Ксения Пахомова

О числе 2015

До начала занятия в математическом кружке оставалось полчаса. В аудитории были пока только Лёва и Антон. Ребята бойко обсуждали свои решения задач из турнира «ПОНИ – в мире знаков».

– А ты знал, что 41° по Фаренгейту – это 5° по Цельсию? – спросил Лёва.

– Спрашиваешь! Это просто. А ты решил задачу, где с помощью чисел от 1 до 7 необходимо записать 2015? – поинтересовался Антон и пошел к доске.

На огромной доске, почти во всю ширину аудитории, появилась запись:

$$2015=\square\times(\square\times\square+\square)\times(\square\times\square+\square)$$

– Элементарно! – самодовольно ухмыльнулся Лёва. – Я разложил 2015 на простые множители: $2015=5\times13\times31$. В первый прямоугольник надо поставить пятерку. А получить 13 и 31 несложно. Попробуй сам!

Антон принялся за дело: записал произведение $5\times13\times31$ и перевёл взгляд на задачу. Недолго подумав, выписал такое решение:

$$2015=5\times(6\times2+1)\times(7\times4+3).$$

Глаза у Антона заблестели, и от внезапно нахлынувшей радости он затараторил:

– Лёва! Лёва! Слушай! Я думаю, что нам в этом году частенько будет встречаться число 2015 на олимпиадах по математике. Надо наверняка знать все его делители.

Пока Антон выписывал на доске все восемь делителей: 1, 5, 13, 31, 65, 155, 403, 2015, Лёва тихонько подошёл и записал: $13\times5\times31$.

– Смотри! – произнёс Лёва. – Красиво? Хоть справа читай, хоть слева. Всё одинаково, и запомнить легко.

– Классно! Палиндром получается. Я про числа 13 и 31 ещё кое-что знаю.

Звонкий стук мела распространялся по аудитории. На доске появилось числовое равенство: $13^2=169$.

– В обратном порядке 961. А это квадрат числа 31, – сообщил Антон.

– Неудивительно, – возразил Лёва. – Если 13 и 31 умножать сами на себя в столбик, то каждое слагаемое в одном столбике (13 и 39) будет иметь зеркальное слагаемое в другом столбике (31 и 93), и при сложении не будет переносов. Поэтому в результате получаем те же цифры в обратном порядке. Например, у чисел 2012^2 и 2102^2 цифры тоже в обратном порядке.

Дверь отворилась и стали заходить другие кружковцы. Увидев на доске «чёртову дюжину», школьники начали шумно спорить о несчастливом свойстве числа 13. Остановиться они смогли только после прихода преподавателя. Лёва и Антон договорились, что обсудят число 2015 позже. Но после занятия поговорить не получилось, и оставался только интернет.

– Привет! Я ещё нашёл интересные факты о 2015. Хочешь посмотреть? – прочитал Лёва. Это было сообщение от Антона. Лёва ответил не раздумывая:

– Хочу! Давай ты напишешь мне о своих находках, а я тебе о своих.

– Отлично, согласен. Смотри! Помнишь, мы говорили про простые числа 13 и 31? Если взять простое число 17 и число 48, каждое возвести в квадрат, а затем из большего квадрата вычесть меньший, то получим 2015. А теперь переставим цифры в этих двух числах, проделаем такие же действия и получим тот же результат: $84^2-71^2=2015$.

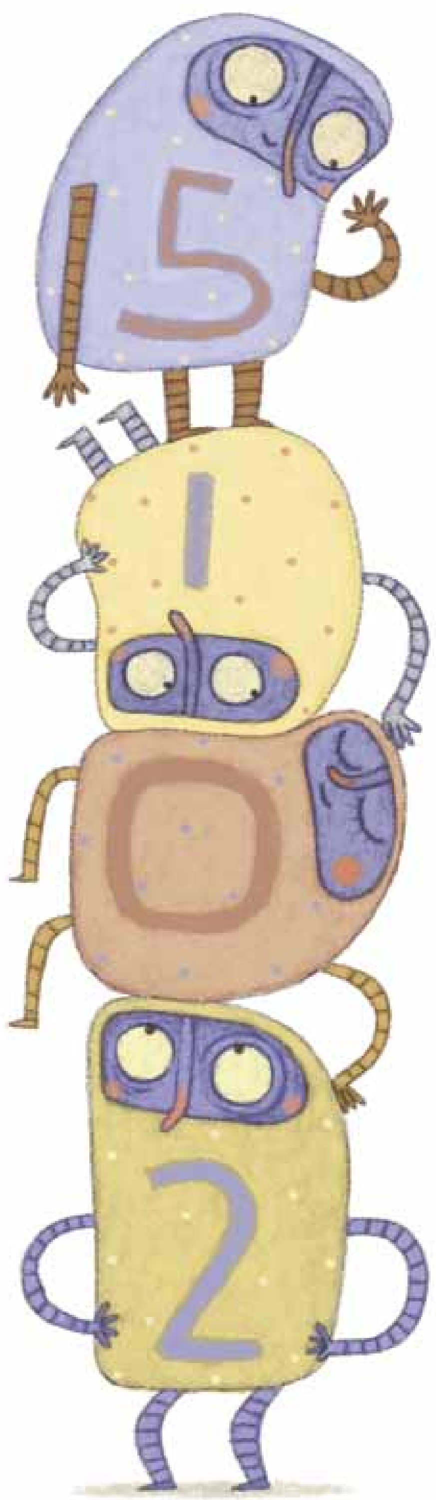
– Ишь ты! – восхитился Лёва. – А другие подобные примеры тебе известны?

– Точно таких же у меня нет. Но я пока нашёл ещё две пары чисел, где разность квадратов даёт 2015: $204^2-199^2=2015$ и $1008^2-1007^2=2015$. Последнее я даже переписал: $\left(\frac{2016}{2}\right)^2-\left(\frac{2014}{2}\right)^2=2015$.

– Да, красиво получилось!

–Смотри, как я нашёл. Записываю 2015 как разность двух неизвестных квадратов a и b: $2015=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Выходит, $(a-b)$ и $(a+b)$ – делители 2015, а мы их все уже нашли. Вот я и перебрал случаи: записываем 2015 как произведение двух множителей и приравниваем меньший к $a-b$, а больший к $a+b$. Скажем, пишем $a-b=1$, $a+b=2015$, а дальше легко: если эти два уравнения сложить, получаем $2a=2016$, а если из второго вычесть первое, получаем $2b=2014$. И сразу находим a и b.

Находка Антона показалась Лёве интересной, и ему захотелось придумать что-то подобное. Он приготовил себе чашку чая, взял тетрадь и начал рас-



суждать. На занятиях они рассматривали не только разность квадратов, но и разность кубов. «Почему бы мне не воспользоваться формулой?» – подумал Лёва. В тетради появилась запись: $a^3 - b^3 = (a-b)\times(a^2 + ab + b^2)$. «Неужели перебор чисел? – продолжал Лёва. – Должен быть более прогрессивный метод. Разность кубов равна 2015, тогда 2015 делится на $(a-b)$. Посмотрим делители...»

Чай уже давно остыл, но Лёва не мог оторваться от поиска двух замечательных целых чисел. Наконец-то они были найдены. Это обрадовало его, и он поспешил написать об этом Антону.

– Представляешь, только две пары целых чисел являются решением уравнения: $a^3 - b^3 = 2015$. Смотри: $14^3 - 9^3 = 2015$ и $(-9)^3 - (-14)^3 = 2015$. Можешь попробовать доказать. Я вот это сделал! – написал Лёва.

– Попробую, конечно. Мне в голову не приходила идея рассматривать ещё и отрицательные числа.

– А я нашёл, как записывается 2015 в двоичной системе: 11111011111, – гордо заявил Антон. – Теперь и у меня получился палиндром.

– Давай теперь какие-нибудь простенькие задачки с числом 2015 загадаем друг другу?

– Хорошо, давай.

В скором времени Антону от Лёвы пришло письмо:

«В примере вместо знаков «+» и «–» стоят звёздочки. Расставь знаки так, чтобы получилось верное равенство:

$$1006 * 1005 * 1004 * 1003 * 1002 * 1001 = 2015».$$

Лёва молниеносно решил и отправил свою задачу:

«Используя цифры от 0 до 5, знаки вычитания и умножения, запиши число 2015. А можно ли вместо вычитания обойтись сложением?»

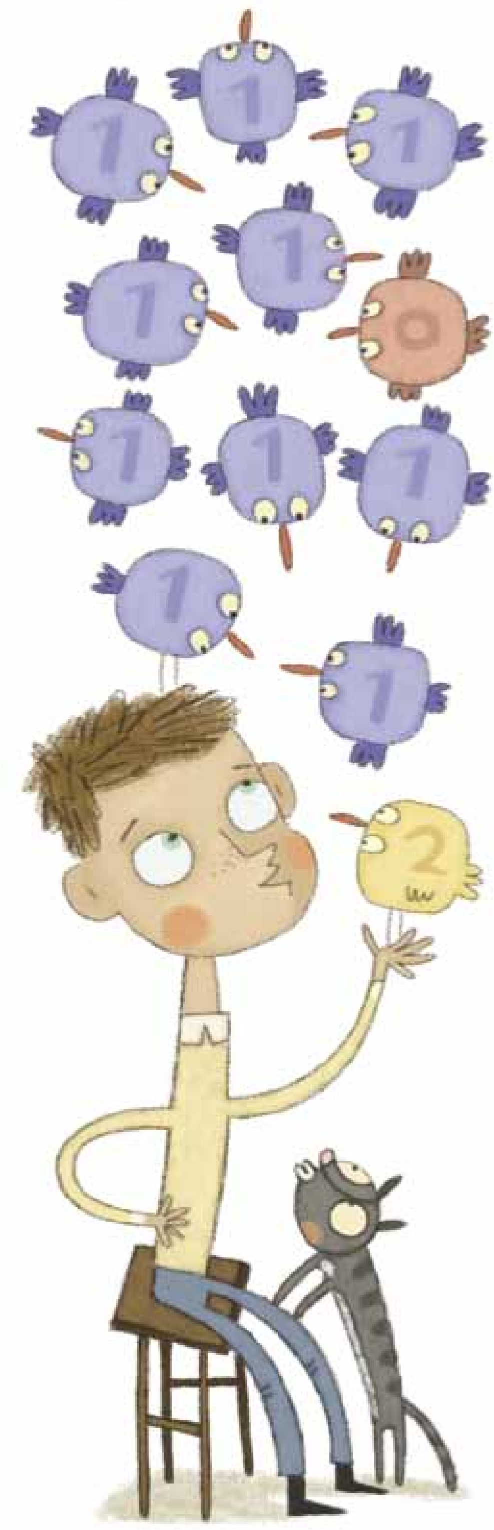
– Теперь надо поделиться своими результатами с ребятами на математическом кружке! – предложил Антон.

– Отлично! Пока! – согласился Лёва и ещё раз пересмотрел свои записи в тетради.

«Очень интересное число 2015, надеюсь, и год будет замечательным!» – подумал он и пошёл заваривать чай.

Упражнение 1. *Попробуйте и вы решить задачи Антона и Лёвы.*

Упражнение 2. *Найдите ещё какие-нибудь интересные свойства числа* 2015.



Художник Елена Цветаева