

1. “Арбузы”

Арбузы весят 180 кг и почти целиком состоят из воды (на 99%). Со временем арбузы усохли и содержание воды снизилось на один процентный пункт (стало равным 98%). Сколько стали весить арбузы?

Решение.

Кажется, что вес арбузов не должен сильно измениться, но это не так. Арбузы состоят из воды и “сухого остатка”. Вес “сухого остатка” был равен $1\% \cdot 180 \text{ кг} = 1.8 \text{ кг}$. Но вес сухого остатка не изменился после того, как арбузы усохли. Пусть арбузы стали весить $X \text{ кг}$. Тогда по условию $2\% \cdot X = 1.8 \text{ кг} \Rightarrow X = 90 \text{ кг}$



2. “Редкие номера”

Герой одного фильма Вова похвастался перед друзьями, что у него “редкий телефонный номер, так как все цифры номера различны”. Друзья стали смеяться. Прав ли Вова? Другими словами, какую долю от всех возможных семизначных номеров составляют “редкие”?

Решение.

Всего имеется $9 \cdot 10^6$ различных семизначных номеров, так как первую цифру можно выбрать 9 способами (все кроме нуля), а каждую из остальных 10 способами. Для того чтобы получился “редкий” номер, первую и вторую цифру можно выбрать 9 способами, третью - 8 способами, четвертую - 7 способами,.... Поэтому число возможных комбинаций для “редкого” номера равно $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

Значит, доля “редких” номеров равна $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 / 9 \cdot 10^6 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 2 / 10^5 \approx 6\%$. Поэтому Вова прав и номер действительно редкий.

3. “Дом”

В доме, где живёт Вася, не более 1000 квартир. В каждом подъезде одинаковое число этажей, на каждом этаже по 4 квартиры. Вася заметил, что число квартир с двузначным номером у него в подъезде ровно в 10 раз больше числа подъездов. Сколько всего квартир в этом доме?

Решение.

Так как двузначных номеров квартир не больше чем 90, то количество подъездов не больше девяти. Рассмотрим два случая.

Случай 1: Все двузначные номера квартир находятся в Васином подъезде. Тогда Вася живет в первом подъезде, квартир в нем не меньше ста, значит, этажей в доме не меньше 25. При этом по условию задачи в доме должно быть 9 подъездов. Ясно также, что в каждом подъезде не более 27 этажей, так как иначе всего квартир в доме не меньше, чем $28 \cdot 4 \cdot 9 > 1000$, что противоречит условию. Значит, в этом случае в доме 25, 26 или 27 этажей и всего квартир 900, 936 или 972.

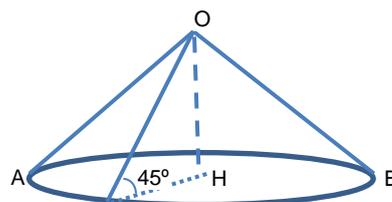
Случай 2: Не все двузначные номера квартир находятся в Васином подъезде.

....				
101	102	103	104	
97	98	99	100	
93	94	95	96	
...				
Квартиры в Васином подъезде				
...				
13	14	15	16	
9	10	11	12	
5	6	7	8	
1	2	3	4	

Расположим квартиры по порядку по 4 (см. рисунок). Ясно, что в этом случае все квартиры в Васином подъезде имеют двузначный номер, так как иначе в этом подъезде нечётное число квартир с двузначным номером, что противоречит условию. Если всего подъездов n , то квартир в Васином подъезде $10n$ по условию. Причём $10n$ должно делиться на 4 (на каждом этаже по 4 квартиры) и $10n \leq 50$ (в Васином и в первом подъезде в сумме не более 100 квартир). Поэтому в Васином подъезде 20 или 40 квартир. При этом всего квартир в доме 40 или 160. Ответ: задача имеет ровно 5 решений: 900, 936, 972, 40 и 160.

4. “Переход через Альпы”

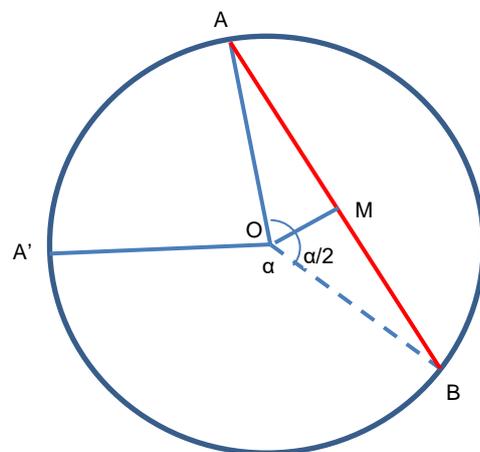
Группа людей оказалась у подножия горы конической формы, угол наклона которой постоянный и составляет 45° . Высота горы 2000 метров. Группа хочет оказаться в диаметрально противоположной точке подножия горы (пройти из точки А в точку В на рисунке). Чему равна длина кратчайшего маршрута из А в В?



Решение.

Наверняка вы видели, как делают из листа бумаги стакан в форме конуса. Наоборот, бумажный конус с вершиной О можно разрезать вдоль отрезка ОА и развернуть на плоскость. При этом получится сектор круга (см. рисунок). Отрезки ОА и ОА' нужно склеить, чтобы получить обратно конус.

При этом любому пути по поверхности конуса будет соответствовать некий путь, соединяющий точки А и В полученного сектора. Но кратчайший путь на плоскости это отрезок, соединяющий А и В. Найдем длину этого отрезка (красный отрезок на рисунке).



Если $OH = 2$, то $OA = 2\sqrt{2}$. Длина дуги АВ равна половине длины окружности радиуса 2 (основание конуса), то есть 2π . Поэтому угол α на рисунке равен $(2\pi/2\sqrt{2}\pi) \cdot \pi = (\pi/\sqrt{2})$ радиан.

Пусть М середина отрезка АВ. Тогда $AB=2BM=2OB \cdot \sin(\alpha/2)=4\sqrt{2} \cdot \sin(\pi/2\sqrt{2}) \approx 5$ км