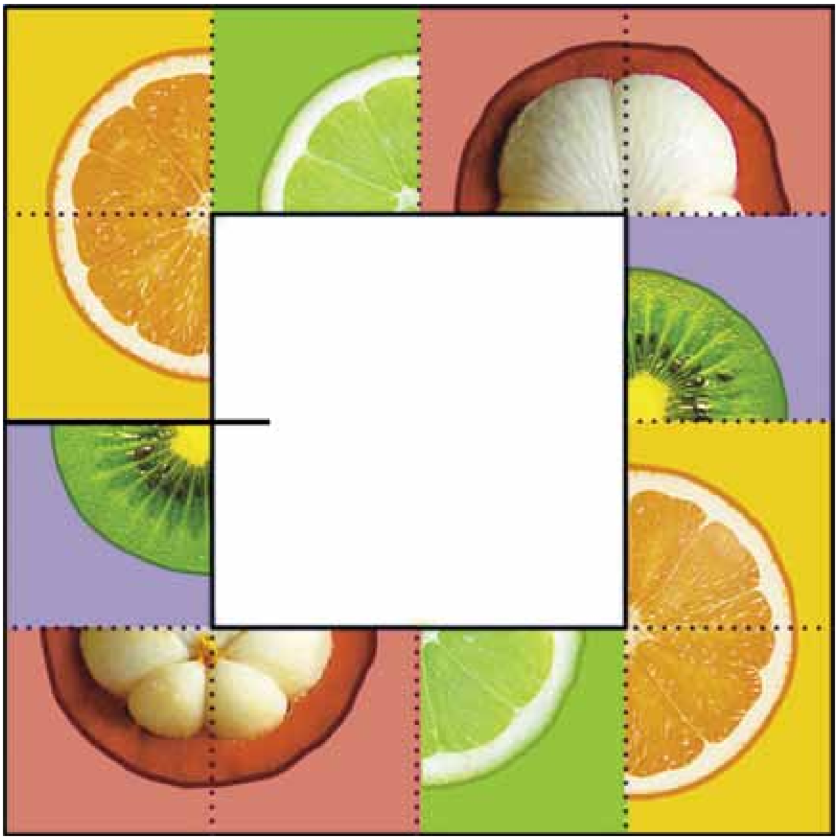
2. Убедившись, что ваша фигурка имеет вид как на рис. 3, в (возможно, для этого потребуется её перевернуть), сложите её по линиям 1 и 2. Линии сгибов снова снаружи. Следующий сгиб – по линии 3, но (внимание!) его нужно сделать так, чтобы линия сгиба находилась сверху и смотрела на вас.
3. Уже знакомым движением подверните «язычок» так, чтобы все четыре квадрата, обращённых к вам, были одного цвета. Возьмите квадратный кусочек скотча, наклейте его на левый верхний квадратик так, чтобы половинка скотча оставалась свободной, затем подверните её и наклейте на заднюю поверхность (рис. 3, г). Тетрафлексагон готов!
4. Как выворачивать? Сложите фигуру пополам и потяните за две грани, сошедшиеся в центре – флексагон раскроется новым цветом. Поэкспериментируйте сами с тем, чтобы получить все шесть цветов на гранях.

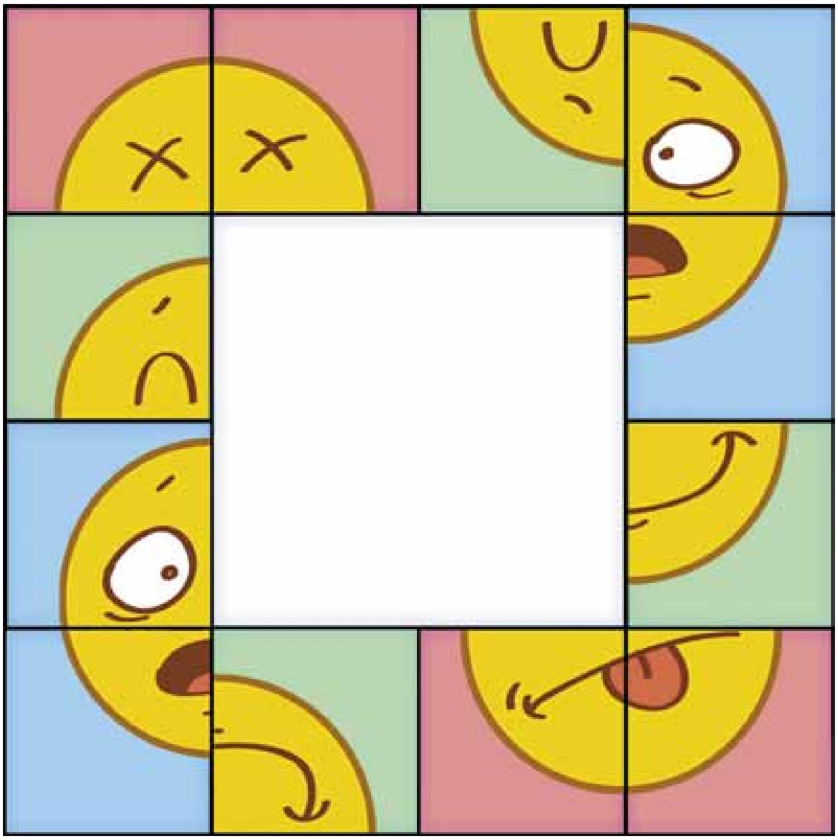
Опишем другой способ построения тетрафлексагона (рис. 4).

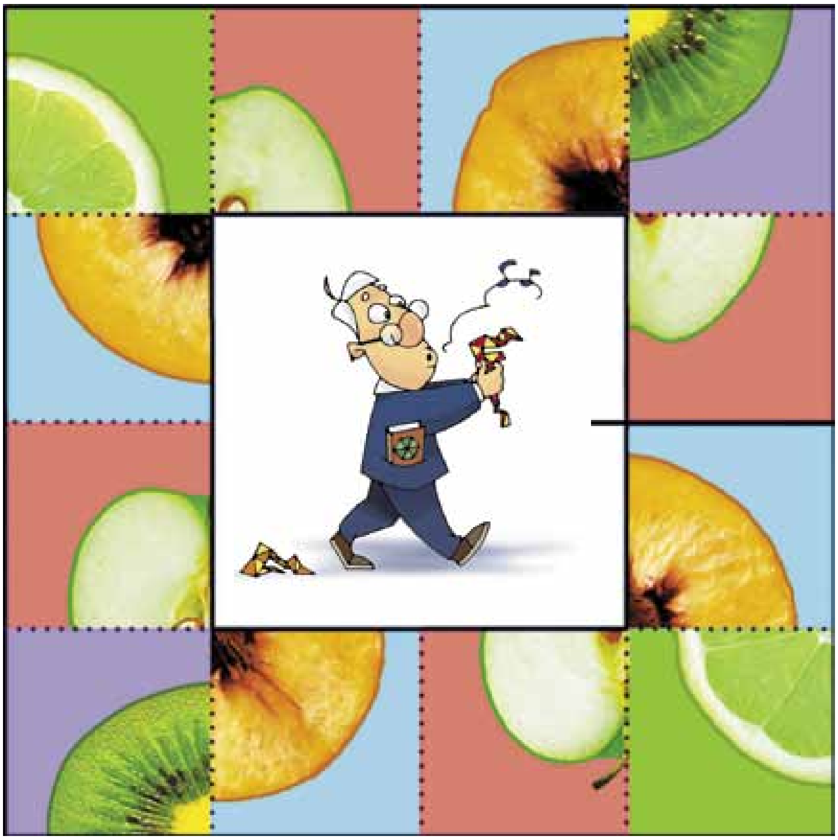
1. Аккуратно сложите рамку с рожицами пополам и отрежьте ножницами белый прямоугольник, бывший в центре рамки (рис. 4, б, в). Разверните – и увидите идеально квадратную рамку без разреза (в отличие от первого способа).
2. Согните фигурку так, как показано на рис. 4 г, д, е. Затем загните вверх правую половину фигурки, одновременно отогнув левую половину влево, как показано на рис. 4, ж.
3. Получившаяся фигура должна выглядеть примерно так, как показано на рис. 4, з. Теперь наступает ключевой момент: потянув за красный уголок, заправьте его внутрь под зелёный квадрат. Проследите за тем, чтобы не образовалось никаких новых складок. У вас в руках окажется плоская фигурка, зелёная с одной стороны и фиолетовая с другой (рис. 4, и, к). Вот он, успех!
4. Поверните её к себе фиолетовой стороной. Теперь можно исследовать все возможности фигурки, пользуясь тем же методом выворачивания, что и при первом способе складывания (рис 4, л).

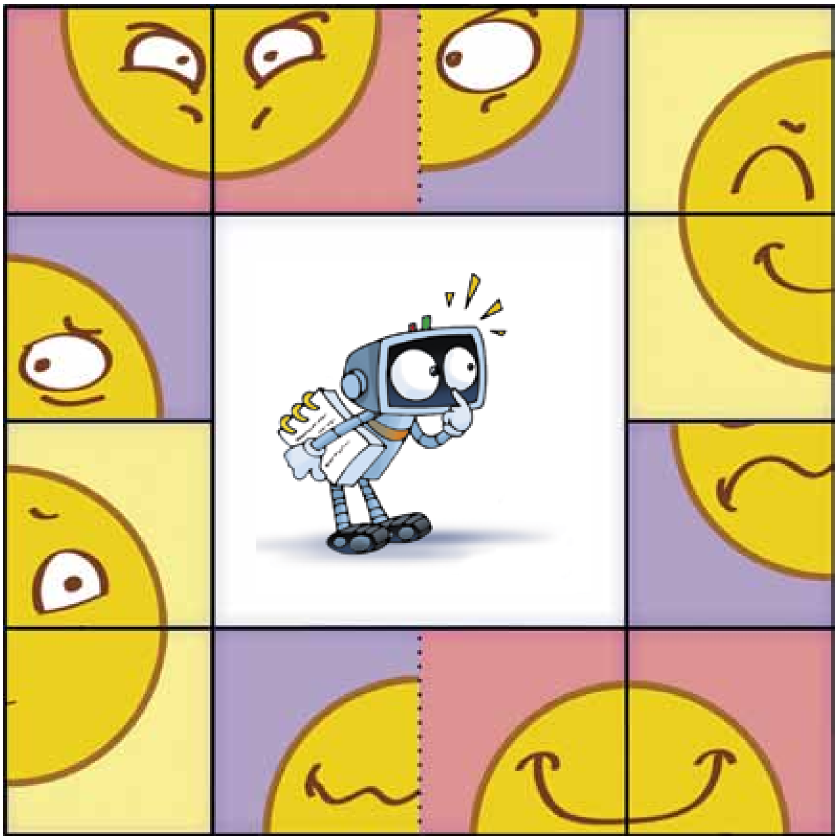

Место для склейки
Место для склейки

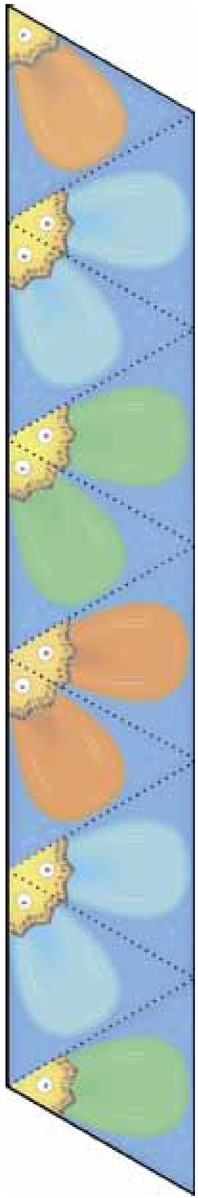

Место для склейки











Художник Дарья Котова

Куздра и Бармаглот

Екатерина Волович

Когда мы говорим на своём родном языке, слова складываются в предложения как бы сами собой. Мы можем говорить очень долго и ни разу не произнести двух одинаковых предложений. А можем продолжать одно предложение, пока не надоест, – как в английском стишке (он известен по переводу Самуила Маршака):

Вот дом,
Который построил Джек.

А это пшеница,
Которая в тёмном чулане хранится
В доме,
Который построил Джек.

А это весёлая птица-синица,
Которая часто ворует пшеницу,
Которая в тёмном чулане хранится
В доме,
Который построил Джек.

И так далее...

Ничто, в принципе, не мешает придумывать предложения до бесконечности. Допустим, нам даже вздумалось пересчитать все предложения. Но когда мы решим: «Ну уж это предложение точно самое последнее на свете!» – к нему всегда можно будет добавить какое-нибудь *который*, и начать сначала. Правда, таких способов удлинения не так много, как кажется (какие ещё вы можете придумать, кроме придаточных предложений?).

И что вообще означает – «придумывать» предложение? Представим, например, что из букв алфавита можно было бы составить очень-очень много слов, а точнее, представим, что вообще все слова, которые можно составить из букв алфавита, были бы настоящими словами. Тогда никто ничего не запомнил бы. Или что слова можно было бы изменять и складывать в предложения, как кому заблагорассудится. Тогда никто ничего не понял бы, потому что смысл получившегося случайного предложения мог бы различаться, в зависимости от того, кто это предложение произносит.

Значит, предложения не придумывают, а составляют по определённым правилам, иначе люди не понимали бы друг друга. И внутри слов тоже действуют свои правила.

Что же это за правила? Может быть, главное всё-таки, чтобы были правильные слова? Надо посмотреть в словаре русского языка, и если все слова найдутся, значит, мы говорим на русском языке?

«Гло́кая ку́здра ште́ко будлану́ла бо́кра и курдя́чит бокрёнка» – на каком языке написана эта фраза? Похоже на русский? Даже вроде примерно понятно, о чём речь: какая-то дама что-то сделала (ударила?) с существом мужского пола один раз определённым образом (сильно?), а потом начала что-то делать с его детёнышем и делает до сих пор. Слова из этого предложения даже не придёт в голову искать в словаре: ясно, что они выдуманные. Фразу про куздру, может быть, уже давно вам знакомую, придумал академик Л. В. Щерба почти сто лет тому назад.

Тогда, получается, главное, чтобы был ясен смысл, хотя бы приблизительный? Вот ещё один знаменитый пример: «Бесцветные зелёные идеи яростно спят» (англ. Colorless green ideas sleep furiously). Кажется, он совсем бессмысленный (как это *бесцветные* и одновременно *зелёные*, да ещё всё это про какие-то идеи), но ведь точно по-русски? Этот пример использовал знаменитый лингвист Ноам Хомский в книге «Синтаксиче-

ские структуры». Его пример показывает, что «осмысленность» и «грамматичность» – это не одно и то же.

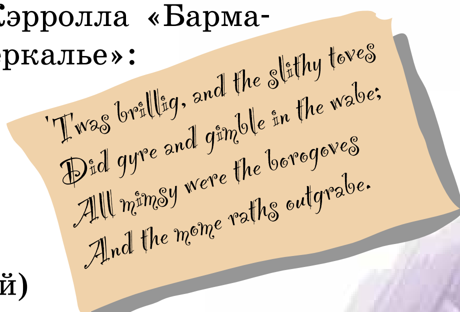
Грамматичность – одно из самых важных понятий в лингвистике. Это значит, что каждый (ну, в идеале – каждый) носитель языка согласится, что некое предложение построено на его родном языке и построено без ошибок. Носитель языка должен уметь отличать правильные предложения (слова, сочетания слов) от неправильных. Причём делает он это интуитивно, не рассуждая. Более того, мы, носители языка, можем порождать и понимать предложения, которые никогда в жизни не слышали и не читали (и определять, правильные они или нет). И чаще всего именно так и происходит: предложений много, всех не услышишь.

Мы понимаем, что значит предложение «Зелёные слоны быстро бегает», но тем не менее чувствуем, что оно неправильно (потому что подлежащее *слоны* не согласуется со сказуемым *бегает* по числу; *слоны бегает* – так нельзя сказать по-русски). А непонятное предложение про бесцветные зелёные идеи грамматически правильно.

Множество таких грамматически правильных предложений бесконечно в любом языке, поэтому нельзя просто взять и запомнить их все. При этом дети быстро и безболезненно овладевают грамматикой родного языка, то есть научаются отличать грамматически правильные предложения от неправильных. Как у них это так легко получается, до сих пор толком не ясно.

А вот ещё один знаменитый пример вроде «глокой куздры» – стихотворение Льюиса Кэрролла «Бармаглот» (*Jabberwocky*) из «Алисы в Зазеркалье»:

Варкалось. Хливкие шорьки
Пырялись по наве,
И хрюкотали зелюки,
Как мюмзики в мове.
(перевод Дины Орловской)



Как можно его «перевести»? Попробуйте сочинить своё стихотворение по грамматической модели Льюиса Кэрролла, но уже из существующих слов. Или наоборот, сочините похожее, с выдуманными словами, – это же, наверное, очень просто?

Пуськи бятые

Сяпала Калуша с Калушатами по напушке. И увазила Бутявку, и волит:

– Калушата! Калушаточки! Бутявка!

Калушата присяпали и Бутявку стрямкали. И подудонились.

А Калуша волит:

– Оее! Оее! Бутявка-то некузявая!

Калушата Бутявку вычучили.

Бутявка вздребезнулась, сопритюкнулась и усяпала с напушки.

А Калуша волит калушатам:

– Калушаточки! Не трямкайте бутявок, бутявки дюбые и зюмозюмо некузявые. От бутявок дудонятся.

А Бутявка волит за напушкой:

– Калушата подудонились! Зюмо некузявые! Пуськи бятые!

Людмила Петрушевская

Художник Максим Акульшин

АДА ЛАВЛЕЙС

Ася Лапидус, Джон Трипп

Ада Лавлейс

Анна Изабелла Милбенк

Лорд Дж. Г. Байрон
(1788-1824)
великий английский
поэт-романтик

Если вы когда-нибудь интересовались языками программирования, то, возможно, слышали о компьютерном языке Ada, название которого похоже на аббревиатуру. На самом деле это вовсе не аббревиатура, а женское имя, и название дано в честь первого в истории программиста, вернее программистки, – Ады Лавлейс.

Красавица и умница – Августа Ада Кинг (урождённая Байрон), титулованная графиня Лавлейс была единственным рождённым в браке ребёнком поэта Джорджа Гордона Байрона.

Через месяц после рождения девочки в Лондоне 10 декабря 1815 года лорд Байрон и его жена Анна Изабелла Милбенк – наследная баронесса Вентворт – расстались, а ещё через несколько месяцев мятежный поэт покинул берега Альбиона навсегда. Он погиб в Греции, когда Аде было всего девять лет, так что она никогда не встречалась с отцом.

Девочка росла на попечении чрезвычайно одарённой, высокообразованной и требовательной матери, некогда прозванной поэтом-романтиком Принцессой параллелограммов. Свои ярко выраженные математические интересы и способности она старалась передать дочери.

Любознательность и творческая одарённость Ады проявились рано. Тринадцати лет она самостоятельно разработала конструкцию летающей машины. Ада была болезненным ребёнком, но это не помешало ей получить дома самое лучшее воспитание и образование. Науками и математикой с ней занимались такие известные в то время представители интеллектуальной и научной элиты, как Вильям Кинг (за которого она впоследствии вышла замуж) и Мэри Соммервиль – замечательная женщина – математик и астроном, автор «Небесной механики» и учебников для Кембриджского университета, переводчица Лапласа на английский язык. Позднее Аду обучал известный логик Август де Морган, основоположник логической теории отношений.

Юная мисс Байрон проявляет незаурядный математический талант и серьёзные способности к писательству. Она знакомится с самыми выдающимися людьми своего времени – от Чарльза Диккенса до Майкла Фарадея. Очаровательно-изысканная, Ада имеет большой успех в обществе, и в возрасте 20 лет выходит замуж за 30-летнего лорда Вильяма Кинга, некогда преподававшего ей математику, а ныне известного учёного, позже получившего титул графа Лавлейса.

Рождение троих детей не препятствует её научным, писательским и музыкальным интересам, хотя после рождения средней дочери она долго и тяжело болеет.

Ада много и плодотворно работает в сотрудничестве с Чарльзом Бэббиджем – профессором математики в Кембридже, философом, инженером-изобретателем, а главное – отцом современного компьютера, создателем первой аналитической вычислительной машины.

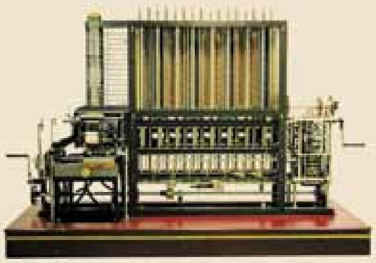
Знакомство с Бэббиджем произошло ещё в 1833 году по инициативе Мэри Соммервиль. С самого начала знакомства незаурядные таланты молодой женщины произвели сильное впечатление на учёного: он сразу оценил перспективу серьёзного научного сотрудничества, впоследствии растянувшегося на долгие годы. Сначала это была переписка на почве увлечения Адой идеей Бэббиджа создания вычислительного механизма, так называемой *разностной машины*.

Ада, с энтузиазмом разделяя интерес Бэббиджа, прекрасно разобралась в тонкостях и деталях его идей. Бэббидж называл её Повелительницей чисел, и когда понадобилась серьёзная помощь, обратился именно к ней. Он поручил ей перевод на английский язык чрезвычайно важных для него записей его собственных лекций, прочитанных в Турине в 1842 г. Эти лекции были тогда законспектированы итальянским математиком-инженером Луиджи Менабреа, и конспекты их были опубликованы на языке оригинала – на французском.

Это был не просто перевод. Почти год Ада Лавлейс работала как одержимая. Она снабдила статью своими комментариями и приложениями, которые были втрое длиннее самой статьи и включали в себя алгоритмический метод вычисления чисел Бернулли. Этот алгоритм для ещё не существующей вычислительной машины был, тем не менее, прекрасно обдуман, подробно и поэтапно описан и выверен – абсолют-

Вильям Кинг, граф Лавлейс

Чарльз Бэббидж



Компьютер Бэббиджа так и не был завершён: ныне существуют две работающие модели, созданные недавно – обе сконструированы по плану Бэббиджа, но не являются копиями его модели, которая так и не увидела света – она не была им построена.

Перфокарты к машине Бэббиджа

АДА ЛАВЛЕЙС

Ада Лавлейс

В поэме Байрона «Паломничество Чайльд Гарольда» Аде посвящены такие строки:

Дочь, птенчик, Ада милая! На мать
Похожа ль ты, единственно родная?
В день той разлуки мне могла сиять
В твоих глазах надежда голубая…
* * *
Спи в колыбели сладко,
без волнения;
Я через море, с горной высоты
Тебе, любимой, шлю благословенье,
Каким могла б ты стать для моего
томленья!

но подготовлен для запуска на машине в любой момент. Более того, он был записан на перфокартах. Это и была первая в мире компьютерная программа, созданная задолго до первого работающего компьютера, обеспечившая Аде Лавлейс славу и бессмертие.

Поразительно, но она с самого начала не просто поняла идеи новой вычислительной техники, но и сформулировала и даже предвидела её перспективы – от табулирования произвольной функции неограниченной сложности до возможности создания музыкальных композиций. Ада Лавлейс ввела понятие *рабочих ячеек* и идею последовательного изменения их содержимого – ею был предвосхищён *оператор присваивания*, ключевое понятие всех языков программирования. Впервые было введено понятие *цикла*. И хотя двоичная система была известна с незапамятных времён – Ф. Бэкон и Г. В. Лейбниц еще в XVII веке доказали, что с помощью двоичного кода можно полностью описать любые данные и любые арифметические операции – все-таки именно Аде Лавлейс принадлежит приоритет в основе основ науки программирования: использовании двоичного кода. А главная её догадка состояла в том, что машина сможет работать и с другими объектами, не только с числами. Всё это было изложено в её в комментариях за столетие до появления первых компьютеров.

Ада Лавлейс много болела и умерла рано – в возрасте 36 лет – 27 ноября 1852 года в Лондоне. Похоронена она рядом с отцом, которого никогда не знала.

Себя она называла аналитиком и метафизиком. Скромно подписывалась инициалами А.А.Л. Была образцом красоты и благородного изящества.

Жизнь Ады Лавлейс была апофеозом противоречий – борьбы эмоций с разумом, поэзии с математикой, алгебры с гармонией, объективизма с субъективизмом, слабого здоровья со взрывами энергии.

Её вклад в науку оценён только недавно. Комментарии её были переизданы в 1953 году. Компьютерный язык, созданный по заказу Министерства обороны США, назван в её честь Ada, причём выпуск официального руководства по языку был приурочен к 10 декабря 1980 года, к 165-летию со дня рождения Ады Лавлейс. А в 1998 году Британское компьютерное общество учредило медаль её имени.

Владислав Иваньшин

СУПЕР КОМПЬЮТЕРЫ

Когда-то прогнозы о компьютерах звучали так:

«Компьютер будет весить меньше 1,5 тонн».

Журнал «Популярная механика», 1949 год.

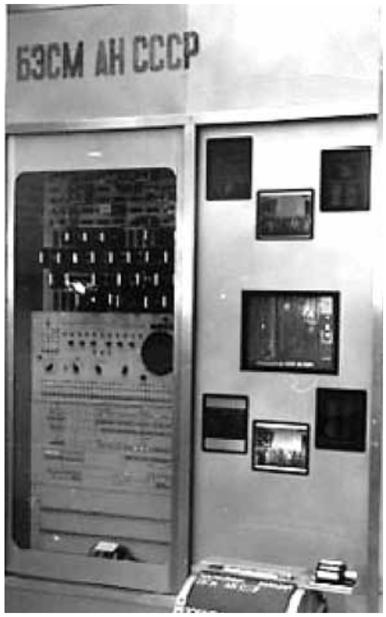
«Вряд ли кому-то придёт в голову установить компьютер дома».

Кен Олсен, основатель Digital Equipment Corporation, 1977 год.

Видели бы они сейчас, на что способен обычный персональный компьютер! Он может решить множество задач; например, в одно мгновение написать решение сложного уравнения или выписать 50000 знаков числа π. На небольшом ноутбуке можно проделать за несколько часов вычисления, которые нужны были в 1957 году для запуска первого искусственного спутника Земли. Тогда же на это потребовалось несколько лет работы огромной (2,5 тонны) Большой электронной счётной машины – одной из немногих советских ЭВМ того времени.

Однако есть на первый взгляд простые задачи, которые не могут быть решены современными персональными компьютерами за разумное время. Оказывается, такое привычное дело, как прогнозирование погоды, требует огромных компьютерных затрат. Дело в том, что для получения хороших предсказаний метеорологи создали различные модели поведения атмосферы и свели задачу получения прогнозов к сбору информации и решению сложных систем уравнений. Прогноз погоды на вчера никого не интересует, а значит, нужно успевать выполнять вычисления в короткие сроки.

Также существуют проблемы, которые не могут быть решены (а если и могут, никто до сих пор не знает как) иначе как полным перебором всех возможных вариантов. Например, так приходится решать некоторые практические задачи, связанные с организацией транспортных потоков. Большого количества вычислений требует и моделирование физических процессов, например, ядерных реакций. Благодаря огромной вычислительной работе в 2003 году была расшифрована значительная часть генома человека.



Часть пульта управления БЭСМ

«IBM Blue Gene», один из современных суперкомпьютеров

Процессор «Intel Celeron D» персонального компьютера (размером 5×5 см)

Все эти сложные задачи решаются с помощью суперкомпьютеров. Давайте поймём, за счёт чего суперкомпьютеры быстрее обычных компьютеров.

«Мозгом» компьютера, местом, где производятся вычисления, является процессор. Процессоры делают из большого числа транзисторов (одни из основных деталей в электрических схемах), объединяя их на одном кремниевом кристалле.

Даже у обычного современного домашнего компьютера процессор способен выполнять миллиарды элементарных операций (например, арифметических действий над числами) в секунду. Быстродействие процессора определяется такими его характеристиками, как количество транзисторов на кристалле и тактовая частота. Можно считать (несколько упрощённо), что одна операция занимает ровно один такт работы процессора.

Предположим, мы хотим повысить мощность компьютера. Для этого в первую очередь нужно увеличить быстродействие процессора. Можно попробовать повысить тактовую частоту. Однако каждый такт – это приход электрического импульса на кристалл, а электрический ток, как известно, нагревает проводник (в физике это явление называется законом Джоуля – Ленца). А перегрев процессора очень нежелателен. Если же попытаться наращивать число транзисторов на кристалле, то нас рано или поздно постигнет неудача. Из-за технологических ограничений нельзя изготовить транзисторы меньше определённого размера, поэтому их количество на заданной площади ограничено. Может, увеличить размеры самого кристалла, чтобы насадить побольше транзисторов? В таком случае возникает следующая проблема: сигнал не успевает дойти до нужных частей за один такт.

Первый суперкомпьютер «Cray-1» в музее компьютерной техники в Маунтин-Вью, Калифорния

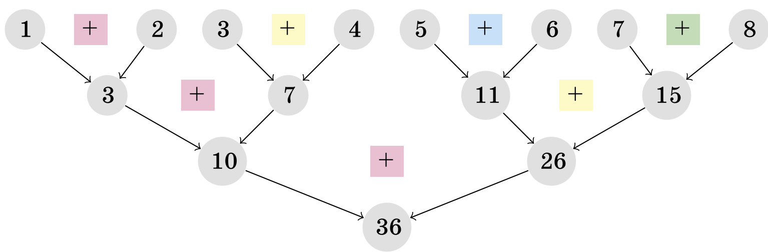
Таким образом, старые трюки, к которым прибегали производители компьютеров для увеличения мощностей, не дают результатов. Однако выход всё же есть. Возьмём и поместим в один корпус компьютера – а точнее, уже суперкомпьютера – много процессоров. За счёт чего такая система будет работать быстрее? Оказывается, за счёт другого способа вычислений.

Задачу, поставленную перед суперкомпьютером, теперь надо будет разбить на более мелкие подзадачи и поручить каждую своему процессору, действуя по принципу «разделяй и властвуй». Рассмотрим следующий пример: необходимо сложить натуральные числа от 1 до 8.

Обычному компьютеру потребуется 7 действий:

$$((((((1 + 2) + 3) + 4) + 5) + 6) + 7) + 8$$

В компьютере, имеющем несколько процессоров, действия можно организовать следующим образом:



В данном случае хватит четырёх процессоров, чтобы первые четыре сложения выполнились одновременно, после чего уже освободившиеся процессоры выполнили ещё два сложения и затем одно заключительное. (На рисунке операции, выполняемые одним процессором, отмечены одним и тем же цветом.) Выигрыш времени получился за счёт того, что часть операций проведена одновременно, или, как ещё говорят, параллельно. Как видно, во втором случае потребовалось всего 3 шага.

«K computer» – самый мощный суперкомпьютер (по состоянию на апрель 2012 г.)

Мощность суперкомпьютеров принято измерять в так называемых флопсах (от англ. floating-point operations per second) – количестве операций в секунду над числами с плавающей точкой. Существует специальный рейтинг Top500 самых мощных суперкомпьютеров. Для оценки мощности компьютерам предлагается на скорость решать огромные системы уравнений. В настоящее время лидирует японский «K computer» (супервычислителям принято давать имена), развивающий мощность до 10510 терафлопс, то есть 10 510 000 000 000 000 флопс. В нём 705024 процессорных ядра. Самый мощный российский суперкомпьютер «Ломоносов» установлен в Вычислительном центре МГУ и содержит 33072 процессорных ядра. Он занимает 18 место в списке Top500, показывая производительность 674 терафлопс. Для сравнения, мощный современный настольный четырёхъядерный компьютер имеет производительность порядка 0,1 терафлопс.

тридцать третий турнир ГОРОДОВ

ТУРНИР ГОРОДОВ – международное соревнование по математике для школьников 8 – 11 классов (хотя иногда на Турнир приходят даже пятиклассники). Для каждого школьника это просто одна из олимпиад, проводящихся в его городе, города же соревнуются заочно.

В Турнире участвуют более 100 городов со всего мира, их общее население – около 100 миллионов человек, а число школьников, ежегодно решающих задачи Турнира – около 10 тысяч. Если вы хотите, чтобы Турнир проводился и в вашем городе, попросите своего учителя математики написать письмо по адресу turgor@mccme.ru с заявкой на участие.

Турнир проходит каждый год осенью и весной в двух вариантах – базовом и сложном. Всего получается четыре попытки: школьник может написать хоть все четыре варианта, а результатом считается наиболее успешное выступление в одном из них.

ВЕСЕННИЙ ТУР, 8 – 9 КЛАССЫ

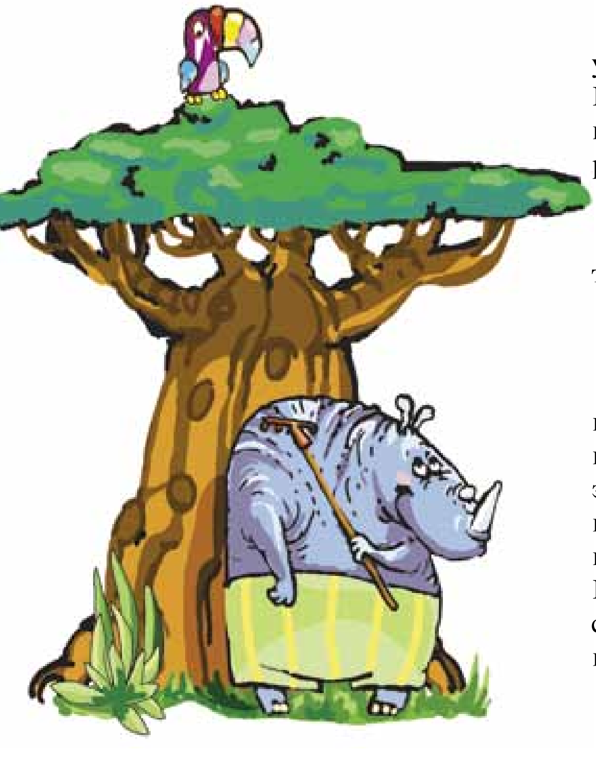
Базовый вариант

1 [3]. Под одной из клеток доски 8×8 зарыт клад. Под каждой из остальных зарыта табличка, в которой указано, за какое наименьшее число шагов можно добраться из этой клетки до клада (одним шагом можно перейти из клетки в соседнюю по стороне клетку). Какое наименьшее число клеток надо перекопать, чтобы наверняка достать клад?

Н.П. Стрелкова

2 [4]. Существует ли натуральное число, у которого нечётное количество чётных натуральных делителей и чётное количество нечётных? (Множество натуральных делителей любого натурального числа всегда содержит 1 и само это число.)

Г.К. Жуков



3 [4]. Дан параллелограмм $ABCD$. Вписанные окружности треугольников ABC и ADC касаются диагонали AC в точках X и Y. Вписанные окружности треугольников BCD и BAD касаются диагонали BD в точках Z и T. Докажите, что если все точки X, Y, Z, T различны, то они являются вершинами прямоугольника.

Р.К. Гордин

4. В выражении $10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1$ расставили скобки так, что в результате вычислений получилось целое число. Каким

а) **[2]** наибольшим; б) **[3]** наименьшим может быть это число?

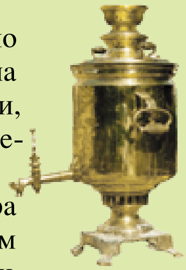
И.Ф. Акулич

5 [5]. У Носорога на шкуре есть вертикальные и горизонтальные складки. Всего складок 17. Если Носорог чешется боком о дерево, то либо две горизонтальные, либо две вертикальные складки на этом боку пропадают, зато на другом боку прибавляются две складки: горизонтальная и вертикальная. (Если двух складок одного направления нет, то ничего не происходит.) Носорог почесался несколько раз. Могло ли случиться, что на каждом боку вертикальных складок стало столько, сколько там раньше было горизонтальных, а горизонтальных стало столько, сколько там было вертикальных?

И. Высоцкий

тридцать третий турнир ГОРОДОВ

Дипломами центрального жюри награждаются школьники, набравшие примерно 12 баллов и выше. Около 70 школьников с самыми высокими баллами приглашаются на Летнюю конференцию Турнира – там они решают интересные исследовательские задачи, а по вечерам пьют чай из большого старинного самовара, который стал символом конференции.



Познакомьтесь с задачами для 8–9 классов недавно прошедшего весеннего тура XXXIII Турнира. По правилам, в каждом варианте в зачёт идут три задачи, по которым школьник получил больше всего баллов. В скобках у каждой задачи указаны баллы, присуждавшиеся за полное её решение.

Сложный вариант

1 [4]. В ряд лежит чётное число груш. Массы любых двух соседних груш отличаются не более чем на 1 г. Докажите, что можно все груши разложить по две в одинаковые пакеты и выложить пакеты в ряд так, чтобы массы любых двух соседних пакетов тоже отличались не более чем на 1 г.

А.В. Шаповалов

2 [4]. На плоскости отмечены 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Саша разбивает точки на пары и соединяет точки в каждой паре отрезком. Всегда ли он может сделать это так, чтобы каждые два отрезка пересекались?

А.В. Шаповалов

3 [6]. В команде сторожей у каждого есть разряд (натуральное число). Сторож N-го разряда N суток дежурит, потом N суток спит, снова N суток дежурит, N – спит, и так далее. Известно, что разряды любых двух сторожей различаются хотя бы в три раза. Может ли такая команда осуществлять ежедневное дежурство? (Приступить к дежурству сторожа могут не одновременно, в один день могут дежурить несколько сторожей.)

А.С. Бердников

4 [6]. В клетках таблицы $n \times n$ стоят знаки «+» и «–». За ход разрешается в любой строке или в любом столбце изменить знаки на противоположные. Известно, что из начальной расстановки можно сделать все знаки в таблице плюсами. Докажите, что этого можно добиться, сделав не более n ходов.

А.Я. Канель-Белов

5 [8]. Пусть p – простое число. Набор из $p + 2$ натуральных чисел (не обязательно различных) назовём «интересным», если сумма любых p из них делится на каждое из двух оставшихся чисел. Найдите все «интересные» наборы.

А.А. Полянский

6 [8]. Банк обслуживает миллион клиентов, список которых известен Остапу Бендеру. У каждого есть свой PIN-код из шести цифр, у разных клиентов коды разные. Остап Бендер за один ход может выбрать любого клиента, которого он ещё не выбирал, и подсмотреть у него цифры кода на любых N позициях (у разных клиентов он может выбирать разные позиции). Остап хочет узнать код миллионера Корейко. При каком наименьшем N он гарантированно сможет это сделать?

Г.К. Жуков

7 [8]. В равностороннем треугольнике ABC провели высоту AH. В треугольнике ABH отметили точку пересечения биссектрис I. В каждом из треугольников ABI, BCI и CAI отметили по точке пересечения биссектрис – L, K и J соответственно. Найдите величину угла KJL.

К. Голубев

Художник: Ирина Гумерова

КОНКУРС, II ТУР (см. «Квантик» № 2)

6. Достаточно, чтобы среди общего количества учеников обеих школ возросла доля учеников школы №2 (попробуйте это доказать).

Скажем, если в 2010 году в школе №1 учились 50 девочек и 50 мальчиков, а в школе №2 – 20 девочек и 80 мальчиков, то общая доля мальчиков в двух школах равна $(50+80)/200=0{,}65$, то есть 65%. А если в 2011 году в школе №1 учатся те же дети, а в школе №2 учатся, например, уже 40 девочек и 160 мальчиков, то общая доля мальчиков в двух школах увеличится до $(50+160)/300=0{,}7$, то есть до 70%.

7. Хватит, так как длины дорожек одинаковы! Длина дорожки, покрывающей лестницу, складывается из длин горизонтальных участков этой лестницы и длин её вертикальных участков. Но у каждой лестницы сумма длин горизонтальных участков равна длине основания лестницы (2 метра), а сумма длин вертикальных участков равна высоте лестницы (1 метр). Значит, длина каждой из дорожек одна и та же: 3 метра, а количество ступенек у лестниц не имеет значения.

8. Заметим сразу, что $К\neq 0$, так как число КВ начинается на К, а число не может начинаться с нуля. Но тогда и $В\neq 0$, так как при возведении в степень круглого числа получается тоже круглое число, а число НТИК оканчивается на К, и $К\neq 0$.

Так как двузначное число КВ, возведенное в степень А, равно четырехзначному числу НТИК, то А не меньше 2 (очевидно) и не больше 3 (ведь даже самое маленькое двузначное число 10, возведённое в 4-ю степень, даст уже пятизначное число 10000).

Значит, А – это либо 2, либо 3. Проверим оба эти варианта.

1. Если $А=3$, то $К=1$ или $К=2$ ($К<3$, так как 30^3 уже пятизначное число).

Пусть $К=1$. Тогда $В\neq 1$, но легко проверить, что никакая другая цифра, возведённая в третью степень, не даст число, оканчивающееся на 1. Значит, этот случай невозможен.

Пусть $К=2$. Тогда $В=1$ (так как $В\neq 0$, а 22^3 даёт в результате уже пятизначное число). Но при возведении в любую степень число, оканчивающееся на 1, даёт в результате число, оканчивающееся на 1, а $К\neq 1$. Противоречие.

2. Пусть $А=2$. Тогда:

$К\neq 1$, так как даже 19^3 – всего лишь трёхзначное число (361), и $К\neq 2$, так как $А=2$.

Далее, $К\neq 3$, $К\neq 7$ и $К\neq 8$, так как ни одна цифра при возведении в квадрат не даст числа, оканчивающегося на 3, 7 или 8. Также $К\neq 5$, так как тогда и $В=5$ (чтобы $В^2$ оканчивалось на 5), а В и К – разные цифры.

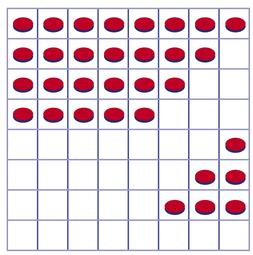
Проверим вариант $К=4$. В этом случае В – либо 2, либо 8 (иначе $В^2$ не будет оканчиваться на 4). Но $В\neq 2$, так как $А=2$, и, значит, $В=8$. Но $48^2=2304$, то есть $Н=2$, а это невозможно, так как $А=2$. Следовательно, $К\neq 4$.

Проверим вариант $К=6$. В этом случае В – либо 4, либо 6 (иначе $В^2$ не будет оканчиваться на 6). Но $В\neq 6$, так как $К=6$. Значит, $В=4$. Но $64^2=4096$, то есть $Н=4$, что невозможно, так как тогда $Н=В$. Следовательно, $К\neq 6$.

Осталась единственная возможность: $К=9$. Тогда В – либо 3, либо 7. Проверим вариант $В=3$: тогда $93^2=8649$, что соответствует условию задачи. Если $В=7$, то $97^2=9409$, откуда $К=Н$, что противоречит условию.

Итак, окончательный и единственный ответ: $КВАНТИК=9328649$.

9. Ответ: можно, например, так:



10. Ответ: 40 граммов.

Обозначим отношение длины левого плеча весов к правому через k. Здесь k – некоторое положительное число, которое может быть как больше, так и меньше 1.

Пусть, для определенности, при взвешивании одного пузырька аптекарь положил пузырек на левую чашку весов, а гири – на правую (если же было наоборот, просто подойдем к весам с противоположной стороны). Тогда можно записать уравнение: $xk = 50$, где x – истинный вес пузырька (в граммах).

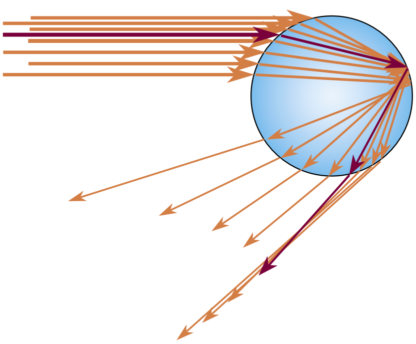
При взвешивании сразу двух пузырьков аналогично получаем: $2xk = 64$, и поделив второе уравнение на первое, имеем: $2 = 1{,}28$.

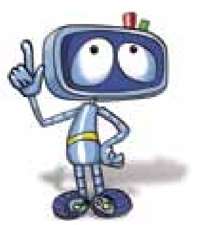
В последнее равенство как-то слабо верится. В чем же дело? По-видимому, в том, что при втором взвешивании аптекарь положил пузырьки на *правую* чашку весов, а гири – на *левую*. Тогда получаем: $2x = 64k$, откуда $k = 2x/64 = x/32$. Подставив это значение в самое первое уравнение, имеем: $x^2/32 = 50$, и истинный вес пузырька $x = 40$ граммов.

Примечание. Между прочим, описанная ситуация подсказывает, как найти истинный вес груза на неравноплечих весах, не производя их наладку и регулировку. Надо просто взвесить его дважды, положив груз последовательно на одну и другую чашу весов, а затем взять *среднее геометрическое* от полученных результатов.

РАДУГА (см. «Квантик» №3)

1. Разбирая причину возникновения радуги, мы выяснили, что капли воды отбрасывают солнечный свет во многие стороны. Радугу создают только те лучи, которые отклонились на наибольший угол от просто отражённого назад луча (см. рисунок). Но ведь есть и другие, менее отклонённые лучи, их мы тоже видим. Значит, наблюдаемое свечение – это просто остальные, менее интенсивные отражённые лучи.





2. Такую радугу образуют лучи, отразившиеся в капле не один раз, как в уже рассмотренном нами случае, а два раза. Из-за этого яркость второй радуги значительно меньше, и она редко видна. По той же причине вторая радуга получается вывернутой наизнанку – цвета в ней идут в обратном порядке (см. рисунок).

Светлая область неба (см. задачу 1) для второй радуги тоже оказывается «вывернутой» – располагается снаружи второй радуги. Эта область, как и сама вторая радуга, менее яркая по сравнению с областью внутри первой радуги.

Лучи, отразившиеся в каплях более чем два раза, тоже образуют свои радуги, но эти лучи куда менее яркие, и радуги от них очень редко заметны.

НОВЫЙ ДИВАН МИСТЕРА КИНГА (см. «Квантик» №3)

Ответ: диван стоит 100 монет.

Решение. Пусть диван стоит x монет, первый продавец завышает все числа в a раз, второй занижает все числа в b раз, а в остальном они говорят правду. Разберёмся в том, что сообщили продавцы мистеру Кингу. Сначала первый сказал, что диван стоит 600 монет, т.е. $ax = 600$. Затем второй заявил, что первый продавец все числа завышает в 3 раза – значит, на самом деле первый всё завышает в $3b$ раз, то есть $a = 3b$. Наконец, первый говорит про второго продавца, что тот все числа занижает в 12 раз, то есть на самом деле $ab = 12$. Мы получили три уравнения: $ax = 600$, $a = 3b$, $ab = 12$. Перемножив два последних, получаем $a^2b = 36b$, откуда $a^2 = 36$, то есть $a = 6$. Тогда, из первого уравнения, $x = 100$.

НАШ КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем конкурсе.

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, не позднее 1 июля по электронной почте **kvantik@mccme.ru** или обычной почтой по адресу:

119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11, журнал «КВАНТИК».

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный адрес.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, итоги будут подведены в конце года. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик», научно-популярные книги, диски с увлекательными математическими мультфильмами.

Желаем успеха!

IV ТУР

16. По углам квадратного пруда стоят четыре столба. Как расширить его, не убирая столбов, чтобы площадь увеличилась в два раза, а форма осталась квадратной? Столбы должны остаться на суше.

17. Ежедневно в полдень из Гавра в Нью-Йорк отправляется почтовый пароход, и в это же время из Нью-Йорка отходит идущий в Гавр пароход той же компании. Каждый из пароходов находится в пути ровно семь суток, и идут они по одному и тому же пути. Сколько пароходов своей компании встретит на своём пути пароход, идущий из Гавра в Нью-Йорк?

Авторы задач:
Лейб Штейнгарц (19)

18. В ящике лежат четыре шара, каждый из которых белый или чёрный. Требуется угадать, сколько каких шаров в ящике. За одну попытку разрешается, не заглядывая в ящик, наугад вынуть два шара, посмотреть на них и положить обратно (после чего шары перемешиваются). Сделали 100 попыток, и ровно в 50 из них вынимали два черных шара.

Как Вы думаете, сколько каких шаров в ящике (скорее всего) и почему?

19. Расшифруйте ребус:

КВАН – ТИК = КВА – НТ

(Каждая буква заменена какой-то цифрой, одинаковые буквы заменены одинаковыми цифрами, а разные – разными.)

20. Некое секретное здание состоит из большого числа одинаковых с виду комнат, соединённых коридорами по кругу, в каждой есть люстра и выключатель. Шпион оказался в одной из комнат. Как ему определить количество комнат в здании, если он может ходить по зданию и включать и выключать свет? Изначально где-то свет уже горел, а где-то – нет, но где именно – шпиону заранее неизвестно.

Художник: Евгения Орлова

Если присмотреться к трамвайным путям, можно заметить, что контактный провод висит не вдоль прямой, а зигзагом, как на иллюстрации.

Как вы думаете, зачем его располагают таким странным образом?

Художник Евгения Константинова