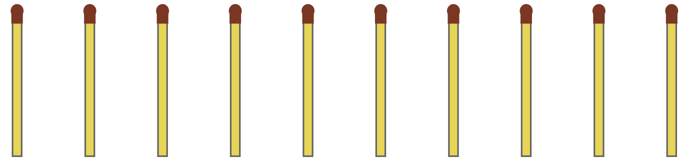
Игорь Акулич

Ломать – не строить

Сказать, что эта головоломка старая, – значит ничего не сказать. Она *очень* старая, скорее даже *древняя*. Имя её автора, к сожалению, сгинуло в глубине веков.

Итак, на столе выложено в ряд 10 спичек (для удобства они пронумерованы слева направо):

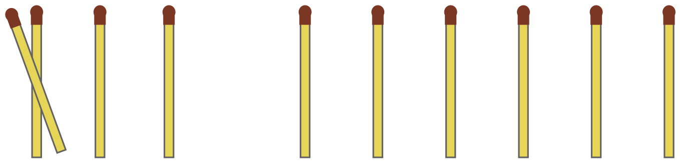


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Разрешается выбрать любую спичку, перенести её влево или вправо *через две* спички и положить после этого на стол или на другую спичку (верхнюю спичку при этом кладём под углом, чтобы получился «косой крест»). Такую операцию назовем *ходом*. Требуется за 5 ходов собрать спички в 5 пар.

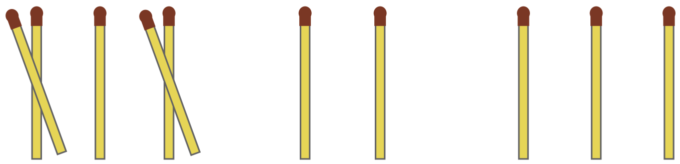
Ясно, что меньше чем пятью ходами обойтись невозможно. Однако и за 5 ходов это сделать не так-то просто – бездумное перекладывание спичек абы как, скорее всего, заведёт в тупик. Например:

1-й ход:



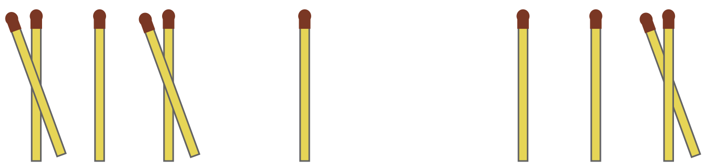
1 4 2 3 5 6 7 8 9 10

2-й ход:



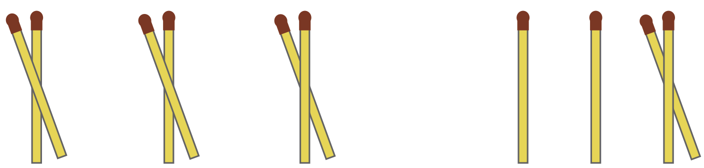
1 4 2 3 7 5 6 8 9 10

3-й ход:



1 4 2 3 7 5 8 9 10 6

4-й ход:

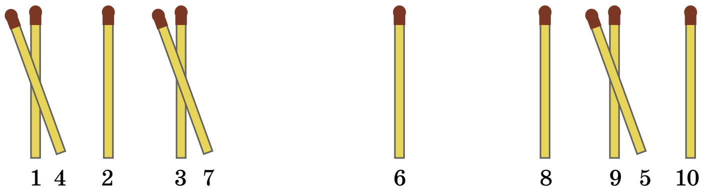


1 4 3 7 5 2 8 9 10 6

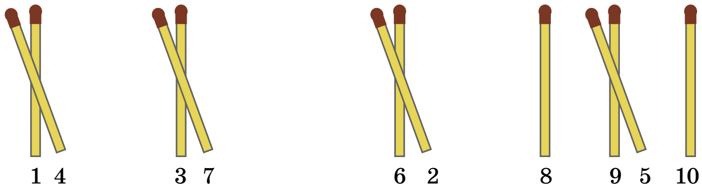
Всё – что называется, приплыли! Соединить в одну пару спички номер 8 и 9 невозможно – они лежат рядом, а должны быть разделены парой соседних спичек.

Так, может, задача вообще не имеет решения? К счастью, имеет. Сохраним в приведённом ошибочном решении первые два хода и, начиная с третьего, пойдём другим путём:

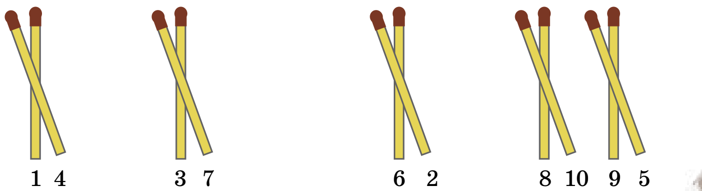
3-й ход:



4-й ход:



5-й ход:

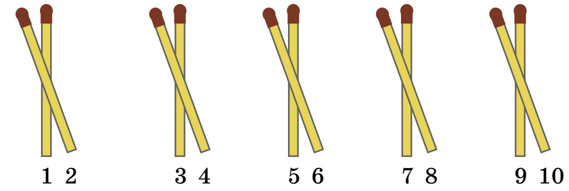


Значительно более устрашающе выглядит усложнение этой головоломки, где в ряд выложены не 10, а 15 спичек и надо укомплектовать их за 10 ходов в 5 групп по 3 спички, если переносить каждую спичку можно через 3 другие спички. Рискните! После нескольких попыток у вас может создаться впечатление, что это вообще невозможно.

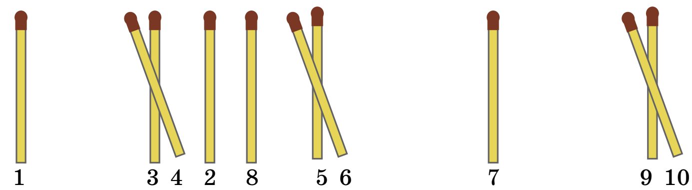
И здесь нам на помощь приходит столь же древняя, как и сама задача, народная мудрость: «Ломать – не строить: душа не болит». Давайте стартовать от итоговой конфигурации – когда спички уже собраны в пары либо тройки – и поставим перед собой цель: разрушить конструкцию, превратив её в ряд отдельных спичек. При этом каждую спичку можно, как и прежде, переносить через 2 (или соответственно 3) другие спички, после чего класть её просто на поверхность

стола. Если нам удастся провести такой «демонтаж», то, проделав затем все операции в обратном порядке, мы успешно выполним и «строительство».

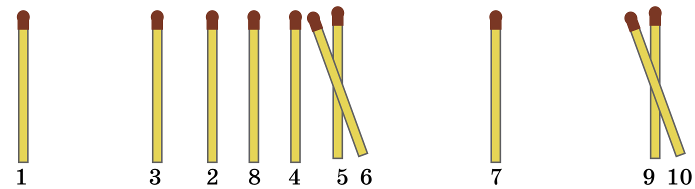
Сразу становится ясно, что такую задачу решать куда как проще (ломать – оно и впрямь не строить). Итак, рассмотрим пять пар спичек (занумеровать их удобнее по-другому – как на рисунке):



Чтобы обеспечить возможность успешного разрушения, нам надо «организовать» пару (или больше) отдельных спичек, лежащих рядом. Это проще простого: спичку номер 2 переносим через пару спичек (3, 4), а спичку номер 8 – через пару спичек (5, 6). Получится следующее:

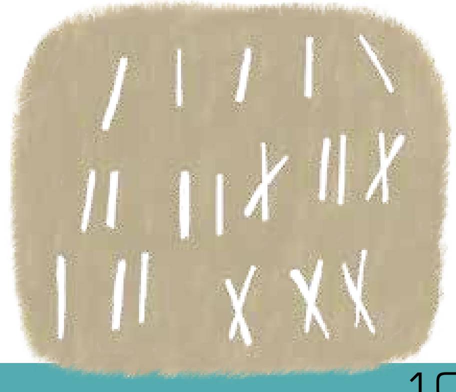


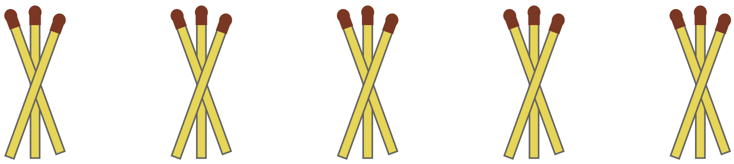
Дальше разделяем пару спичек (3, 4), используя для этого спички 2 и 8:



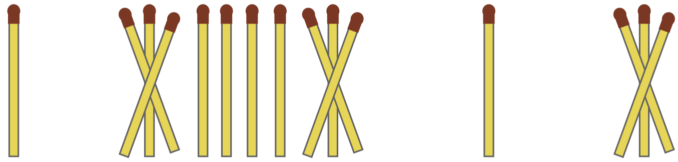
Затем очевидным образом «располовиниваем» пару (5, 6), используя для этого спички 8 и 4, а затем и пару (9, 10) посредством спичек 5 и 7. Не будем даже рисовать – и так всё ясно. А дальше – включаем задний ход, и собираем из 10 отдельных спичек 5 пар по 2 спички, что от нас и требовалось.

Ничуть не сложнее ситуация с пятью тройками спичек:





Здесь вторую и третью слева тройки спичек используем для разрушения первой и четвёртой троек. Получим следующее:



Далее, используя образовавшуюся группу из отдельных спичек, разрушаем вторую и третью тройки, а потом уже и пятую (как это сделать – вполне очевидно).

Задача допускает естественное обобщение, в котором в ряд выложено kn спичек, и требуется, каждый раз перенося спичку через n других спичек, сложить их в k групп по n спичек. Какое минимальное число ходов для этого потребуется? Так как в каждой из групп одна спичка (самая нижняя) уже лежит на месте, то сверху на неё надо положить $n-1$ спичек, и потому всего потребуется никак не меньше $k\,(n-1)$ ходов.

Но тогда возникает другой вопрос: а при каком *наименьшем* k задача разрешима? Найдите самостоятельно ответ на этот вопрос. Между прочим, известный популяризатор математики Б.А. Кордемский, также упоминающий в своей «Математической смекалке»[1] рассмотренную нами задачу, утверждает буквально следующее: «...для составления групп по n спичек в каждой путём перекладывания каждой спички через n других спичек необходимо $5n$ спичек». То есть Кордемский полагает, что минимальное значение k равно 5. Попробуйте подтвердить или опровергнуть его гипотезу.

И ещё один вопрос: при каком наименьшем k перекладка возможна, если не требовать, чтобы результат был достигнут ровно за $k(n-1)$ ходов (а допускается большее их количество)?

[1] 3-е издание, Москва, ГИТТЛ, 1956, стр.38-39.

Художник Инга Коржнева