ЧЕТЫРЕ ЗАДАЧИ (Квантик № 12, 2014)

1. Доски можно положить как на рис. 1. Ширина рва, который таким способом можно преодолеть, равна $1{,}9/\sqrt{2}\cdot 3/2$, что больше 2 (для проверки возведите это неравенство в квадрат).

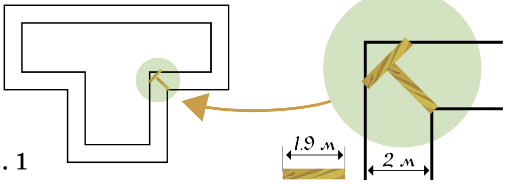


Рис. 1

2. Выпустим шар из центра прямоугольника. После каждого столкновения шара со стенкой будем симметрично отражать прямоугольник относительно этой стенки и рисовать дальнейший путь шара уже в симметричном прямоугольнике. Так как угол падения равен углу отражения, траектория шара будет превращаться в прямую линию!

Тогда, чтобы найти нужную траекторию, можно поступить наоборот. Сначала отразим прямоугольник относительно сторон несколько раз, чтобы получилась «сетка» из прямоугольников. При этом покрасим стороны исходного прямоугольника в разные цвета, а отражённые стороны будем красить в соответствующий цвет. Теперь осталось провести из центра исходного прямоугольника такую линию на сетке, которая пересечёт отрезки четырёх разных цветов и в конце впервые попадёт в точку, соответствующую лузе. «Свернув» эту линию (отражая прямоугольники обратно), мы получим нужную траекторию.

На рисунке 2 показана такая траектория, если выпустить шар из центра в направлении середины стороны одного из симметричных прямоугольников.

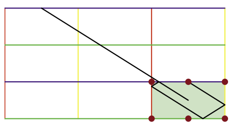


Рис. 2

3. Бутылку можно подвесить на кресте из спичек, который лежит одной перекладиной на самом краю стола, как на фото (рис. 3).

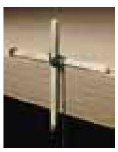


Рис. 3

4. Из часовых можно выстроить «забор», часть которого изображена на рисунке 4 (кружочки – часовые, отрезки – их поля зрения). Если такой достаточно длинный забор замкнуть вокруг штаба (часовыми внутрь), и штаб и часовые окажутся внутри, в безопасности.

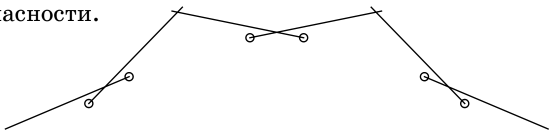
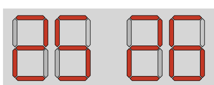


Рис. 4

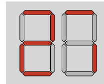
СВЕТОФОР (Квантик № 1, 2015)

Такое возможно, если на табло не работает один сегмент – правый



верхний. Тогда 25 на самом деле означает 29, а 26 на самом деле 28.

Через секунду табло покажет 27, но без одного сегмента:



Если считать, что первая цифра на табло правильная, то Квантику пришлось ждать 29 секунд.

ТАЙНА ЧЁРНОЙ ПЯТНИЦЫ

Начнём с «типового» добросовестного решения. Нетрудно убедиться, что $20+21+\ldots+27=188$, поэтому после 27-летия в коробке останется $200-188=12$ свечей, чего, конечно, не хватит для торта к следующему дню рождения. Но… 12 – это вовсе не четверть от необходимого количества свечей (т.е. от 28). Как же так?

Вот она – ловушка! Но читатель, вооружённый знаниями о високосных годах, обойдет её без проблем. Обратим внимание на то, что мисс Марпл решила выпекать торт не каждый год, а в каждый день своего рождения (в условии даже указано: ровно в 12:00). Понятия «каждый год» и «каждый день рождения» – не всегда одно и то же. Есть дни рождения, которые бывают не каждый год. Это, конечно, 29 февраля, наступающее один раз в 4 года. Ничего не остаётся, как принять гипотезу о том, что мисс Марпл родилась именно в этот день, и, кстати, это косвенно подтверждается тем, что её возраст в каждый из таких дней должен делиться на 4, а 20 как раз кратно 4.

А теперь проверим. Так как $20+24+\ldots+40=180$, то к сорокачетырёхлетию в коробке останется $200-180=20$ свечей – опять-таки не четверть от 44! Что же делать?

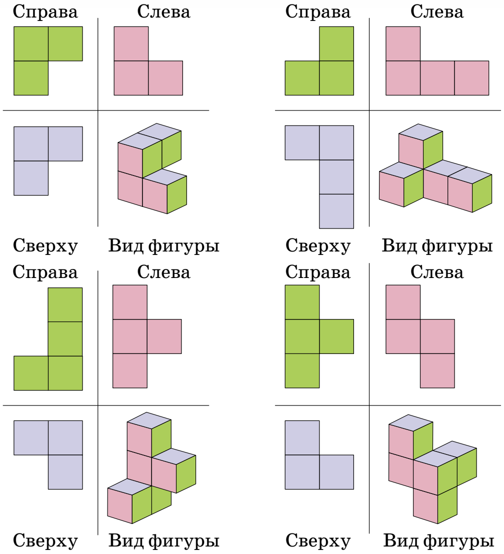
Мы не зря предупреждали, что задача содержит ловушки (во множественном числе). И здесь-то кроется вторая ловушка, основанная на том, что не каждый четвёртый год – високосный!

В условии не утверждалось, что мисс Марпл – наша современница. А раз так, то она вполне могла совершать свои хлебопекарные (или, вернее, тортопекарные) операции на рубеже веков, захватывая, скажем, тот же 1900 год, который, как мы уже знаем, не был високосным! А раз так, то в некоторых случаях это может дать дополнительные решения (ибо некоторые дни рождения могли «выпасть»). Так оно и есть.

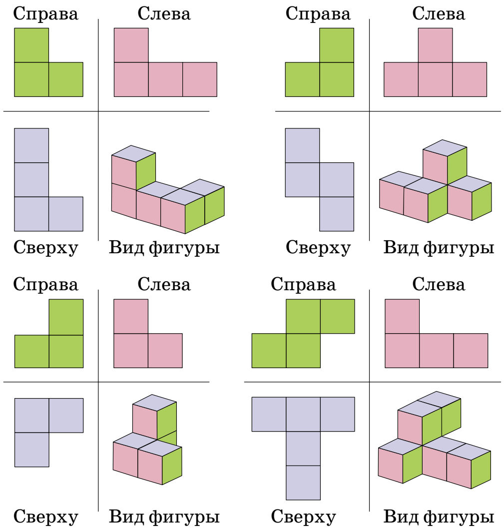
Прямой перебор показывает, что если мисс Марпл родилась в 1864 году, то в 1884, 1888, 1892 и 1896 годах она израсходовала соответственно 20, 24, 28 и 32 свечи, затем в 1900 году ей не пришлось выпекать торт (год-то невисокосный!), а после этого она в 1904 и 1908 годах затратила 40 и 44 свечи. Всего получается $20+24+28+32+40+44=188$ свечей, и потому к её сорокавосьмилетию в коробке осталось $200-188=12$ свечей – ровно четверть от требуемого количества. Всё!

ПРОЕКЦИИ ФИГУР

1.



2.

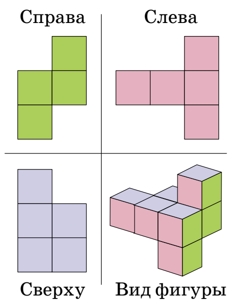


3. Да, например, кубик $2\times2\times2$.

4. Да, например, кубик $2\times2\times2$ и кубик $2\times2\times2$ без одного углового кубика.

5. 6.

6*. У любых двух проекций дожна совпадать любо высота, либо ширина. Значит, фигуры 3 и 4 не подходят – нет других фигур с размерами 1 и 4. Значит, нужные проекции – это 1, 2 и 5. Ответ:



7. Нет, этого недостаточно. Например, можно взять тот же кубик $2\times2\times2$ без одной угловой клетки. По проекциям этого кубика нельзя сказать, отсутствует кубик на верхней грани или на нижней в той же вертикали.

8. Этого оказывается тоже недостаточно. Есть много таких фигур, но догадаться до примера довольно непросто. Возьмём кубик $2\times2\times2$ и вырежем два диагональных кубика на верхней грани и два диагональных кубика на нижней грани (но по другой диагонали). Это можно сделать двумя способами, поэтому получается две разных фигурки с одинаковыми видами. Осталось сделать эти фигурки связными (чтобы они не разваливались). Просто добавим к ним одинаковую каёмку, например, заключим эти фигуры в «коробку» $4\times4\times4$.

МАЛЕВИЧ, ЕВКЛИД И КАРАНДАШ

История про Малевича верна лишь наполовину. У него действительно была знаменитая картина «Чёрный квадрат». А вот всё остальное – неправда. Ведь Малевич не мог в кромешной темноте найти чёрную краску да ещё и сделать надпись именно на теле осла. К тому же непонятно, как это ему не удавалось повторить эту картину – для этого достаточно было закрасить холст чёрной краской. И кстати, у Малевича было четыре «Чёрных квадрата».

ПАРАДОКС С ПОДОБНЫМИ ПРЯМОУГОЛЬНИКАМИ

Если мы увеличим фотографию 1×2 в одном направлении в восемь раз, в другом – в два раза, получится фотография 8×4. А если просто увеличим обе стороны фотографии 1×2 в 4 раза, получится фотография 4×8. Прямоугольники выйдут одинаковые, но рисунки на них получатся совсем разные! Во втором случае это будет тот же рисунок, что и на фотографии 1×2, только в другом масштабе. А в первом случае изображение сильно исказится. Да ещё одну из фотографий надо будет повернуть на 90 градусов, чтобы они были одинаково расположены.

81-я САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ. ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ

1. Ответ: 20.

Если на двух трёхместных скамейках сидит 5 человек, то это возможно, только если на одной скамейке сидит 2 человека, а на другой 3. Значит, Костя при подсчете учтёт в этом ряду одну скамейку. Если же на двух скамейках сидит три человека, то возможны два варианта: на одной скамейке три человека, а на другой – ноль, либо на одной скамейке два человека, на другой – один. Как видим, в обоих случаях и в этом ряду при подсчёте Костя учтёт ровно одну скамейку.

Таким образом, результат Кости равен числу рядов.

2. Каждый зелёный человечек подарил кактус кому-то из фиолетовых, а каждый фиолетовый – кому-то из зелёных. Поскольку общее число участников фестиваля нечётно, человечков какого-то цвета больше, чем человечков другого цвета. Вот кому-то из этого «большинства» и не достанется кактуса.

3. Предположим, что у каждого ребёнка сбылось либо два, либо ни одного желания. Если у ребёнка сбылось два желания, то его обидчик не получил мороженого, значит, у обидчика одно из желаний не сбылось, значит, у него оба желания не сбылись. И наоборот: если у ребёнка не сбылись оба желания, то обиженный им ребёнок получил мороженое, значит, у обиженного сбылось одно из желаний, и тогда по нашему предположению у обиженного ребёнка должны были сбыться оба желания.

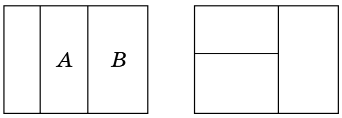
Расставим детей в две шеренги: в первую поставим всех, у кого сбылись два желания, а во вторую шеренгу поставим тех, у кого не сбылось ни одного желания, по правилу: за каждым ребёнком из первой шеренги ставим того, кто его обидел. При этом каждый, у кого не сбылось ни одного желания, найдёт себе место во второй шеренге: он будет находиться за тем, кого обидел.

Таким образом, общее количество детей должно быть чётным. По условию задачи количество детей – 99, то есть нечётно. Следовательно, предположение, которое мы сделали в первой строчке решения, не может быть верным. Таким образом, у кого-то сбылось ровно одно желание.

4. Ответ: нельзя.

Если два прямоугольника имеют общую сторону, для определённости вертикальную, то у того прямоугольника, который шире, и площадь, и периметр, и диагональ больше, чем у того, который уже. Например, на рисунке ниже прямоугольник B по этим трём параметрам больше прямоугольника A.

Очевидно, есть две различные конфигурации разрезания (см. рисунок). В обеих конфигурациях легко указать два прямоугольника, имеющих общую сторону, тогда у большего из них все три параметра – площадь, периметр, диагональ – больше, чем у второго. Это противоречит требованию условия задачи.



5. Если бы это было не так, то 40-е число в сумме с 61-м давало бы результат не больше 1000. Так как числа стоят по возрастанию, то каждое из чисел с 1-го по 40-е в сумме с 61-м давало бы результат не больше 1000. Это значит, что каждое из первых сорока чисел было в паре с каким-то числом, стоящим после 61-го. Это невозможно, так как там только 39 чисел.

6. Ответ: 105 часов.

Рассмотрим сначала случай, когда все города находятся в одном часовом поясе. Тогда суммарная длительность путешествия катера из самого нижнего города в самый верхний и обратно равна сумме длительностей упомянутых в расписании маршрутов, то есть $(15-7)+(20-7)+(22-7)=36$ часов.

Если же какие-то города, скажем A, требуют поправки на часовой пояс, то, как нетрудно видеть, в сделанном подсчёте эта поправка сокращается, потому что в этом вычислении время отправления из A и время прибытия в A присутствуют с противоположными знаками.

Итак, получилась стандартная задача: течение имеет скорость v, катер – $6v$, на дорогу туда и обратно катер потратил 36 часов, сколько потребуется плоту, чтобы проплыть от начала в конец.

Решаем её. Чтобы не возиться с формулами, сделаем пробный заплыв: пусть по течению катер проплыл 5 часов (со скоростью $7v$), тогда обратно (со скоростью $5v$) он будет плыть 7 часов, в сумме получаем 12 часов. Значит, для 36-часового рейса нужно плыть по течению 15 часов, а тогда плот поплывет в 7 раз дольше, то есть 105 часов.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ VIII УСТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ «ДВАЖДЫ ДВА»

1. Если Билли и Дилли принадлежат одному племени, то утверждения «Вилли и Дилли принадлежат к одному племени» и «Вилли и Билли принадлежат к одному племени» либо оба истинны, либо оба ложны. А Билли и Дилли либо оба говорят правду, либо оба лгут. Значит, они ответят на эти вопросы одно и то же.

Если же Билли и Дилли принадлежат разным племенам, то наоборот: какое-то одно из этих утверждений истинно, а другое ложно. Из Билли и Дилли кто-то один говорит правду, а второй лжёт. Значит, и в этом случае они ответят одно и то же!

Ответ: Дилли ответил «нет».

2. Один из возможных примеров изображен на картинке.

А	А	А	Г	Д
А	Б	Б	Б	Д
А	Б	В	В	В
Г	Б	В	Г	Г
Д	Д	В	Г	Д

3. Раскрасим все клетки двух верхних строк и двух левых столбцов произвольным образом, таких клеток 36.

Оставшиеся 64 клетки будем закрашивать по одной слева направо сверху вниз. Выбирать цвет для очередной клетки будем так: рассмотрим квадрат 3×3, в котором эта клетка является правой нижней. К этому моменту остальные 8 клеток этого квадрата уже покрашены, значит, цвет оставшейся клетки определяется однозначно (так как среди этих 9 клеток должно быть нечетное количество чёрных).

Таким образом, первые 36 клеток закрашиваются 2^{36} способами, а все последующие 64 закрашиваются однозначно.

Заметим, что при закрашивании этих 64 клеток мы перебрали все 64 квадрата 3×3, значит, действительно в каждом из них окажется нечётное количество чёрных клеток.

Ответ: 2^{36} способами.