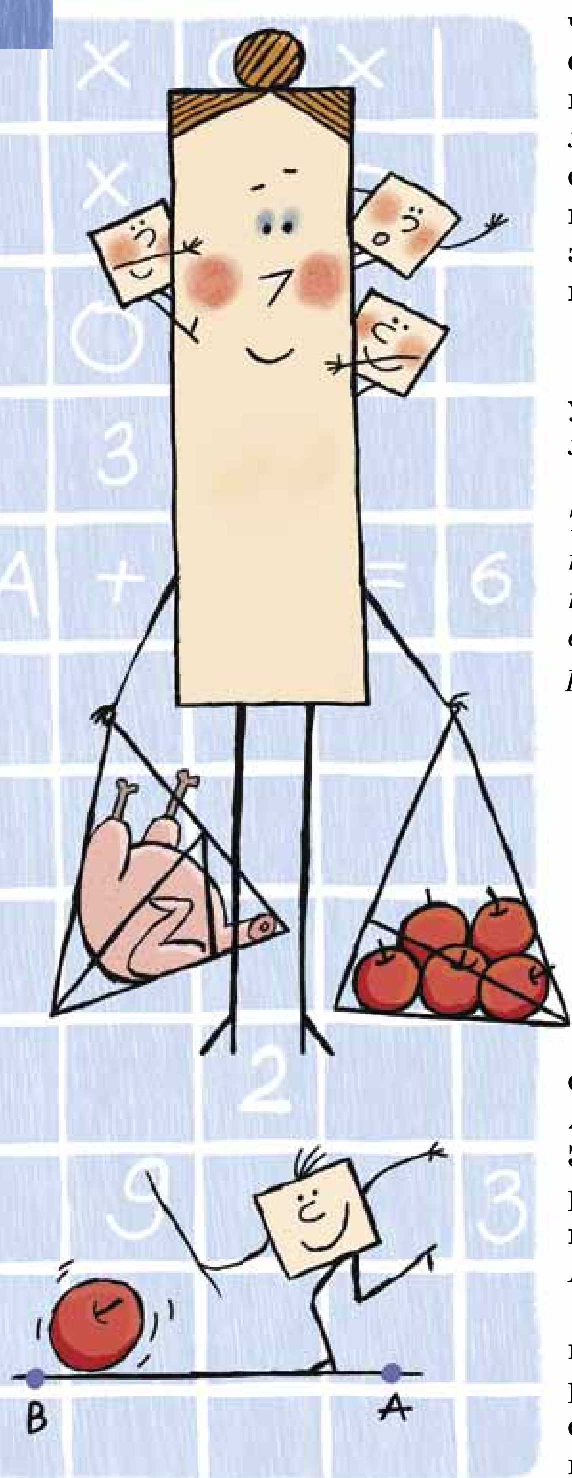
Математический кружок

Геометрия на клетчатой бумаге

Часть 3

Александр Блинков



В этой, последней части мы поговорим о геометрических задачах, в условиях которых клеточек нет, но если сделать чертёж на клетчатой бумаге, то найти решение будет существенно проще. Клетки позволяют лучше увидеть перпендикулярность прямых, равенство отрезков или углов, равенство площадей, и тому подобное. Особенно часто это помогает, если в условии задач фигурируют квадраты или прямоугольники, но и это необязательно.

Начнём с задачи, давно ставшей «классикой».

Задача 1. В невыпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A, B и D равны 45°. Докажите, что его диагонали AC и BD перпендикулярны и равны.

Сделаем чертёж на клетчатой бумаге (рис. 1а). *Требуемые равенство и перпендикулярность видны по клеточкам. Ещё легче увидеть перпендикулярность прямых BC и AD, обосновать которую существенно проще. Отсюда – идея решения: заметить равные треугольники.*

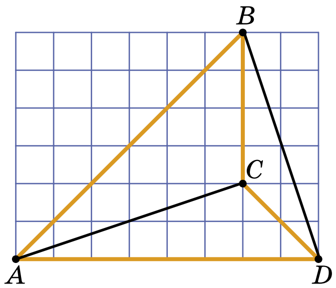


Рис. 1*а*

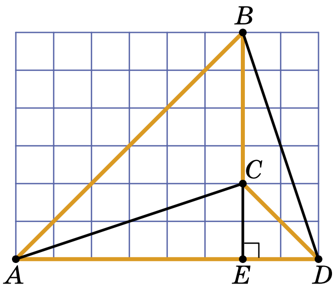


Рис. 1*б*

Решение. Продлим отрезок BC до пересечения с AD в точке E (рис. 1б). В треугольнике ABE имеем: $\angle ABE = \angle BAE = 45^\circ$, откуда $\angle BEA = 90^\circ = \angle CED$. Значит, треугольники AEB и DEC – прямоугольные и равнобедренные, то есть $AE = BE$ и $CE = DE$. Следовательно, равны прямоугольные треугольники AEC и BED (по двум катетам).

Более того, если повернуть треугольник BED вокруг точки E на 90° против часовой стрелки, он перейдёт в треугольник AEC и отрезки BD и AC совместятся! Значит, эти отрезки равны и до поворота были перпендикулярны.

Можно заметить, что C – точка пересечения высот треугольника ABD (это даёт другое решение). Также можно доказать, что площадь ABCD равна $\frac{1}{2}AC^2$, но это трудно увидеть по клеткам. Если вы знаете формулу для вычисления площади треугольника, сделайте это самостоятельно.

Задача 2 (*Н. Москвитин*). На отрезке AB выбрана произвольная точка C и построены квадраты $ADEC$ и $CBFG$ (в одной полуплоскости относительно AB). Докажите, что точка пересечения AE и BG лежит на отрезке DF.

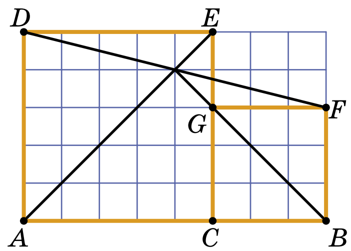


Рис. 2*а*

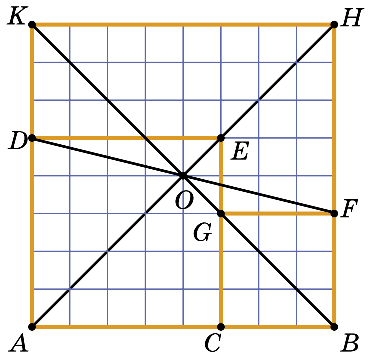
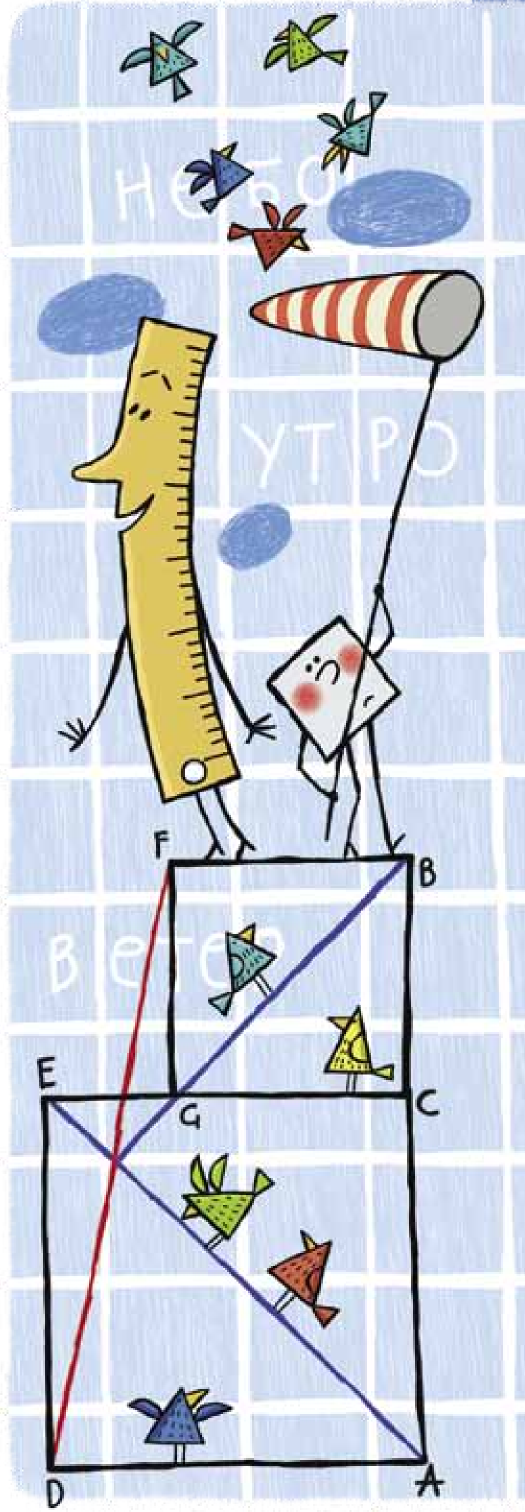


Рис. 2*б*

Выполнив чертёж на клетчатой бумаге (рис. 2а), *можно не только убедиться в справедливости доказываемого утверждения, но и увидеть, что точка пересечения трёх отрезков – это середина DF. Тогда возникает идея решения: докажем, что середина DF принадлежит обеим прямым: AE и BG.*

Решение. Построим на стороне AB квадрат $ABHK$. Пусть O – его центр. Докажем, что O – середина отрезка DF. Заметим, что $AK=AC+CB$, поэтому $DK=FB$, откуда понятно, что D и F – противоположные точки на границе квадрата. Строго доказать это можно так: треугольники KOD и BOF равны по двум сторонам ($DK=FB$, $KO=BO$) и углу между ними (45°), откуда углы KOD и BOF равны, то есть точки D, O и F лежат на одной прямой, и $DO=FO$, то есть O – середина DF.

Прямые AE и BG содержат диагонали квадрата $ABHK$, поэтому точка пересечения диагоналей квадрата O лежит и на прямых AE и BG.



Задача 3 (*Н. Москвитин*). В трапеции $ABCD$ основание BC в два раза меньше основания AD. Из вершины D опущен перпендикуляр DE на сторону AB. Докажите, что $CE = CD$.

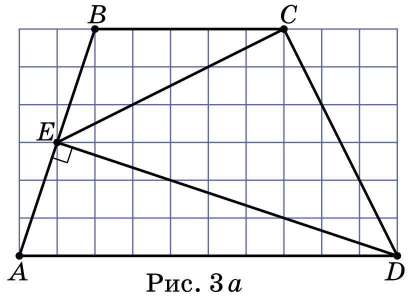


Рис. 3*а*

Выполнив чертёж на клетчатой бумаге (рис. 3а), легче увидеть возможности для использования «ключевого» условия: $AD = 2BC$. Например, если достроить трапецию до треугольника, продолжив AB и DC, то BC будет его средней линией. Другая идея – прямая, проведённая через точку C параллельно AB, делит AD пополам. Итак, два способа решения.

Решение 1. Продолжим боковые стороны AB и DC до их пересечения в точке F (рис. 3б). Тогда BC – средняя линия треугольника AED (так как $BC \parallel AD$ и $BC = 0{,}5AD$). EC – медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника FED, следовательно, $CE = FC = CD$.

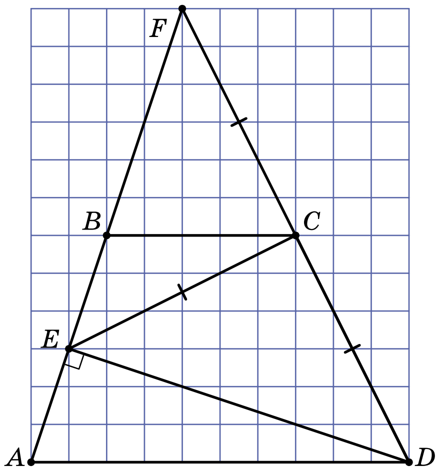


Рис. 3*б*

Решение 2. Через вершину C проведем прямую, параллельную AB, которая пересечет AD в точке K, а DE – в точке M (рис. 3в). Тогда $ABCK$ – параллелограмм, поэтому $BC = AK = KD$. Значит, KM – средняя линия треугольника ADE, то есть CM – медиана треугольника CDE. Кроме того, $AB \perp DE$, $CM \parallel AB$, значит, $CM \perp DE$, то есть CM – высота треугольника CDE. Так как CM – медиана и высота треугольника CDE, то этот треугольник – равнобедренный: $CE = CD$.

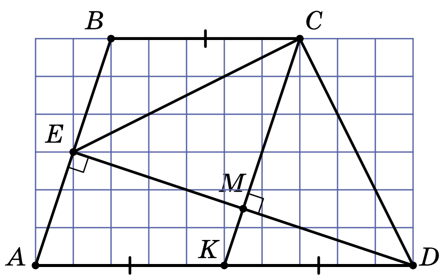


Рис. 3*в*

Если вам понравилась идея чертежей «на клеточках», то вы можете её использовать в дальнейшем. Понятно, что она помогает далеко не всегда, но, во всяком случае, на клетчатой бумаге легче сделать чертёж, максимально соответствующий условию.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 4 (*Ю. Блинков*, IX Московская устная олимпиада по геометрии). Биссектриса угла B и биссектриса внешнего угла D прямоугольника $ABCD$ пересекают сторону AD и прямую AB в точках M и K соответственно. Докажите, что отрезок MK равен и перпендикулярен диагонали прямоугольника.

Задача 5 (*Д. Калинин*, XV турнир математических боёв имени А. П. Савина). Равные прямоугольники $ABCD$ и $AEFG$ с общим прямым углом A расположены так, что E лежит на отрезке AB, а D лежит на отрезке AG. Прямые CD и EF пересекаются в точке H, а AG и CE – в точке K. Докажите, что KH и CG перпендикулярны.

Задача 6 (Московская математическая регата 7 класса, 2012 г.). В прямоугольнике $ABCD$ точка P – середина стороны AB, а точка Q – основание перпендикуляра, опушенного из вершины C на PD. Докажите, что $BQ=BC$.

Задача 7 (*В. Произволов*). В четырёхугольнике $ABCD$ углы B и D – прямые и $AB=BC$. Длина перпендикуляра, проведённого из вершины B к стороне AD, равна 3. Найдите площадь $ABCD$.

Задача 8 (*Н. Москвитин*). На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC с основанием AC выбрана точка D так, что угол DAC равен $45°$. Из точки D восставлен перпендикуляр к BC, который пересекает AB в точке E. Докажите, что $DE=AE$.

Задача 9 (*Д. Прокопенко*, XVIII турнир математических боёв имени А. П. Савина). В квадрате $ABCD$ точки E и F – середины сторон BC и CD, прямая AE пересекает BF в точке P. Докажите, что:
а) отрезок PD равен стороне квадрата;
б) $\angle AED=\angle ADP$; в) $\angle APC=\angle BPC=135°$.

Художник Инга Коржнева