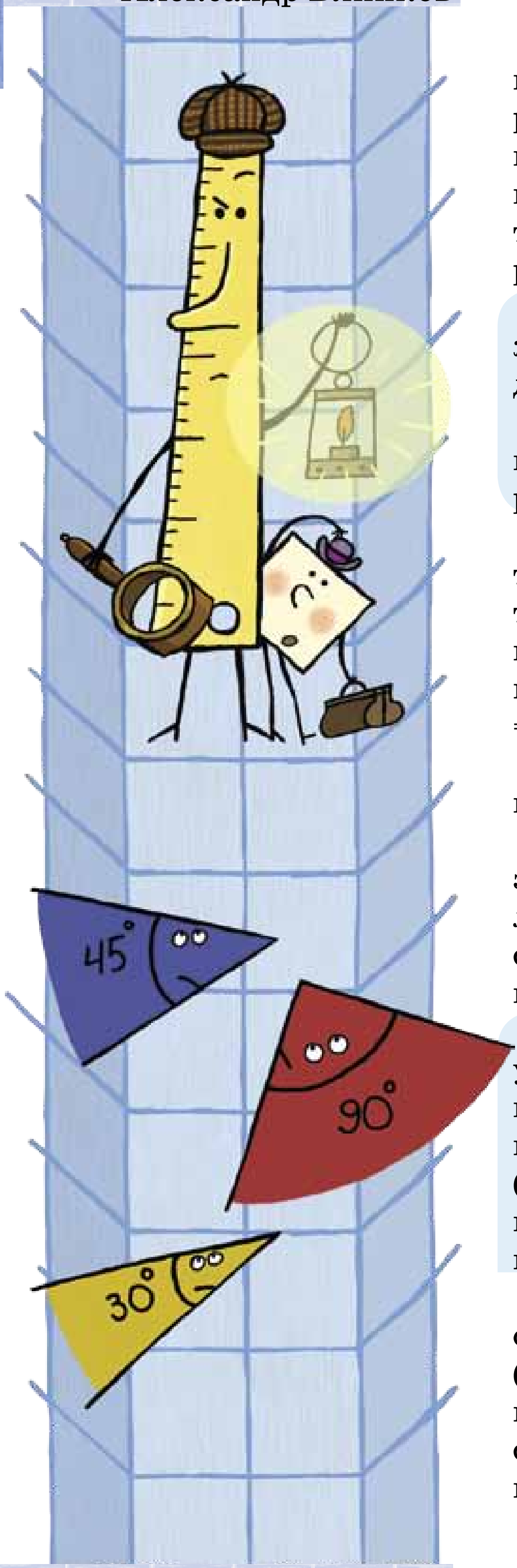
ГЕОМЕТРИЯ НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ

ЧАСТЬ 2

Александр Блинков



Бывают задачи, в которых фигура изображается на необычной «сетке», например, состоящей из равносторонних треугольников. Задачи на таких «клеточках» похожи по способам решения на задачи с обычными клетками, но есть и важные отличия: прямые углы найти труднее, зато на такой сетке легко строить равносторонние треугольники, а значит, и углы величиной 60°.

Задача 1 (*Н.Медведь,* конкурс журнала «Квантик», 2015 год). Найдите величину угла ABC (рис. 1 *а*).

Ответ несложно угадать, а уже затем найти дополнительное построение, которое поможет его обосновать. **Ответ:** 30°.

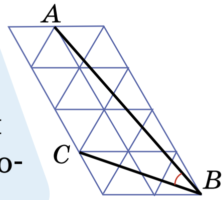


Рис. 1 *а*

Решение. На луче BC отметим точку D так, что $DC = BC$ (рис. 1 *б*). Тогда треугольник ADC – равносторонний, а треугольник ACB – равнобедренный. Так как $\angle ACD = 60°$, то $\angle ACB = 120°$, $\angle ABC = 30°$.

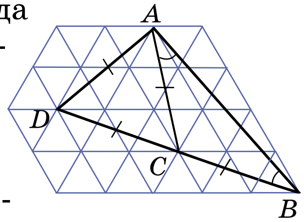


Рис. 1 *б*

Другое решение см. в «Квантике» № 6 за 2015 год.

Вернёмся к обычной клетчатой бумаге и займёмся задачами, связанными с площадями. Конечно, вычислить площадь фигуры, изображённой на клеточках, совсем не сложно, но не всегда такие решения самые короткие и интересные.

Задача 2 (V Московская устная олимпиада 6 – 7 классов). Даны прямоугольники $ABCD$ и $KLMN$ (рис. 2 *а*). Докажите, что площади четырёхугольников $ALCN$ и $BMDK$ равны.

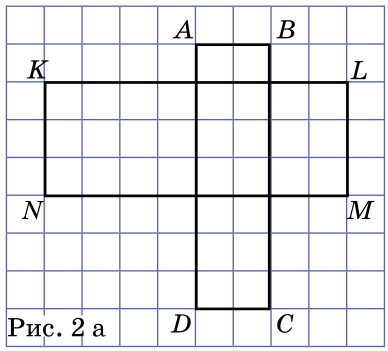


Рис. 2 а

Решение. Построим ещё один прямоугольник: $PQRS$ (рис. 2 *б*, *в*). Тогда площадь каждого из двух интересующих нас четырёхугольников складывается из общей части данных прямоугольников и половины разности площадей $PQRS$ и общей части данных прямоугольников.

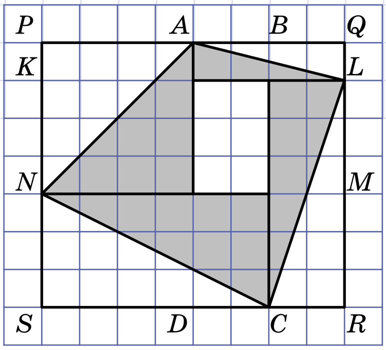


Рис. 2*б*

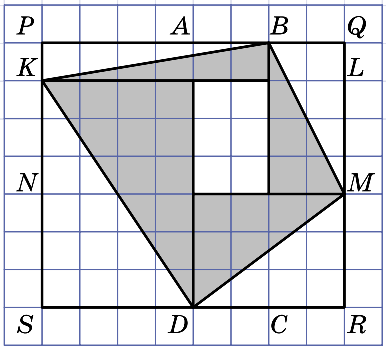


Рис. 2*в*

Эти же чертежи, конечно, дают возможность и подсчитать площадь каждого четырёхугольника. Она равна $(56-6):2+6=31$ клетке.

Но встречаются задачи, для решения которых подсчёт площадей фигур «по клеточкам» вряд ли поможет.

Задача 3 (III Московская устная олимпиада по геометрии, вариация). Дан невыпуклый шестиугольник (рис. 3*а*). Используя только линейку без делений, разбейте его отрезком на две части с равными площадями.

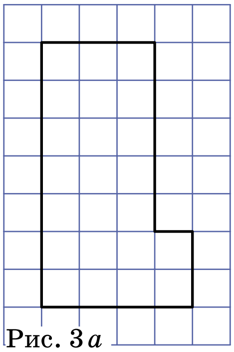


Рис. 3*а*

Решение основано на таком факте: прямая, проходящая через центр симметрии фигуры, делит её на две равные части (а значит, и равные по площади, или, говоря иначе, равновеликие). Но заданная фигура не симметрична, как быть? Разбивать её на симметричные либо дополнять до симметричной!

Разобьём заданный шестиугольник на жёлтый и зелёный прямоугольники, как показано на рисунке 3*б*. Построим диагонали этих прямоугольников, тогда точки O и P их пересечения – центры симметрии прямоугольников. Проведём прямую OP, она разобьёт каждый прямоугольник, а значит, и исходный шестиугольник, на две равновеликие фигуры.

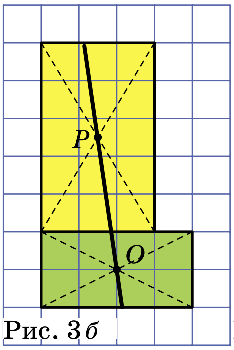


Рис. 3*б*

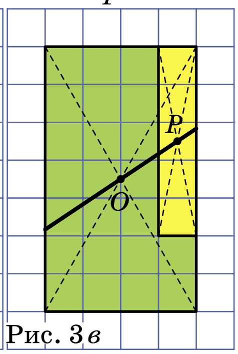


Рис. 3*в*

А можно дополнить заданный шестиугольник до прямоугольника (рис. 3*в*). Докажите, что прямая OP на этом рисунке также даёт нужное разбиение.

Следующая задача – также пример непростого построения, но уже не связанного с площадями.

Задача 4 (*Г. Мерзон*, IX Московская устная олимпиада по геометрии). Лист бумаги имеет вид квадрата размером 2×2 клетки. Используя только линейку без делений и не выходя за пределы листа, разделите диагональ квадрата на шесть равных частей.

Решение. Построим центры клеток, проведя в них диагонали. Соединим центры вертикальными прямыми. Эти прямые пересекут стороны клеток в серединах, отметим их (рис. 4*а*). Теперь проведём прямые, как показано на рисунке 4*б*. По теореме Фалеса, они разделят диагональ на равные части.

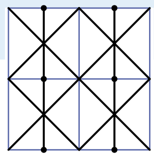


Рис. 4*а*

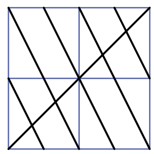


Рис. 4*б*

А вот как подсчёт площади помогает найти длину отрезка на треугольной сетке.

Задача 5 (*А. Бердников*). Найдите длину отрезка AB, если сторона клетки равна 1 (рис. 5*а*).

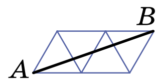


Рис. 5*а*

Отметив узел C, получим равносторонний треугольник ABC (рис. 5*б*). Его площадь складывается из центральной клетки и половинок цветных параллелограммов, итого $1+3\cdot\frac{4}{2}=7$ клеток. Пусть сторона треугольника ABC в x раз больше стороны клетки, тогда его площадь больше площади клетки в x^2 раз (подумайте, почему), то есть $x^2=7$. Значит, $AB=\sqrt{7}$.

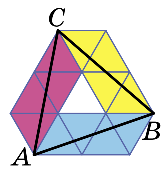


Рис. 5*б*

Аналогично можно найти расстояние между любыми узлами треугольной сетки.

При решении следующей задачи тоже потребуются и дополнительные построения, и некоторые вычисления.

Задача 6. Докажите, что угол α в два раза больше угла β (рис. 6*а*).

Решение. Заметим, что $AC=12$, $BC=5$. По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника ABC $AB^2=AC^2+BC^2=169$, то есть $AB=13$.

Рис. 6*а*

На луче AC отметим точку E так, чтобы $EC=1$, тогда $AE=13$ (рис. 6*б*). Значит, треуголь-

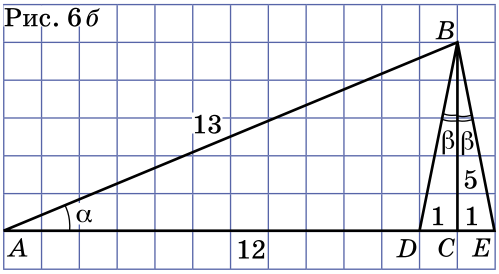


Рис. 6*б*

ники DBE и BAE – равнобедренные, у каждого углы при основании равны. Но эти треугольники имеют общий угол E при основании, то есть имеют общую пару углов. Но тогда оставшиеся углы EAB и EBD тоже равны. Так как угол EBD в два раза больше угла CBD, то $\alpha = 2\beta$.

Отметим, что условие этой задачи можно было дать без «клеточек», просто указав длины отрезков AC, AB, BC и DC. Это замечание – шаг к дальнейшему обсуждению геометрии на клетчатой бумаге, но сначала – очередная порция **задач для самостоятельного решения.**

Задача 7 (*Е.Бакаев,* XIII Московская устная олимпиада 6 – 7 классов). Найдите величину угла ACB (рис. 7).

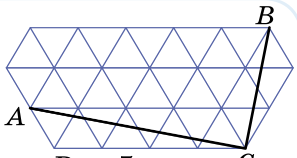


Рис. 7

Задача 8 (*Ф.Романов*, XXXIII турнир имени М.В. Ломоносова). Используя только линейку без делений, разделите отрезок AB на рисунке 8 на три равные части.

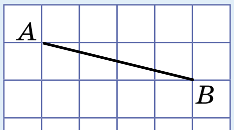


Рис. 8

Задача 9. Отметьте на клетчатой бумаге 12 точек, лежащих на одной окружности.

Задача 10 (*В.Произволов*). Дан шестиугольник $ABCDEF$ (рис. 9). Докажите, что его площадь в два раза больше площади треугольника ACE.

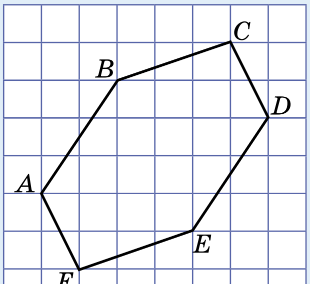
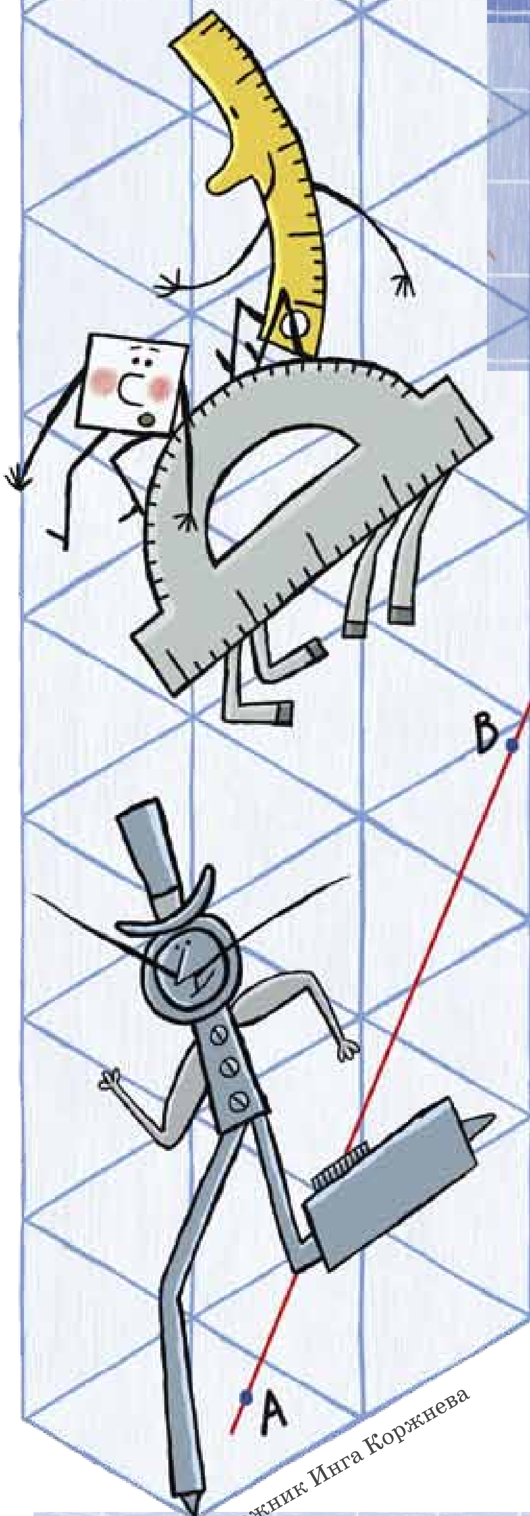


Рис. 9

Задача 11 (*В.Произволов*). Используя только линейку без делений, постройте на клетчатой бумаге квадрат, площадь которого составляет $\frac{4}{5}$ клетки.

Задача 12* (*А.Блинков*, *Ф.Романов*, Московская математическая регата, 9 класс, 2011 год). Существует ли треугольник с вершинами в узлах клетчатой бумаги, у которого центры вписанной и описанной окружностей, а также точки пересечения медиан и высот тоже лежат в узлах?



Художник Инга Коржнева