ЖУРНАЛ

КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 7

ИЮЛЬ

2020

ОТРАЖЕНИЯ В ЗРАЧКЕ И «ВОЛШЕБНЫЕ» СТЁКЛА

О ЧИСЛАХ И ФИГУРАХ

РАЗБИЕНИЕ НА ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Enter

№ 7 | июль 2020

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

www.kvantik.com

kvantik@mccme.ru

instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12

vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 7, июль 2020 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор: С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Е. Н. Козакова, Е. А. Котко, Р. В. Крутовский, И. А. Маховая, Г. А. Мерзон, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов
Художественный редактор и главный художник: Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Алексей Вайнер

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях Почты России:
- Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индексы **84252** и **80478**)
- Объединённый каталог «Пресса России» (индексы **11346** и **11348**)

Онлайн-подписка
на сайте агентства «Роспечать» **press.rosp.ru**
на сайте агентства АРЗИ **www.akc.ru/itm/kvantik/**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**

Формат 84х108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 8.06.2020

Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831)216-40-40

Заказ № 201317
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

EAC

СОДЕРЖАНИЕ

Александр Блинков

РАЗБИЕНИЕ НА ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Как разбить треугольник на подобные ему треугольники?[1] Сколько треугольников можно получить при таких разбиениях?

Разбиения равностороннего треугольника на равносторонние: от 4 до бесконечности

Очень легко разбить любой равносторонний треугольник на 4 равных равносторонних треугольника, соединив отрезками середины его сторон, то есть проведя средние линии (рис. 1, *а*).

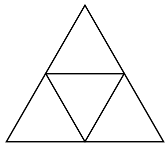


Рис. 1, *а*

Продолжая разбивать этим же способом получающиеся части, мы сможем разделить исходный треугольник на 7, 10, 13, … равносторонних треугольников, и вообще, на любое их число вида $3k+1$ (где k – натуральное). Отметим, что среди треугольников разбиения обязательно будут равные.

Аналогично строится одна из самоподобных фигур – ***треугольник Серпинского*** (такие фигуры называются ***фракталами***). В равностороннем треугольнике проводятся средние линии и «вынимается» средний из четырёх получившихся треугольников. Этот процесс повторяется в каждом из трёх остальных треугольников и т. д., до бесконечности. Итоговая фигура (рис. 1, *б*) имеет ту же форму, что и её части.


Рис. 1, *б*

А если делить стороны равностороннего треугольника не на 2 равные части, а на 3, 4 и т. д.? Тогда можно разбить его на 9, 16, … равных равносторонних треугольников (рис. 2, *а*, *б*). Ведь если поделить одну из сторон на n равных частей, то сторона маленького треугольника будет в n раз меньше стороны исходного, а площадь тогда – в n^2 раз меньше. Это и значит, что в разбиении будет n^2 треугольников. Кстати, их можно было подсчитать

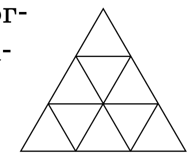


Рис. 2, *а*

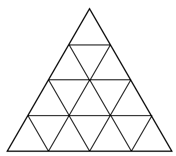


Рис. 2, *б*

[1] Два треугольника подобны, если углы одного соответственно равны углам другого (достаточно соответствующего равенства двух углов).

и по «слоям»: в верхнем слое – один треугольник, в следующем – 3, в последующем – 5, ..., в самом нижнем слое будет $2n-1$ треугольников. Попутно мы доказали геометрически, что $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$.

Обобщаем на произвольные треугольники

Всё сказанное выше легко обобщить на случай произвольного треугольника, проводя три семейства параллельных прямых (в каждом семействе прямые параллельны одной стороне и делят каждую из двух других сторон на n равных частей). Теперь несложно понять, как разбить любой треугольник на n ему подобных, где $n>5$. Разбиение на 6 треугольников, подобных исходному, получается, если сделать чертёж, аналогичный рисунку 2, *а*, и стереть лишние линии (рис. 3, *а*). Разбиение на 8 подобных (рис. 3, *б*) получается из рисунка 2, *б*, и т. д., для любых чётных n, больших 5. Если же n – нечётное, то после стирания надо сделать ещё один шаг: разбить «верхний» треугольник средними линиями на четыре равных. На рисунке 3, *в* показано такое разбиение на 11 треугольников.

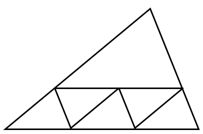


Рис. 3, *а*

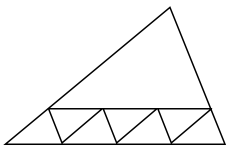


Рис. 3, *б*

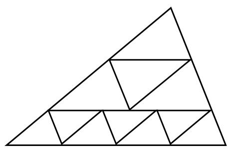


Рис. 3, *в*

А вот на 2, 3 или 5 треугольников, подобных исходному, можно разбить не любой треугольник.

Прямоугольные треугольники

Выясним, какой треугольник можно разбить на два ему подобных. Пусть отрезок CD делит треугольник ABC на два ему подобных: ACD и BCD. Если $\angle CAD=\alpha$, $\angle ACD=\beta$, то $\angle BDC=\alpha+\beta$ (рис. 4, *а*). Тогда в треугольнике ACD должен быть угол $\alpha+\beta$, и это может быть только угол ADC. Значит, $\angle ADC=\angle BDC=\alpha+\beta=90^\circ$. Тогда исходный треугольник тоже прямоугольный, и $\angle ACB=90^\circ$.

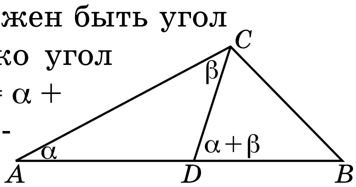


Рис. 4, *а*

Так как $\alpha+\beta=90^\circ$, то $\angle DCB=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, и треугольники ACD и BCD подобны треугольнику ABC (рис. 4, *б*).

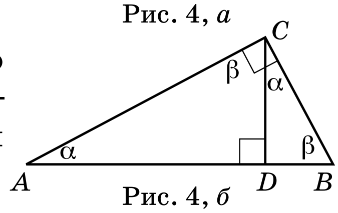


Рис. 4, *б*

Проведя в любом из полученных треугольников высоту из вершины D, мы разобьём треугольник ABC на три треугольника, ему подобных. Продолжая этот процесс, можно разбить прямоугольный треугольник на любое количество ему подобных. А можно ли сделать эти треугольники равными? Иногда можно.

Так, если прямоугольный треугольник ABC – ещё и равнобедренный, высота CD разбивает его на 2 равных прямоугольных равнобедренных треугольника, подобных ABC, а их высоты, проведённые из вершины D, дают уже 4. Продолжая, можно разбить прямоугольный равнобедренный треугольник на 2^n равных треугольников, подобных ему (n – любое натуральное).

Но этот случай – не единственный. Пусть длины катетов прямоугольного треугольника равны целым числам m и k, тогда его можно разбить на m^2+k^2 равных треугольников, подобных ему. Для этого проведём высоту из вершины прямого угла и разобьём один получившийся треугольник на m^2, а другой – на k^2 равных треугольников, как на рисунке 2. Полученные маленькие прямоугольные треугольники двух видов равны (по гипотенузе и острому углу) и подобны исходному. На рисунке 5 – пример разбиения треугольника с катетами 5 и 7 на $74 = 5^2 + 7^2$ равных треугольника.

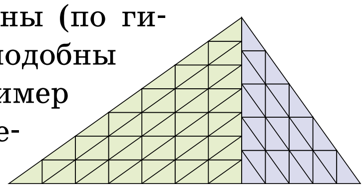


Рис. 5

Разбиения на различные подобные треугольники

А какой треугольник можно разбить на треугольники, ему подобные, среди которых не будет равных? Оказывается, любой неравносторонний. Перед тем как объяснить решение, напомним, что в подобных треугольниках равны отношения соответствующих сторон. Построить искомое разбиение поможет обобщённая теорема Фалеса: параллельные прямые отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки.

Рассмотрим треугольник ABC, в котором $BC/AC = k > 1$. Приложим к треугольнику ABC треугольники 1, 2, 3, 4 и 5 (рис. 6). Получим треугольник, разбитый на 6 неравных подобных треугольников.

Треугольники ABC, 1, 2, 3, 4 все различны, так как каждый следующий в k раз больше предыдущего.

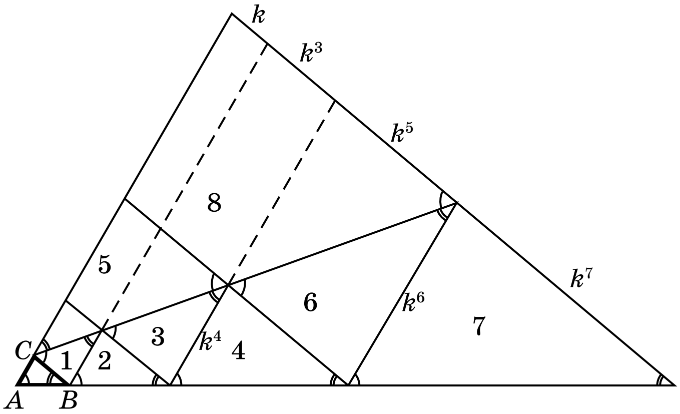


Рис. 6

Но треугольники 4 и 5 могут оказаться равными, если $k+k^3=k^4$. Тогда достроим треугольники 6 и 7, а треугольник 5 заменим треугольником 8. Треугольники 7 и 8 не равны, так как $k^6 \neq k+k^3+k^5$. Ведь если $k+k^3=k^4$, то $k^6=k^2(k+k^3)=k^3+k^5<k+k^3+k^5$.

Вместо заключения

Какие треугольники разрезаются на 5 подобных, до конца неизвестно, см. статью Б. Френкина «О разрезании треугольника на подобные ему» («Квант» № 4 за 2008 г.). Развитие темы для многоугольников см. в книге М. Гарднера «Математические досуги» (Мир, 2000; гл. 24: «Делящиеся» фигуры на плоскости).

Задачи для самостоятельного решения

1. Можно ли какой-нибудь треугольник разбить на три равных треугольника, подобных исходному?

2. Можно ли разбить на пять треугольников, подобных исходному, какой-нибудь: а) прямоугольный треугольник; б) (*С. Маркелов*) непрямоугольный треугольник?

3. (*Т. Емельянова*) Разрежьте неравносторонний треугольник на четыре подобных треугольника, среди которых не все между собой равны.

4. (*А. Галочкин*) Бумажный треугольник с углами 20°, 20°, 140° разрезается по одной из своих биссектрис на два треугольника, один из которых также разрезается по биссектрисе, и так далее. Может ли после нескольких разрезов получиться треугольник, подобный исходному?

5. (*Д. Шноль*) Каждый из двух подобных треугольников разрезали на два треугольника так, что одна из получившихся частей первого подобна одной из частей второго. Обязательно ли подобны оставшиеся части?

6. (*М. Панов*) Можно ли равносторонний треугольник разбить на 5 равнобедренных, но попарно не подобных?

Художник Мария Усеинова

Анастасия Челпанова

САВРАСОВ, СТРАВИНСКИЙ, РЕПИН

Две из этих историй известны, а одна полностью придумана. Надо догадаться, какая именно. Вычислить её можно по какой-нибудь нелепости, несуразности, спрятанной в тексте. Попробуйте!

САВРАСОВ

Как-то раз художник Алексей Кондратьевич Саврасов поссорился с другом. Тот не раз пытался примириться, но художник наотрез отказывался с ним видеться. Тогда друг решил незаметно пробраться в мастерскую Саврасова и подложить ему новые краски, в которых тот так нуждался. Вечером, когда свет в мастерской погас, друг залез в неё через открытое окно. Через минуту там раздались крики и грохот. Прибежавший на шум художник увидел сидящего на полу друга, испачканного красками. Огромная, только что законченная Саврасовым знаменитая картина «Три богатыря» в полумраке так испугала своего первого зрителя, что он оступился, упал и опрокинул палитру.

СТРАВИНСКИЙ

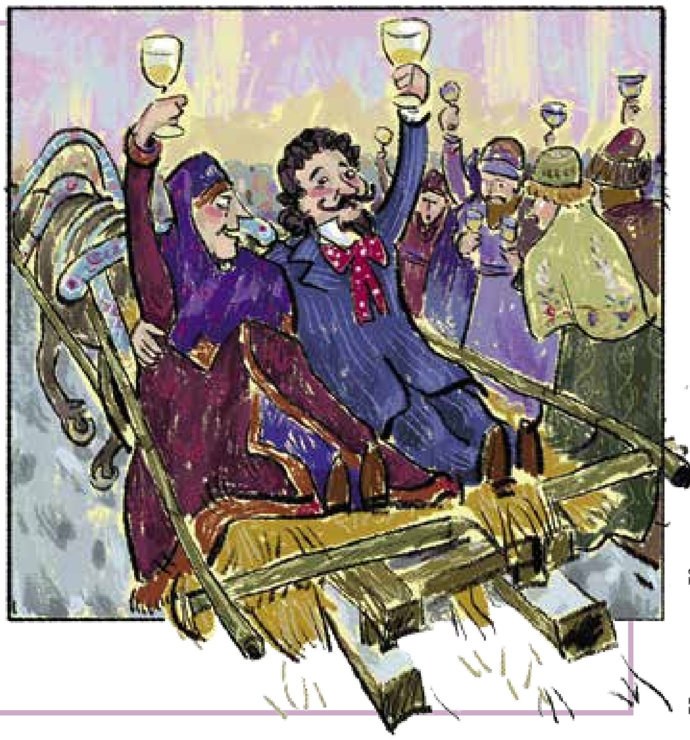
Однажды композитор Игорь Фёдорович Стравинский переезжал из Италии в Швейцарию и вёз свой портрет, нарисованный Пабло Пикассо. На границе военные, увидев рисунок, ни за что не хотели его пропустить. Композитор объяснил, что это его портрет, нарисованный известным художником. Военные не поверили: «Это не портрет, а план», – сказали они. «Да это план моего лица, а не чего-либо другого», –

уверял Стравинский, но не убедил военных, опоздал на поезд и задержался на границе до следующего дня. А рисунок пришлось оставить в Италии: Стравинский отослал его в британское посольство в Риме, откуда портрет переправили композитору дипломатической почтой.

РЕПИН

Художник Илья Ефимович Репин часто устраивал у себя обеды, куда могли прийти не только друзья, но и малознакомые или впервые пришедшие к нему люди. Один раз такой гость сказал за обедом тост, закончив его восхвалением Репина как автора гениальной картины «Боярыня Морозова». Художник сразу же откликнулся, что он присоединяется к этому тосту всем сердцем. Он тоже считает эту картину гениальной и был бы горд, если бы действительно написал её он, а не Суриков.

Гость не понял, что попал в неловкое положение, радостно слушая Репина.



Художник Капыч

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Высылайте решения задач XI тура, с которыми справитесь, не позднее 5 августа в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

XI ТУР

51. В числовом ребусе

Т×О×П×О×Л×Ь=Т×Ю×Л×Ь×П×А×Н

замените буквы ненулевыми цифрами так, чтобы число ТОПОЛЬ получилось как можно бóльшим. (Одинаковые буквы заменяйте одинаковыми цифрами, разные – разными.) Не забудьте обосновать ответ.

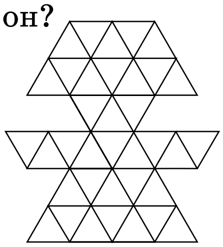
52. Расставьте на шахматной доске несколько белых и чёрных коней так, чтобы каждый белый конь бил ровно четырёх чёрных, а каждый чёрный – ровно четырёх белых.

НАШ КОНКУРС

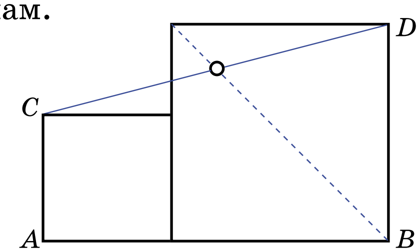
олимпиады

Авторы: Александр Домашенко (51, 53), Михаил Евдокимов (52, 54), Алексей Воропаев (55)

53. Аня вырезала куклу из бумаги в треугольную сетку. Юра утверждает, что эту фигурку можно свернуть в треугольную пирамидку без просветов и наложений. Прав ли он?



54. На отрезке AB построены два различных прилегающих друг к другу квадрата (см. рисунок). Докажите, что диагональ большого квадрата делит отрезок CD пополам.



55. Петя стреляет по мишени. Табло показывает отношение числа попаданий к числу сделанных выстрелов (до начала стрельбы табло не горит). В какой-то момент число на табло было меньше чем q. Через некоторое время это число стало больше, чем q. Для каких q от 0 до 1 отсюда следует, что в какой-то момент доля попаданий была ровно q?

Художник Николай Крутиков

Прозрачный бак?

У нас на даче есть металлический бак с водой. Утром на нём бывает видно, докуда налита вода. Ещё это видно в тёплый день, когда бак только что наполнили холодной водой из колодца. Неужели бак становится прозрачным?

Автор Валерия Сирота • Фото автора

Художник Мария Усеинова

ISSN 2227-7986 20007
9 772227 798206