Заусенцы с завитками

Александр Бердников

Два крючка на рисунке 1 можно расположить так, что, двигая в плоскости, расцепить не получится (рис. 2).

Рис. 1

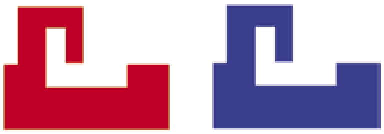
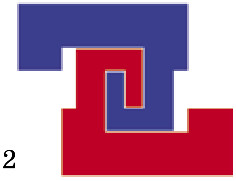


Рис. 2



Крючки можно немного видоизменить, в целом сохраняя их форму, так, что новые крючки уже можно будет расцепить (рис. 3–6).

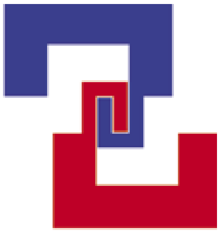


Рис. 3

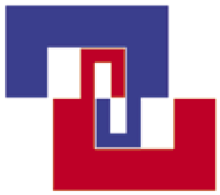


Рис. 4

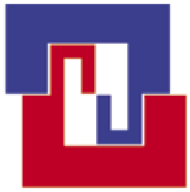


Рис. 5

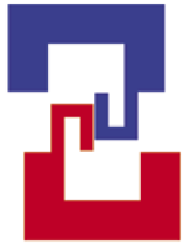


Рис. 6

Можно сделать крючки, закрученные друг вокруг друга на несколько оборотов. Но если их форма будет как на рисунке 7, то даже их можно будет расцепить.

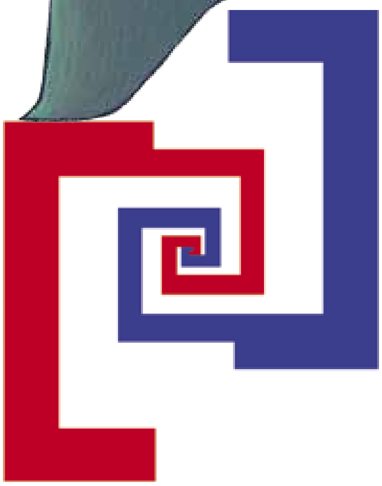


Рис. 7

А сколько нужно потребовать оборотов от закорючек друг вокруг друга, чтобы, какую бы им ни придали форму, их нельзя было расцепить?

Ответ довольно неожиданный. Какую бы планку ни установили, найдутся расцепляемые завитки, делающие друг вокруг друга требуемое число оборотов.

Попытаемся нарисовать такие крючки, начиная с центра, оба одновременно. Опыт предыдущих крючков подсказывает, к чему нужно стремиться. Нужно лишь следить всё время за тем, чтобы каждый новый виток был достаточно широк, чтобы потом, при их распутывании, пропустить предыдущий виток другой спирали.

Например, можно каждую следующую линию помещать на вдвое большее расстояние от центра, чем предыдущую. То есть линия с номером n находится на расстоянии 2^n от центра. Расчёт на рисунке 8 по-

казывает, что таких расстояний хватает с запасом. Так как эти спирали могут быть нарисованы с любым числом витков, мы получили наш контрпример. Кстати, раз просветы в витках имеют большой запас, можно сделать спираль не из бесконечно тонких ломаных, а из толстеньких палочек и сделать реальную модель.

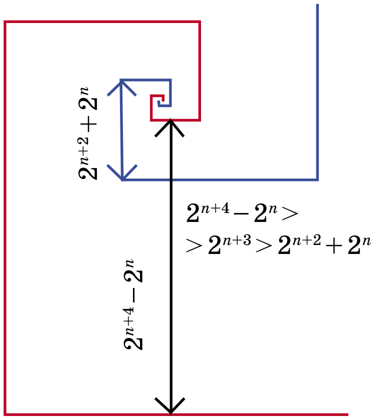


Рис. 8

Такие угловатые спирали хороши тем, что их довольно просто строить, да и доказать их «расцепимость» не так сложно. Однако есть ещё один, более сложный, пример завитков, про который хочется рассказать. Идея его состоит в том, чтобы наши ломаные спирали заменить на гладкие – логарифмические. Этого слова пугаться не надо, мы сейчас познакомим вас с этим интересным геометрическим объектом.

У наших угловатых спиралей расстояние от ребра до центра вырастало в два раза при каждом повороте на 90°. То есть у звеньев, из которых строилась ломаная, и направление, и расстояние до центра менялись скачками. Давайте попробуем эти скачки заменить равномерным движением. Для этого будем плавно двигать точку вокруг центра так, чтобы через t секунд она сделала $t/2$ оборотов вокруг центра и находилась от него на расстоянии 2^t.

Вопрос о том, что такое 2^t для нецелых t, мы оставим университетам. Скажем лишь, что если t равно отношению целых чисел p/q, то $2^t=2^{p/q}=\sqrt[q]{2^p}$.

Таким образом, точка равномерно вращается вокруг центра, удаляясь от него. После нескольких оборотов получим гладкую спираль, которая и называется *логарифмической* (рис. 9). Две такие спирали, так же, как и ломаные до этого, можно расцепить при любом числе витков.

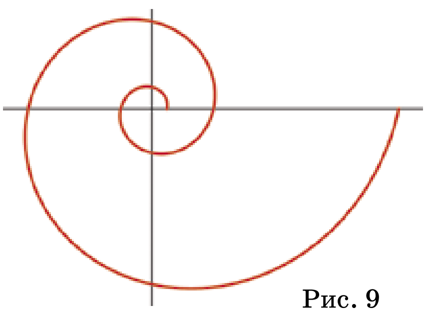
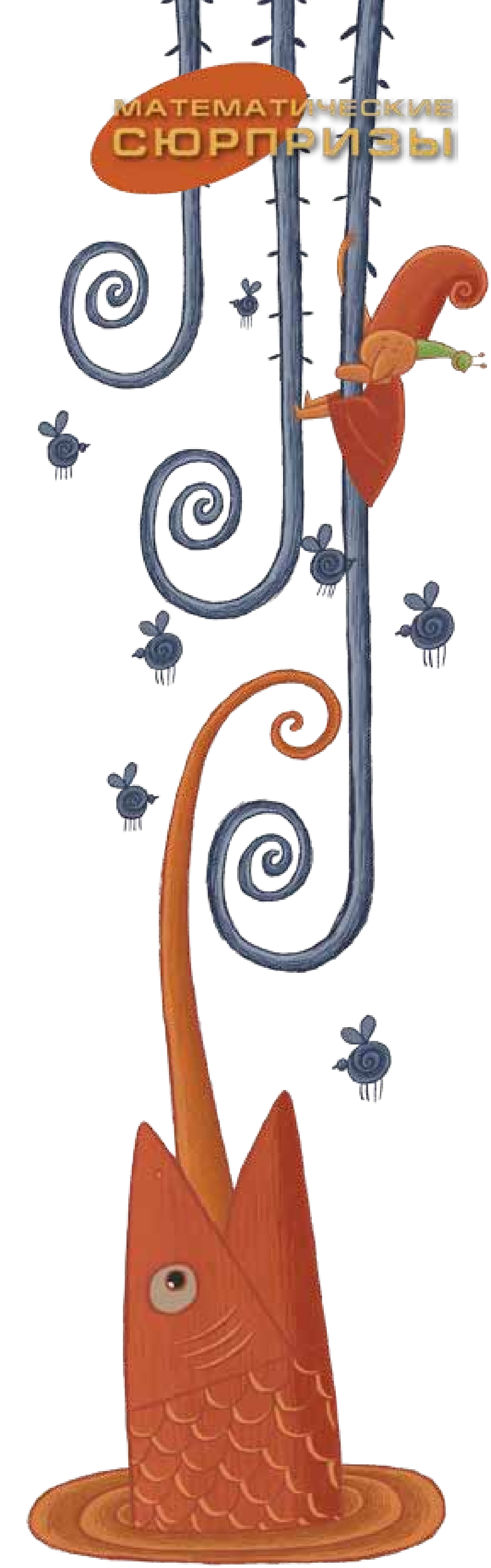


Рис. 9



Для большей эффективности продолжим спираль внутрь до бесконечности. Нужно просто крутить точку в обратном направлении, приближая её к центру (извлекая из двойки корень всё большей степени, мы получим всё меньший радиус).

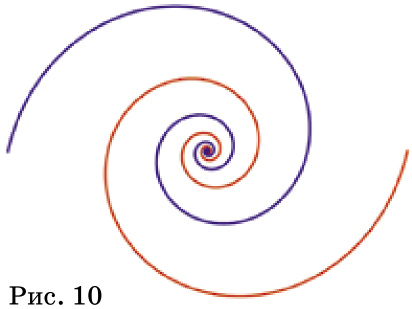


Рис. 10

Совместим центры двух таких спиралей, по-разному повёрнутых (рис. 10). Получим завитки, делающие друг вокруг друга БЕСКОНЕЧНОЕ число оборотов. Трудно поверить, но даже такие бесконечные завитки можно расцепить!

Процесс расцепления сам по себе интересный.

Заметим важное свойство логарифмической спирали: если её одновременно растянуть в 2^n раз и повернуть на $n/2$ оборотов относительно центра, то спираль перейдёт в себя (рис. 11). Почему? При её построении такое растяжение и поворот равносильны в каждый момент перемещению точки туда, где она должна оказаться только спустя ещё n секунд. То есть мы просто забегаем на n секунд вперёд при построении спирали. Но результат ведь не изменится от того, что мы его получим немного раньше. Тем логарифмическая спираль и хороша: плоскость можно так плавно растягивать и поворачивать, что спираль будет скользить вдоль себя, как скользит прямая при сдвигах вдоль неё или окружность при поворотах вокруг её центра.

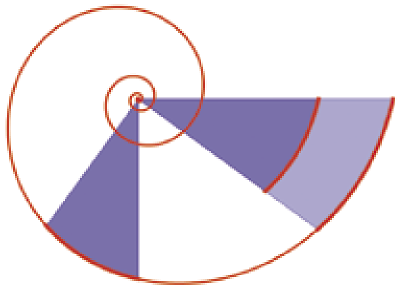


Рис. 11

Поясним это на примере поворота на пол-оборота.

Вспомним, как мы строили спираль с помощью движущейся точки. Где бы ни находилась наша точка на спирали, через пол-оборота она увеличит своё расстояние до центра в 2 раза. Поэтому если любую точку спирали отодвинуть от центра в два раза дальше, а потом просто повернуть на пол-оборота вперёд, она снова попадёт на спираль. Так можно сделать со всей спиралью сразу: растянуть в два раза и повернуть на пол-оборота – получится эта же спираль!

Из всего этого можно сделать ещё один вывод. Растянуть спираль в 2^n раз – это всё равно что повернуть её на $n/2$ оборотов в *обратную* сторону. Попробуйте вывести это самостоятельно из предыдущего свойства.

Теперь мы готовы приступить к распутыванию. Когда мы требовали, чтобы за пол-оборота спираль вырастала именно в 2 раза, а не в какое-то ещё число раз, это было не случайно. Мы подобрали форму спиралей так, чтобы они как раз вписывались друг в друга, как на рисунке 12. А теперь начнём сжимать эту картинку (центры спиралей станут сближаться), поворачивая её. При этом будем дорисовывать спирали так, чтобы они оставались постоянного размера.

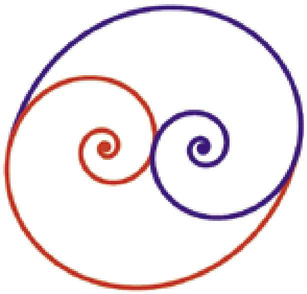


Рис. 12

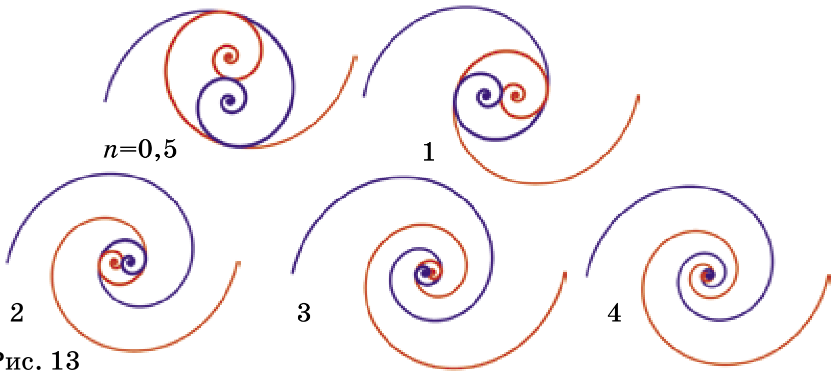
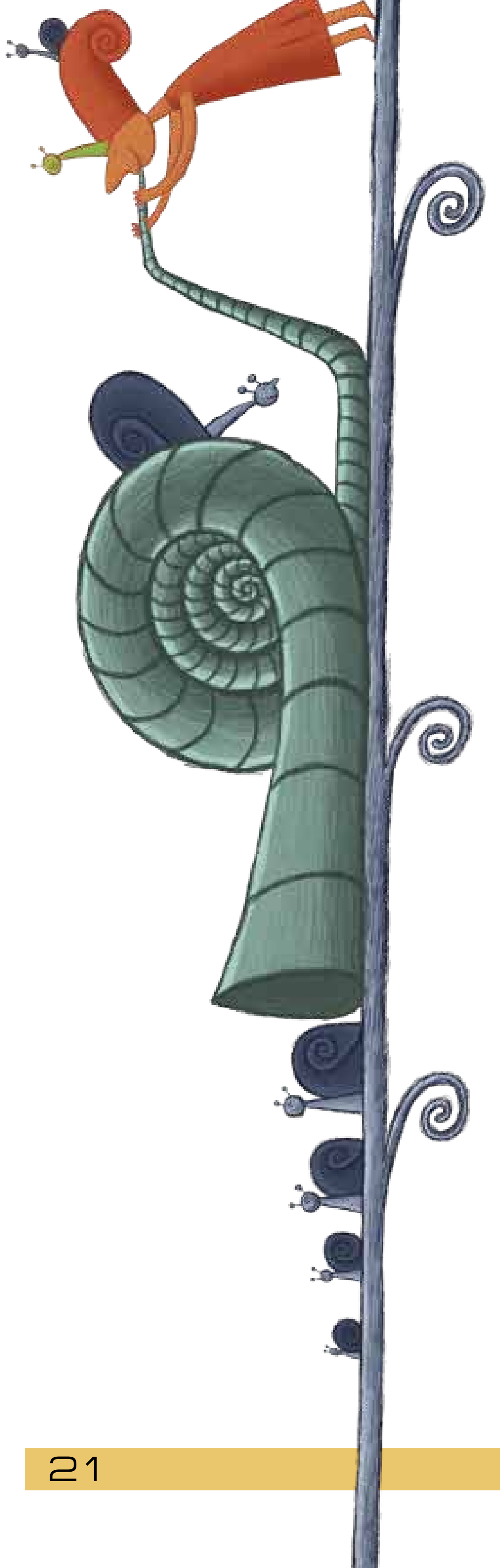
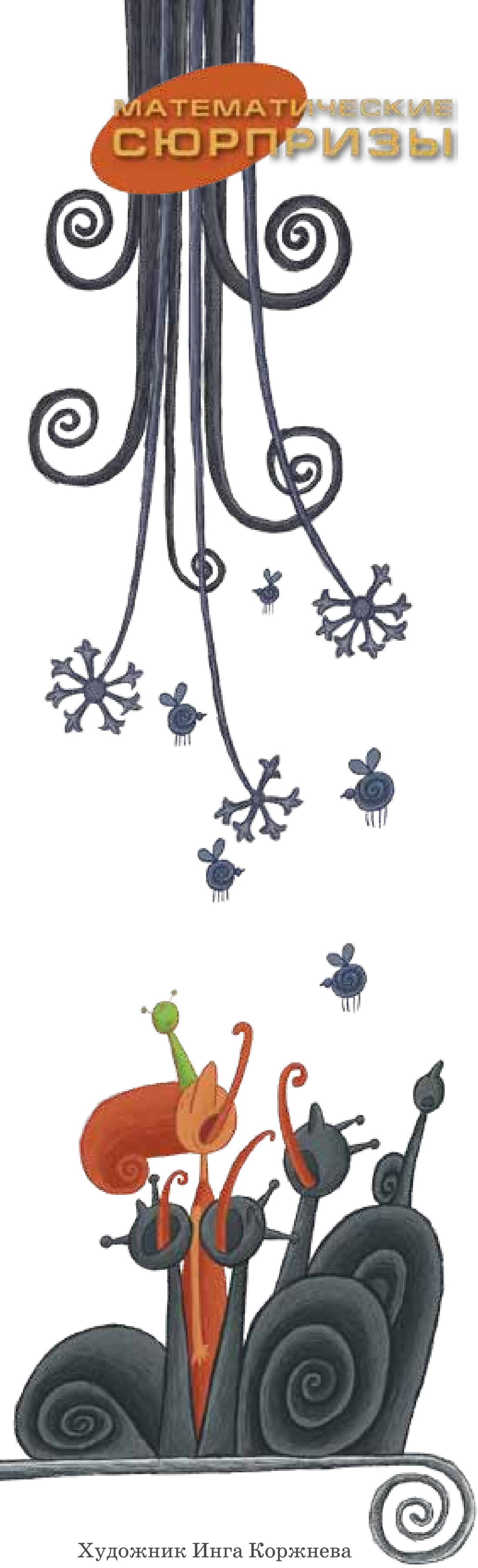


Рис. 13

Что будет происходить, если мы, сжимая картинку в 2^n раз, повернём её на пресловутые $n/2$ оборотов в обратную сторону относительно центра картинки?

Вынем на минутку спираль из плоскости, забудем, из какой точки она растёт, но не её размер и как она повёрнута. Повернув и сжав её в руках, мы, как уже говорилось, по сути её не изменим, а если вовремя дорисовывать продолжение, то не изменим совсем. Теперь можно положить её обратно в плоскость. Центр спирали был сдвинут, поэтому отложим её из нового центра. В итоге получилось, что спирали просто сдвигаются вслед за своим центром, не вертясь и не сжимаясь. Это заметно на серии картинок (рис. 13), особенно если следить за внешними концами спиралей.



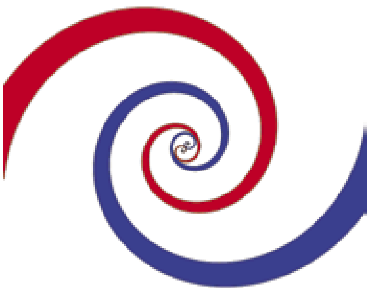


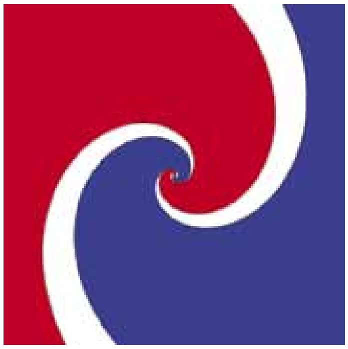
Художник Инга Коржнева

Каждый центр при этом тоже будет двигаться по аналогичной спирали, сходящейся в центр картинки. Ведь мы его двигаем как раз по правилу построения логарифмической спирали. До полного запутывания спиралей их центры сделают бесконечное число виражей. Но они это сделают за конечное время: длина «внутренней» части логарифмической спирали, по которой идёт центр, конечна (это мы доказывать не будем).

Мы научились запутывать спирали. Прокручивая процесс в обратном направлении, мы получим и распутывание («пролистайте» рисунок 13 в обратную сторону).

Зацеплять пока мы научились только бесконечно тонкие спирали, да и то с оговоркой: они касались в трёх точках. Но можно сделать спирали «покруче»: за каждые пол-оборота увеличивать расстояние до центра не в 2 раза, а больше. Они перестанут упираться друг в друга, и их можно будет рисовать не идеально тонкими, а довольно толстенькими, хоть и сужающимися к центру.





А ещё можно так же баловаться с несколькими спиралями:

Видео распутывания бесконечных спиралей вы можете посмотреть на нашем сайте kvantik.org