№ 7 | июль 2021

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

№ 7
ИЮЛЬ
2021

ДЖОН ДАЛЬТОН: СДЕЛАНО ИЗ АТОМОВ

КОСЫЕ КВАДРАТЫ

ЗАМОРОЧКИ

Enter

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 7, июль 2021 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Е. А. Котко, Р. В. Крутовский, Г. А. Мерзон, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Алексей Вайнер

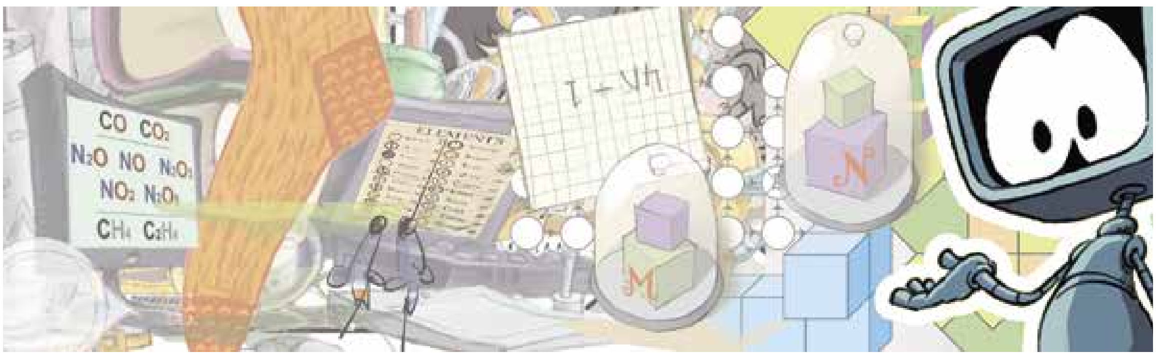
Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: kvantik@mccme.ru
сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях Почты России:
- Объединённый каталог «Пресса России» (индексы **11346** и **11348**)

Онлайн-подписка
на сайте агентства АРЗИ **www.akc.ru/itm/kvantik**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 10.06.2021
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831)216-40-40
Заказ № 211558
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

СОДЕРЖАНИЕ



Григорий Мерзон

КОСЫЕ КВАДРАТЫ:
ОТ ПИФАГОРА ДО ФЕРМА

Дима. Чем это ты занимаешься?

Маша. Пытаюсь разобраться, квадраты какой площади можно нарисовать на клетчатой бумаге.

Дима. А что тут разбираться? Все знают эти числа, $1\times1=1$, $2\times2=4$, $3\times3=9$, $4\times4=16$... – их так и называют, квадраты (рис. 1).

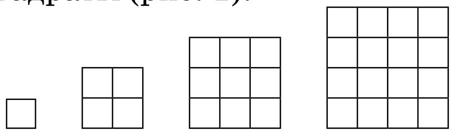


Рис. 1

Маша. Про квадраты я, конечно, знаю. Но ты говоришь только про случай, когда стороны квадрата идут по линиям сетки. А бывают и другие, косые квадраты: у них вершины всё ещё в узлах сетки, а стороны уже могут идти и косо. Вот несколько примеров (рис. 2).

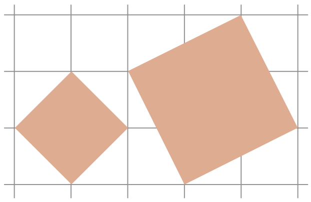
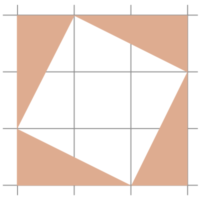


Рис. 2

Задача 1. а) Найдите площади квадратов на рисунке 2. б) Существует ли косой квадрат площади 200 клеток?

Дима. Слушай, а площади косых квадратов – всегда целые числа? Я тут мерил линейкой сторону второго квадрата, получилось чуть больше 2,2 клеточек...



$5=3^2-4$

Рис. 3

Маша. Конечно, целые! Смотри, нарисуем вокруг квадрата рамку (рис. 3). Получается, что площадь нашего квадрата – это площадь рамки минус учетверённая площадь закрашенного треугольника. Поэтому площадь косого квадрата всегда целое число.

Задача 2. Верно ли, что площадь вообще любого многоугольника с вершинами в узлах сетки составляет целое число клеток? Если не верно, то что верно?

Дима. Слушай, а я такую картинку уже где-то видел... Точно, в доказательстве теоремы Пифагора: можно переложить эти треугольники. Не занятая ими площадь не меняется, и получается, что $c^2=a^2+b^2$ (рис. 4).

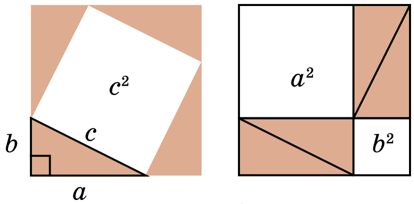


Рис. 4

Выходит, я измерил линейкой приближённое значение квадратного корня из 5.

Маша. Классно. Я-то думала, что по геометрии решаю задачу, а оказывается, по теории чисел. Давай число – площадь косого квадрата – тоже называть косым квадратом. Тогда косые квадраты – это в точности суммы двух квадратов целых чисел. Как бы только понять, какие числа так представляются?..

***

Маша. Я тут написала на Питоне программу[1], которая про первые 100 чисел выясняет, они косые квадраты или нет. Только что-то никакой закономерности не видно...

```
N = 101
sq_reps = [0] * N
for x in range(N):
    for y in range(N):
        s = x**2+y**2
        if s < N:
            sq_reps[s] += 1
for s,n in enumerate(sq_reps):
    print(s,": +" if n>0 else ": -")
```

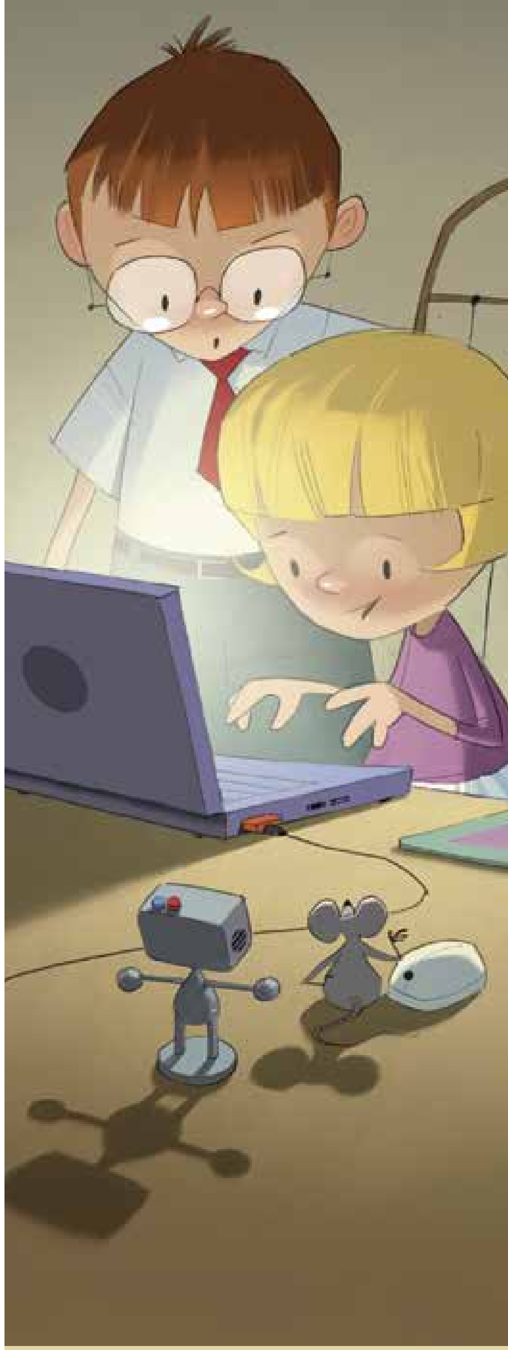
Дима. А я на бумажке пока только с числами до 20 справился. Но кое-что всё-таки видно!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
+	+	–	+	+	–	–	+	+	+	–	–	+	–	–	+	+	+	–	+

Смотри, я вот выписал отдельно только для нечётных чисел:

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
+	–	+	–	+	–	+	–	+	–

Маша. Ой как здорово! Как же это я не заметила такой простой закономерности?..



[1] Её можно запустить по ссылке kvan.tk/squares-py

Дима. Осталось разобраться с чётными числами, но у меня и про них есть идея. Там можно по диагонали всё рисовать и...

Задача 3. а) Докажите, что если N – сумма двух квадратов, то и $2N$ тоже. (*Указание:* полезно вспомнить формулы квадрата суммы и квадрата разности... или подумать про диагональ косого квадрата.)

б) Докажите, что если $2N$ – сумма двух *нечётных* квадратов, то и N – сумма двух квадратов.

Маша. Подожди, тут что-то не то! Вот уже для числа 21 твоя закономерность для нечётных чисел не выполняется.

Дима. Не может такая хорошая закономерность не выполняться. Да у тебя, наверное, в программе ошибка просто!

Маша. ...

Дима. М-да, ты права, 21 действительно в виде суммы двух квадратов не представишь. Жалко, но гипотеза неправильная.

Маша. Ну... что-то в этом всё-таки есть. Я смотрю на результаты работы программы только для нечётных чисел, и часто твоя закономерность выполняется... но не всегда. После 21 исключение 33, потом 57...

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33
+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	–	–	+	–	+	–	–

35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67
–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	–	–	+	–	+	–

69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91	93	95	97	99
–	–	+	–	–	–	+	–	+	–	+	–	–	–	+	–

Дима. Это уже не математика. Нам биолог показывал как-то в лесу «вороний глаз» и говорит: «Замечательная особенность этого растения – у него всегда 4 чашелистика... гм, у этого, правда, их 5...».

Маша. Не придирайся. Надо просто уточнить гипотезу. Вот, смотри, я отметила исключения в таблице красным – что у них общего?

Дима. Да они же все на 3 делятся... А, нет – там ещё 77... Ну что это такое? Сначала мы оставили на потом числа, делящиеся на 2, потому что для нечётных была прекрасная гипотеза. Она провалилась, и вроде бы только из-за чисел, делящихся на 3, – но нет, есть ещё 77… Может, просто выбросить числа, которые хоть на что-то делятся?

Маша. Так ты вообще всё выбросишь.

Дима. Я понял. Давай только простые числа рассматривать!

Маша. Гм?! И что, там будет всё чередоваться? 3 – нет, 5 – да, 7 – нет, 11 – нет… – что-то не получается.

Дима. Да нет, не так! Закономерность прежняя, мы считаем чередование по всем нечётным числам, не только простым. Но ответ получается гарантированно правильный только для простых.

Маша. То есть… э… ты говоришь, что простые числа вида $4k+1$ представляются в виде суммы двух квадратов, а вида $4k+3$ нет?

Дима. М… ну да, наверное это я и говорю. Вот, например, 2021… тьфу, это не простое число… Вот, $2017=44^2+9^2$. А составные числа как-нибудь из простых соберём.

Задача 4. Докажите, что если M – сумма двух квадратов и N – сумма двух квадратов, то MN – тоже сумма двух квадратов. (*Указание:* полезно вспомнить про косые квадраты… хотя можно решить задачу и алгебраически.)

Маша. Что в задаче по теории чисел появились простые числа – наверное, не так уж удивительно… но только как же такую гипотезу доказывать?..

Дима. Никаких идей. Я пока лучше с суммами трёх и четырёх квадратов поэкспериментирую – где там твоя программа?

Задача 5. Придумайте правдоподобную гипотезу о том, какие числа представимы в виде суммы четырёх квадратов (возможно, вам поможет компьютерный эксперимент).

То, что каждое простое число вида $4k+1$ представимо в виде суммы двух квадратов, – это знаменитая Рождественская теорема Ферма. С Рождества 1640 года (когда Ферма объявил, что доказал эту теорему) был найден не один десяток разных доказательств. Замечательное элементарное доказательство А. Спивака с «крылатыми квадратами» можно будет прочитать в одном из следующих номеров журнала.

Художник Алексей Вайнер

Сергей Дориченко

ДИОНИСИЙ, ПИСИСТРАТ, ПОЛИКРАТ

Две из этих историй известны, а одна частично придумана. Надо догадаться, какая именно. Вычислить её можно по какой-нибудь нелепости, несуразности, спрятанной в тексте. Попробуйте!

ДИОНИСИЙ

Одним из самых жестоких тиранов был Дионисий Старший, правивший в Сиракузах. Не сомневаясь в ненависти народа к себе, он очень удивился, узнав, что некая женщина молится в храме за его здоровье. Тиран вызвал её к себе и стал допрашивать. «Я пережила трёх тиранов, и каждый следующий был хуже предыдущего. Каким же будет четвёртый?» – сказала женщина. Дионисий не стал её наказывать, потому что ценил юмор. Так, однажды он заточил в каменоломню своего советника Филоксена за критику своих стихов. Заступившиеся друзья через неделю выпросили освобождение. Тогда Дионисий снова вызвал Филоксена и спросил мнение о других своих стихах. Филоксен со вздохом ответил: «Ведите меня обратно в каменоломню», – и Дионисий со смехом простил советника.

ПИСИСТРАТ

В Древней Греции говорили, что самое удивительное на свете – тиран, доживший до старости. Таким был Писистрат, окончивший свои дни, любимый народом и не тревожимый врагами. Правда, жизнь у него была бурная. Однажды его свергли аристократы Мегакл и Ликург, но потом перессорились между собой. Народ волновался, и Писистрат умело воспользовался ситуацией. Он уговорил красивую статную крестьянку из глухой деревушки притвориться богиней Афиной. Ей напудрили лицо и руки, одели в белый хитон, дали шлем, панцирь, щит и копьё, оклеенные белой бумагой – чтобы усилить сходство с традиционно белоснежными скульптурами, – и повезли в Афины на повозке с криком: «Сама Афина вселилась в эту свою статую и требует вернуть Писистрата в её город». Народ был потрясён, когда статуя «ожила» и заговорила, призывая Писистрата, и возвратил тирану власть.

ПОЛИКРАТ

Не было удачливей тирана, чем Поликрат. Его заморский друг Амасис предостерёг товарища: «Откажись от чего-то очень ценного, чтобы не позавидовали тебе боги и не

навлекли большую беду». Поликрат выплыл на корабле в море и бросил в пучину перстень изумительной красоты. Через пару дней рыбаки поймали огромную рыбу и подарили Поликрату. И – о чудо! – в желудке рыбины нашли тот самый перстень! Поликрат обрадовался, но Амасис был удручён: «Боги не приняли жертву и отказались от тебя. Я тоже больше тебе не друг – не хочу страдать, когда боги покарают тебя, а я не смогу помочь». Пророчество Амасиса сбылось – Поликрата заманил в ловушку и казнил персидский наместник Оройт. Дочь Поликрата, предвидя беду, остерегала отца, но тот слишком верил в свою удачу.

Художник Капыч

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Третий этап состоит из четырёх туров (с IX по XII) и идёт с мая по август.

Высылайте решения задач XI тура, с которыми справитесь, не позднее 5 августа в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик»**.

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

XI ТУР

51. Можно ли неверное равенство $1+2+3+...+100 = 1000$ сделать верным,

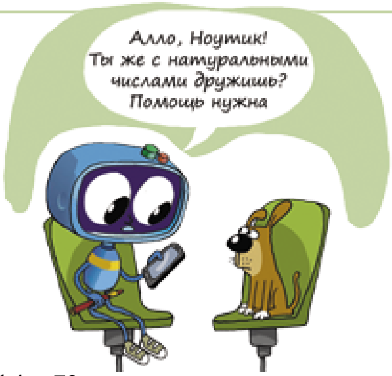
а) удалив некоторые из 100 его слагаемых;

б) заменив некоторые из 99 плюсов на минусы?

52. В классе поровну мальчиков и девочек. Каждый мальчик дружит хотя бы с одной девочкой. При этом, каких бы двух мальчиков мы ни взяли, у них будет разное количество подруг. Докажите, что всегда удастся разбить класс на дружащие пары «мальчик-девочка».

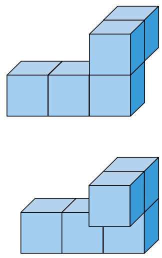
Авторы: Михаил Евдокимов (51, 53, 55), Александр Перепечко (52, 54)

53. Можно ли квадрат разрезать на несколько равносторонних а) пятиугольников; б) шестиугольников? (Многоугольник называется равносторонним, если все его стороны равны. Его углы не обязательно равны, и он даже может быть невыпуклым.)



54. Квантик выписал десятизначное натуральное число, содержащее все цифры от 0 до 9, в котором любые две соседние цифры различаются хотя бы на 5. а) Какие у этого числа могут быть первая и последняя цифры? Приведите все варианты и докажите, что других нет. б) Приведите пример такого числа.

55. Назовём «змейкой» фигуру, склеенную из пяти одинаковых кубиков так, как показано на рисунке (змейка может «смотреть» направо или налево). Можно ли из некоторого количества таких змеек сложить куб без дырок?



Художник Николай Крутиков

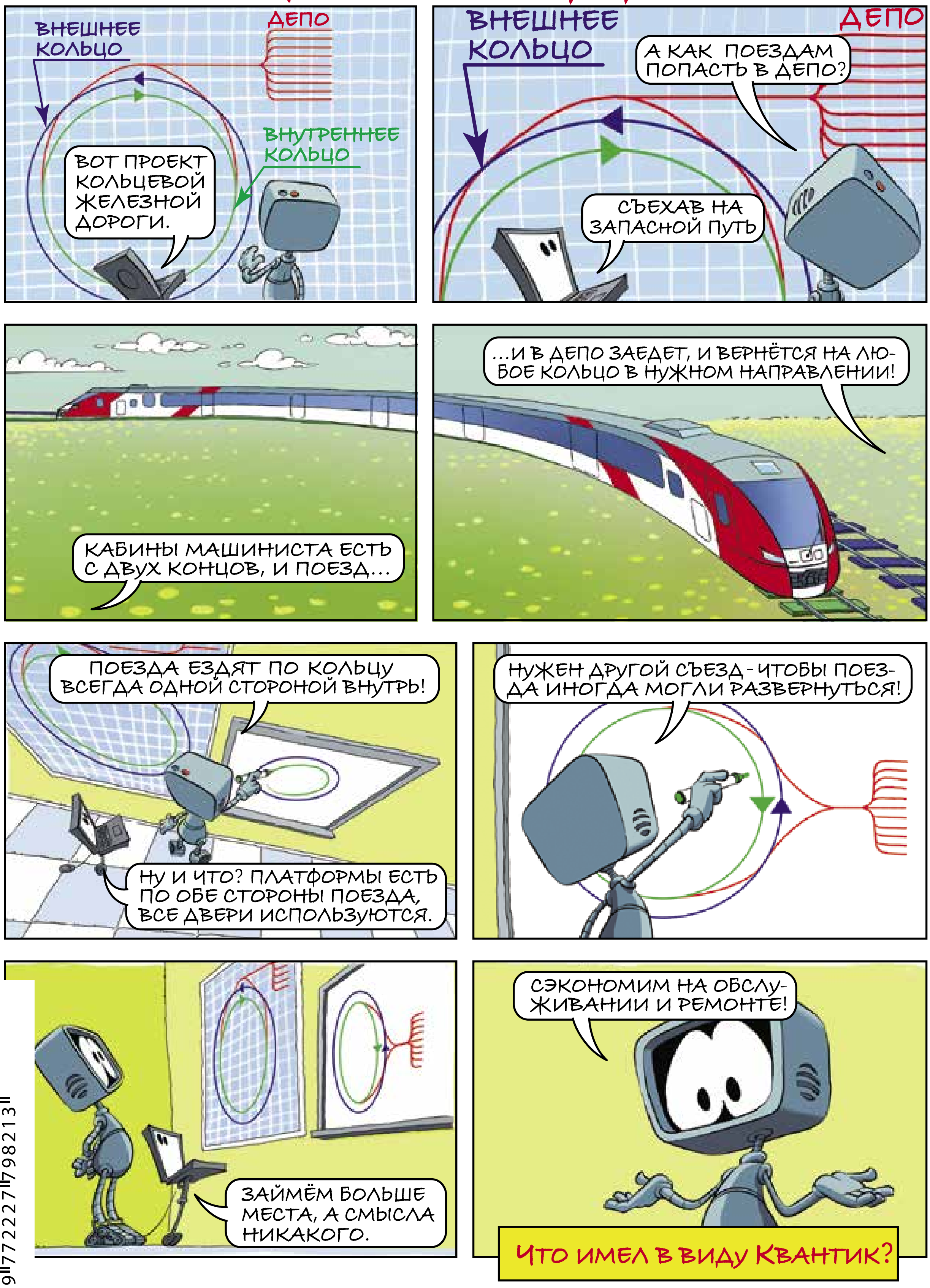
ПОЗДРАВЛЯЕМ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ ВТОРОГО ЭТАПА НАШЕГО КОНКУРСА!

Победители: Ульяна Ануфриева, Артём Барков, Алексей Бирюлин, Мария Зеленова, Игорь Ковалев, Leonie Krvavych, Елена Куцук, Ольга Метляхина, Павло Назаренко, Александра Нестеренко, Тамара Приходько, Павел Прохоров, Кирилл Ровинский, Лев Салдаев, Иван Часовских, уже награждавшиеся ранее, а также команда 5 классов центра образования №44 г. Тулы, награждённая впервые.

Призёры: Александр Беляков, Элина Бугаева, Андрей Вараксин, Анна Джаошвили, Арсений Ермолаев, Александр Копылов, Владислав Костиков, Григорий Махлин, София Окунева, Иван Подгорнов, Михаил Савин, Алёна Соколова, Севастьян Ушаков, Зарина Шарипова, Михаил Яриков, уже награждавшиеся ранее, а также Алиса Елисеева, Данияр Жусупов и Екатерина Колесникова, награждённые впервые.

УДАЧИ ВСЕМ В СЛЕДУЮЩИХ ЭТАПАХ И В ОБЩЕМ ГОДОВОМ ЗАЧЁТЕ!

КОЛЬЦЕВАЯ ДОРОГА



Художник Yustas

ISSN 2227-7986
21007