1.“Масленица”

Мама пекла блины к празднику. Через какое-то время на кухню пришли отец и два сына и стали поедать блины, которые закончились через полчаса (мама при этом продолжала печь блины). Если бы пришли лишь два сына, то блины закончились бы через час. Когда бы закончились блины, если бы пришёл лишь папа (скорость поедания блинов у всех троих одинакова)?

Решение.

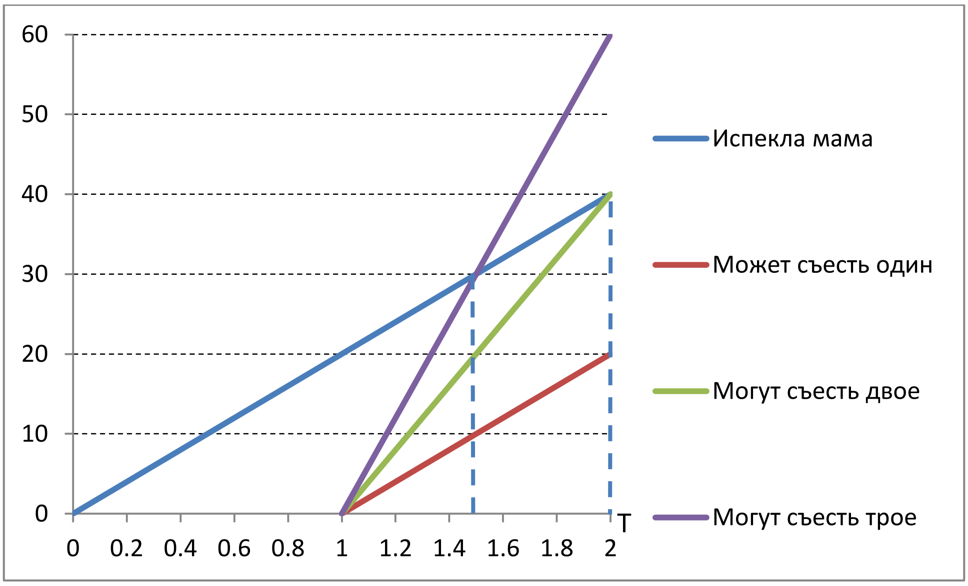
Пусть скорость, с которой мама печёт блины, равна v блинов/час, а скорость, с которой каждый из сыновей или папа поедают блины, равна u блинов/час. Заметим, что u и v могут не быть целыми числами. Например, если мама печёт 1 блин за 7 минут, то она успеет за час испечь 8 блинов и у неё ещё остается в запасе 4 минуты, т.е. эта скорость равна 8 целых и 4/7 блина/час.

Пусть отец и два сына пришли на кухню через t часов. Тогда по условию:

1) $v\cdot(t+0.5) = 3u\cdot 0.5$ (через полчаса отец и два сына съели все блины, которые успела испечь мама к этому моменту)

2) $v\cdot(t+1) = 2u\cdot 1$ (через час два сына съели бы все блины, которые успела бы испечь мама к этому моменту)

Вычитая из второго равенства первое, получаем, что v = u, т.е. отец ест с той же скоростью, с которой мама печёт блины и блины не закончились бы никогда (в любой момент времени, когда мама печёт, а папа ест, блины остаются)! На рисунке изображен частный случай для v = 20 блинов/час. Видно, что красная и синяя линии параллельны.



Комментарий: мы предполагали, что скорости u и v не зависят от времени. В реальности это не так: мама устает, а папа насыщается и не в состоянии съесть больше определенного количества блинов. Мы имеем дело с очень упрощенной “математической моделью” реального процесса.

2. “Волейбол”

В волейбольном турнире, проходившем в один круг (каждая команда играет с каждой ровно один раз) 20% всех команд не одержали ни одной победы. Сколько всего команд участвовало в этом турнире?

Решение.

Команд, которые не одержали ни одной победы, не может быть больше одной. Ведь если таких команд две или более, то они сыграли друг с другом и какая-то одна из них победила (ничьих в волейболе нет). Противоречие.

Итак, 1 команда – это 20% от их общего числа. Значит, всего было 5 команд.

Ответ: 5 команд.

3. “Эксперимент”

Мартышка поднимается на один из 100 этажей небоскрёба и бросает вниз кокос. Она пытается выяснить, с какого наименьшего этажа нужно бросить кокос, чтобы тот разбился. Каково минимальное число попыток, достаточное для этого, если у мартышки всего два кокоса?

Решение.

Решим сначала следующую задачу: какой наибольшей высоты может быть здание, чтобы для него за k бросаний можно было выяснить то, что спрашивается в исходной задаче. Наибольший этаж, который соответствует первой попытке, равен k. Ведь если кокос разобьется, у нас останется всего один кокос и k-1 попыток. В этих условиях мы вынуждены проверять последовательно все этажи, начиная с первого. Если же кокос не разбился, то бросаем его с этажа k + (k-1). По аналогии с предыдущим проверяется, что это наибольший возможный этаж, ведь если теперь первый кокос разобьется, у нас останется всего (k – 2) попыток , и мы будем вынуждены проверять этажи последовательно по возрастанию, начиная с (k+1)-ого этажа. Если же первый кокос не разбился при бросании с этажа k + (k-1), то бросаем его с этажа k+(k-1)+(k-2) и т.д. Поэтому наибольшая высота здания для нашего “эксперимента” с k попытками равна

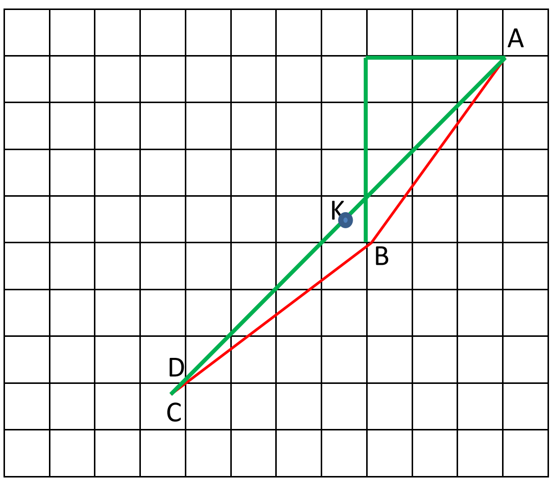
k + (k-1) + … +1 = k*(k+1)/2. Для решения исходной задачи достаточно найти наименьшее натуральное число k, для которого k*(k+1)/2 ≥ 100. Отсюда получаем, что выяснить наименьший этаж, упав с которого кокос разбивается, можно минимум за 14 попыток.

4. “Робинзон исследует остров”

Робинзон оказался на необитаемом острове, который имеет круглую форму. Как-то Робинзон вышел из своей хижины на берегу моря и, пройдя 3 км на запад и 4 км на юг, очутился на берегу моря. На следующий день Робинзон вышел из своей хижины, пошёл на юго-запад и очутился на берегу моря через 10 км. Ещё через день Робинзон решил обойти остров вдоль берега. Какое расстояние ему нужно будет преодолеть?

Решение.

Нарисуем условие на клетчатой бумаге, считая, что сторона клетки равна 1 км. Пусть хижина Робинзона находится в точке A. Пусть B и C – точки на берегу моря, в которых оказался Робинзон. Заметим, что C не лежит в узле клетчатой бумаги, так как 10 чуть больше, чем $7\sqrt{2}$. Получился “узенький” треугольник ABC. Радиус острова – это радиус окружности, описанной возле треугольника ABC.



Давайте попробуем оценить, чему равен этот радиус. Для этого рассмотрим ближайший узел D к точке C. Пусть K – середина AD. Видно, что BA = BD = 5 как гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4, поэтому центр описанной окружности O треугольника ABD лежит на прямой BK. Пусть OB = r. Тогда по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника OKD получаем:

$r^2 = (r - \sqrt{2}/2)^2 + (7\sqrt{2}/2)^2 \Rightarrow \sqrt{2}\,r = ½ + 49 \cdot ½ \Rightarrow r = 25\sqrt{2}/2 \approx 17.68$ км

Радиус же окружности R, описанной возле треугольника ABC, будет чуть больше. Поэтому Робинзону нужно будет преодолеть расстояние, которое несколько больше, чем длина окружности радиуса 17.68 км, т.е. $2\pi \cdot 17.68 \approx 111$ км, что очень близко к ответу D.

Комментарий: получить более точный ответ можно, используя формулу $2R = a/\sin\alpha$ и формулу для синуса разности двух углов.