

1. “Лист бумаги”

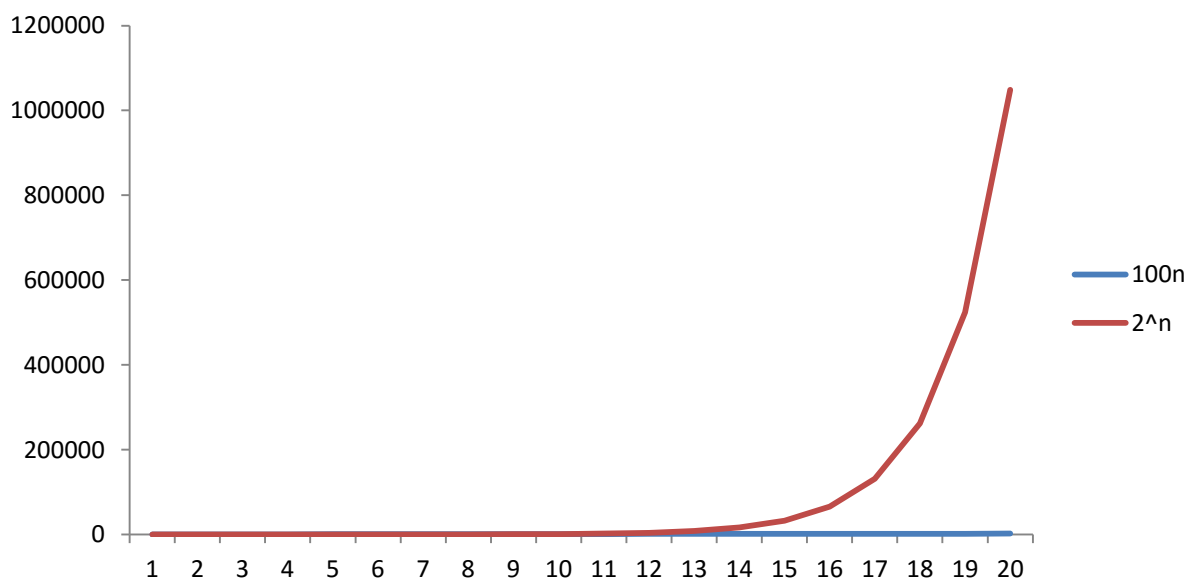
Предположим, что большой лист бумаги толщиной 0.1 мм сложили вдвое. Затем полученный лист сложили вдвое и так далее всего 50 раз. Чему примерно равна толщина полученного листа?

Решение.

Кажется, что толщина листа не может быть очень большой, но это не так. Ясно, что после каждого раза количество слоев удваивается. Значит, толщина полученного листа должна быть равна $0.1 \cdot 2^{50}$ мм. Это число огромное! Можно использовать неравенство $2^{10} = 1024 > 10^3$, чтобы оценить это число:

$0.1 \cdot 2^{50}$ мм $> 0.1 \cdot (10^3)^5$ мм = 10^{14} мм = 10^8 км, то есть больше, чем 100 миллионов километров! В то же самое время, расстояние от Земли до Солнца примерно равно 150 миллионов км.

Конечно, на практике вам не удастся сложить лист вдвое 50 раз, хотя не первый взгляд это кажется легко осуществимым. Заблуждение возникает потому, что человек не привык оперировать с большими числами и не сразу улавливает разницу между линейной и показательной функцией, которая огромна при больших значениях аргумента (рисунок ниже).



2. “Турпутевки”

Себестоимость недельной турпутевки в Испанию состоит из постоянных издержек (при проживании семьи в одном номере) и переменных издержек, зависящих от количества человек в семье (питание, авиаперелёт и т.д.). Первое турагентство устанавливает цены так, чтобы иметь некоторую фиксированную прибыль с каждой проданной турпутевки, а второе турагентство – некоторую фиксированную прибыль (возможно другую) с каждого туриста. Оказалось, что стоимости путевок на 2-их и 3-их в обоих турагентствах одинаковы. В каком турагентстве дешевле купить турпутевку на одного?

Решение.

Пусть p_1, p, q – цены путевок на одного, двоих и троих соответственно в первом турагентстве, p_2, p, q – цены путевок на одного, двоих и троих во втором турагентстве (по условию цены путевок на 2-их и 3-их в обоих турагентствах одинаковы). Пусть a_1 и a_2 – переменные издержки на одного человека, а b_1 и b_2 – постоянные издержки в первом и втором турагентстве соответственно. Тогда по условию:

$$p_1 - (a_1 + b_1) = p - (2a_1 + b_1) = q - (3a_1 + b_1) \rightarrow p = p_1 + a_1; q = p_1 + 2a_1$$

$$p_2 - (a_2 + b_2) = (p - (2a_2 + b_2))/2 = (q - (3a_2 + b_2))/3 \rightarrow p = 2p_2 - b_2; q = 3p_2 - 2b_2$$

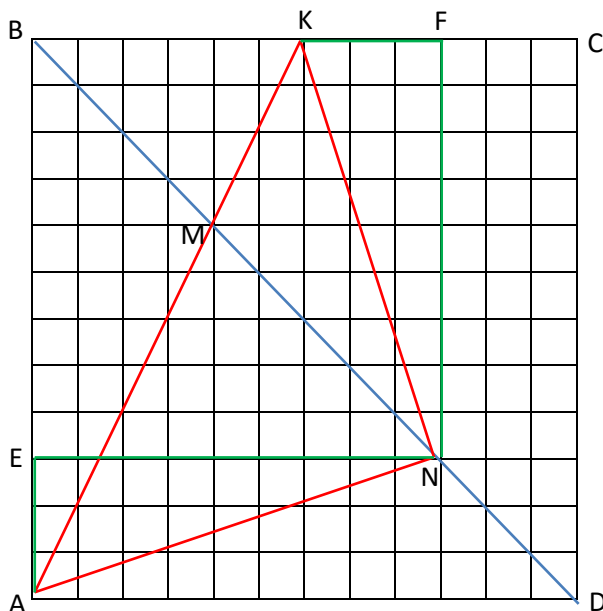
Поэтому $p_1 = 2p - q = 4p_2 - 2b_2 - 3p_2 + 2b_2 = p_2$ и стоимость путевок на одного в обоих турагентствах тоже должна быть одинакова.

3. “Угол в квадрате”

На единичной диагонали BD квадрата $ABCD$ отметили точки M и N так, что $BM = 1/3$, а $DN = 1/4$. Чему равен угол MAN ?

Решение.

Эту задачу легко решить на клетчатой бумаге. Рассмотрим квадрат 12×12 клеток (размер клетки подбирается исходя из условия $BD = 1$). Продолжим AM до пересечения со стороной квадрата в точке K (см. рисунок).



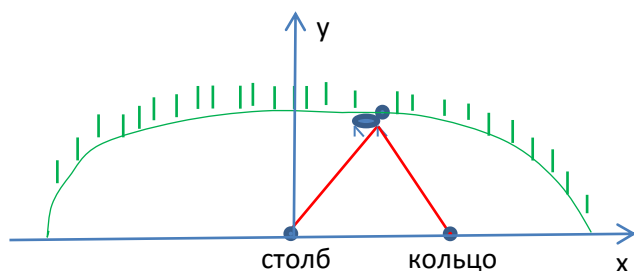
Пусть E и F – проекции точки N на стороны AB и BC квадрата. Прямоугольные треугольники NEA и NFK равны, так как равны их соответствующие катеты. Более того, один из них переходит в другой при повороте на 90° вокруг точки N . Значит, треугольник ANK равнобедренный и прямоугольный. Поэтому угол MAN равен 45° .

4. “Козаметрия”

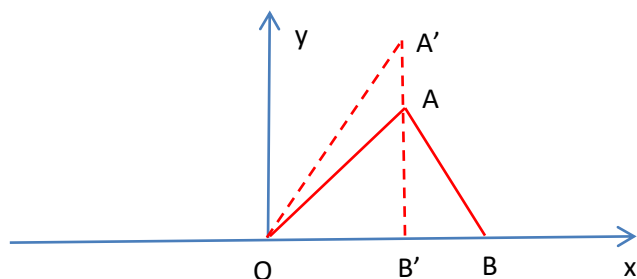
Математик держит на своем садовом участке козу. Он взял веревку длиной 10м, привязал один конец к столбу забора, пропустил веревку через кольцо на ошейнике козы и приделал к другому концу веревки кольцо, которое может скользить по проволоке вдоль забора. В итоге коза съела всю траву в пределах своей досягаемости. Какой кривой ограничена область досягаемости козы?

Решение.

Введем систему координат так, как показано на рисунке:



Посмотрим, каково наибольшее возможное значение y при заданном значении x . Это значение достигается, когда натянутая веревка от козы до кольца (от точки A до точки B на рисунке ниже) перпендикулярна оси x . В самом деле, если бы это было не так, то значение y можно было бы увеличить, рассмотрев достижимую точку A' (при этом длина веревки $OA'B'$ остается равной 10м).



Пусть $OB' = x$, $A'B' = y$. Тогда по условию $OA' = 10 - y$. Из прямоугольного треугольника $OA'B'$ по теореме Пифагора:

$$x^2 + y^2 = (10 - y)^2 \rightarrow y = 5 - x^2/20, \text{ а это уравнение параболы!}$$