«НАШ КОНКУРС» («Квантик» №9)

41. *Средний возраст 11 игроков футбольной команды равен 22 годам. Во время матча один игрок получил травму и ушёл с поля. Средний возраст оставшихся на поле игроков стал равен 21 году. Сколько лет футболисту, получившему травму?*

Ответ: 32 года. Средний возраст – это сумма всех возрастов, делённая на количество людей. Значит, суммарный возраст всех одиннадцати футболистов равен $22 \cdot 11 = 242$ годам. А суммарный возраст оставшихся десяти равен $21 \cdot 10 = 210$ годам. Получается, что возраст ушедшего с поля футболиста равен $242 - 210 = 32$ годам.

42. *У окна стоят четыре девочки (см. рисунок). Каких двух девочек надо попросить повернуться, чтобы выяснить, истинно ли такое утверждение: «Если девочка без очков, то у неё в волосах бантик»?*

Ответ: должны повернуться две центральные девочки. Утверждение «если девочка без очков, то у неё в волосах бантик» неверно в том случае, когда среди этих девочек есть хотя бы одна без очков и без бантика. Таковыми могут оказаться две центральные девочки, их и надо попросить повернуться.

43. *а) Можно ли в таблице размером 6×6 расставить числа так, чтобы сумма четырёх чисел в каждом квадрате 2×2 была отрицательной, а сумма всех чисел таблицы – положительной?*

б) Решите ту же задачу для таблицы 5×5.

Ответ: а) нет: б) да.

а) Нельзя. Разделим квадрат 6×6 на девять квадратиков 2×2. Если бы в каждом из них сумма чисел была отрицательной, то она была бы отрицательной и во всём квадрате.

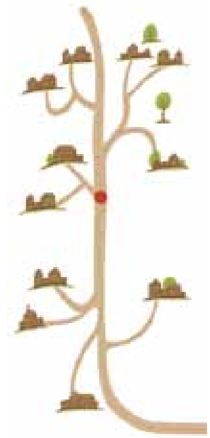
б) Можно. Например, расставим в квадрате 21 единицу и четыре числа «–4» так, как показано на рисунке. Тогда в каждом квадрате 2×2 сумма чисел будет равна $3 - 4 = -1$, то есть отрицательной, а сумма во всей таблице будет равна $21 - 4 \cdot 4 = 5$, то есть положительной.

1	1	1	1	1
1	–4	1	–4	1
1	1	1	1	1
1	–4	1	–4	1
1	1	1	1	1

Есть и много других примеров, например, расставленные в шахматном порядке 13 чисел «100» и 12 чисел «–101»:

100	–101	100	–101	100
–101	100	–101	100	–101
100	–101	100	–101	100
–101	100	–101	100	–101
100	–101	100	–101	100

44. *От шоссе отходят несколько дорог к сёлам (см. рисунок). Укажите на шоссе точку, в которой нужно расположить автобусную остановку, чтобы сумма расстояний от неё до сёл (по дорогам и шоссе) была наименьшей.*



Искомая точка отмечена на рисунке красным.

Предположим, что мы стоим на шоссе в некой точке A, которая находится сверху от красной точки. Тогда в направлении от A к красной точке (и дальше) находятся хотя бы 6 сёл, а в обратном направлении – не более 5 сёл. Сдвинемся в сторону красной точки до ближайшего перекрёстка B – пусть расстояние до него равно s. Тогда мы хотя бы к 6 сёлам приблизимся на расстояние s, и не более чем от 5 сёл удалимся на расстояние s. Значит, сумма расстояний от точки B до сёл будет хотя бы на s меньше, чем от A. Теперь сдвинемся к следующему перекрёстку, и так далее, пока не дойдём до красной точки – сумма расстояний будет всё время уменьшаться!

Аналогично разбирается случай, если A находится ниже красной точки. Значит, красная точка искомая.

45. На плоскости дана точка.

а) Нарисуйте на плоскости несколько кругов так, чтобы они не соприкасались ни с точкой, ни друг с другом, но «заслоняли» точку, то есть чтобы любой луч, выходящий из точки, упирался бы в один из кругов.

б) Какое наименьшее число кругов для этого потребуется?

а) Пример показан на рисунке 1.

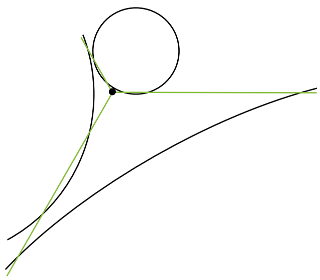


Рис. 1

Проведём из нашей точки три луча под равными углами друг к другу. Эти лучи разделят плоскость на три части – три угла, меньших развёрнутого. Нарисуем первый круг так, чтобы он не задевал точку, но пересекал два из трёх лучей. В результате одна из частей окажется заслонённой. Второй круг нарисуем дальше и так, чтобы он не касался точки и первого круга, но пересекал бы другую пару лучей. Так ещё одна часть окажется заслонённой. Аналогично нарисуем третий круг. В результате любой луч, выходящий из нашей точки, упрётся в один из кругов.

б) **Ответ:** 3 круга.

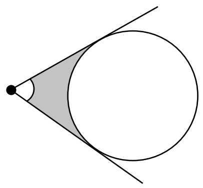


Рис. 2

Лучи, выходящие из точки и упирающиеся в один из кругов, образуют угол, величина которого меньше 180° (это видно из рисунка 2). Так как сумма двух углов, меньших 180°, будет меньше 360°, два круга не смогут «заслонить» точку. Пример с тремя кругами приведён в предыдущем пункте.

КРУГ И ДЫРКА («Квантик» №10)

Идея решения – «выпрямить» дырку, то есть сложить лист так, чтобы дырка превратилась в щель в виде отрезка. Длина окружности-дырки равна $8\pi \approx 25{,}1$ см, поэтому длина идеально «распрямлённой» дырки будет вдвое меньше, около 12,5 см, и диск должен в неё пройти. Но на практике выпрямить дырку не так-то просто.

Если лист с дыркой очень легко гнётся (как ткань) или диаметр дырки немного больше (например, 9 см), можно просто положить диск в складку на дырке (рисунок 1а) и развести края в стороны (рисунок 1б). Дырка частично распрямится, и диск легко в неё проскользнёт.

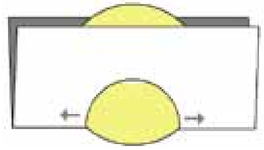


Рис. 1а

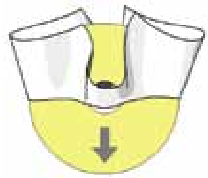


Рис. 1б

Если же диаметр дырки равен 8 см, то, действуя, как показано на рисунке 1, мы можем порвать бумагу. Чтобы этого не случилось, можно заранее аккуратно «выпрямить» дырку, например, как показано на рисунке 2. Синие уголки на рисунке 2а сгибаем внутрь и получаем что-то вроде цилиндра из красных полосок с уголками внутри. Если аналогичным образом просовывать диск в такой цилиндр (рисунок 2б), лист уже не будет рваться, и диск свободно проскользнёт в дырку.

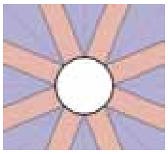


Рис. 2а

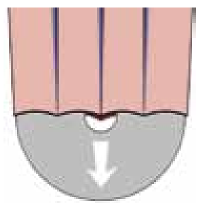


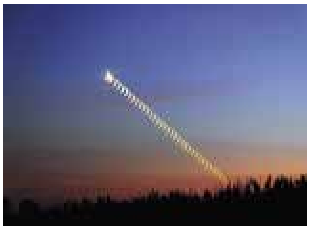
Рис. 2б

ГЛАЗА ЦВЕТА НЕБА

1. Дальние облака краснеют по тем же причинам, что и закатное солнце. Любопытно, что верхняя часть облака краснеет при его отдалении, а низ облака (тоже практически бесцветный вблизи) синеет. Так происходит потому, что низ у облака темнее, и его цвет определяет синева воздуха перед ним (как в случае с горами на иллюстрации на странице 2), а не кремовый цвет самого облака.

2. Чтобы солнце приобрело густой красный цвет, нужно основательно приглушить все остальные цвета. При этом, естественно, яркость сильно падает, так что, бывает, на такое солнце можно не щурясь смотреть.

Если подобную процедуру провести с луной, она, будучи и так не очень яркой, станет совсем тусклой. К тому же, подойдя к горизонту, луна, скорее всего, за чем-нибудь скроется от глаз. Солнце в такой ситуации «выручают» небо и облака, которые оно освещает красным. Так что луна краснеет, как солнце, просто мы на неё в это время не обращаем внимания.



Луна, приближаясь к горизонту, выглядит всё краснее. Фото: Thomas Bresson.

3. При затмении на луну попадают только преломлённые земной атмосферой солнечные лучи, а они по пути теряют все оттенки кроме красных. Вот луна и подсвечена красным. Она, образно говоря, наблюдает закат/восход солнца почти по всей поверхности Земли сразу.

В отличие от заходящей луны, луна при затмении выглядит красной в том числе из космоса, а не только из-под толщи нашей искажающей свет атмосферы.

ПОЖАР НА ОСТРОВЕ

Туристы немного отошли от обрыва в сторону огня, затем развернулись в сторону обрыва и подожгли траву впереди себя (сделали второй фронт огня параллельно первому). Ветер погнал огонь в сторону обрыва, и через некоторое время (до того, как пожар добрался до туристов) трава выгорела. Туристы перешли на выжженную землю и оказались в безопасности.

ЛОМАТЬ – НЕ СТРОИТЬ

Сначала ответим на первый вопрос: при каком наименьшем k можно разложить kn спичек в k групп по n спичек за $k(n-1)$ ходов?

Наименьшее значение k равно 4, то есть Б.А. Кордемский на это раз немного промахнулся. Как видим, и у корифеев бывают оплошности.

Как мы поступили и ранее, будем решать обратную задачу, превращая k групп по n спичек в лежащие по отдельности kn спичек. Принцип действий здесь точно такой же, как и в рассмотренной нами проблеме с пятью тройками спичек. А именно, рассмотрим четыре самые левые группы по n спичек. Используя вторую и третью группы, разукомплектуем очевидным образом первую и четвертую группы. В результате между 2-й и 3-й группами появятся подряд лежащие $2(n-1)$ спичек. При $n \geqslant 2$ это значение заведомо не меньше n. Поэтому в дальнейшем эту образовавшуюся совокупность из отдельных спичек используем для разрушения остальных групп спичек (сначала ближайших, потом – отдалённых). Понятно, что для любого $k \geqslant 4$ мы своего добьёмся.

А вот для $k \leqslant 3$ задача неразрешима. Почему? Для $k = 1$ мы не сможем сделать даже самый первый ход – ведь каждую спичку надо переносить через n других спичек, а у нас общее количество этих самых других спичек равно $n-1$, то есть меньше n.

Если $k = 2$, то мы имеем изначально 2 группы по n спичек. В силу симметрии можно начать снимать спички с любой из них, например – с левой. И что же мы получим? Единственные доступные для нас действия – это $n-1$ раз подряд перекладывать по одной спичке из левой группы через правую, пока в левой группе не останется единственная спичка, при этом справа будет лежать $n-1$ отдельных спичек. А убрать хотя бы одну спичку из правой группы мы *вообще не сможем*! Конечно, если и последнюю спичку левой группы перенести через правую, то можно и правую группу разрушить, но мы тогда не сможем соблюсти минимальное количество ходов, в данном случае равное $2(n-1)$ – ведь для наименьшего числа ходов при разрушении любой группы последнюю оставшуюся в ней спичку переносить нельзя!

Если же $k = 3$, то есть два варианта, какую группу разрушать первой: среднюю или какую-либо из крайних. Если среднюю, то после первой же переложенной спички (куда бы она ни «направилась» – вправо или влево) мы не сможем разрушить никакую из крайних групп. Придется и дальше разрушать среднюю группу, пока в ней не останется единственная спичка, и на этом всё – тупик. Ну, а если крайнюю (скажем, левую), то опять-таки после первой же переложенной спички мы никак не сможем приступить к разрушению средней или правой группы. Вновь безвыходное положение!

Теперь ответим на второй вопрос: при каком наименьшем k перекладка возможна, если не требовать, чтобы результат был достигнут за минимальное возможное число ходов?

Здесь ответ прост: даже если допустить лишь один дополнительный ход (то есть разрешить выполнить $k(n-1)+1$ ходов), то перекладку можно выполнить для любого $k \geqslant 2$.

Ясно, что для $k = 1$ это невозможно (доказательство чему см. в ответе на первый вопрос). Если же $k \geqslant 2$, то сначала перенесем все n спичек из самой левой группы через вторую слева группу (что как раз потребует одного «сверхлимитного» хода). А далее, используя n отдельных спичек, лежащих подряд, разрушаем и все остальные группы.

О ПОЛЬЗЕ РЕКЛАМЫ

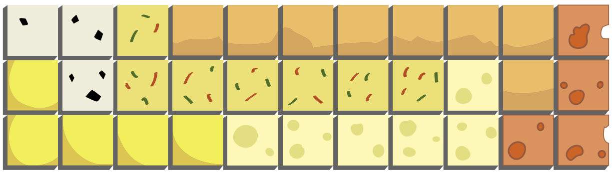
■ Сумма цифр от 0 до 9 равна 45, поэтому равенства не получится. Слева и справа от знака равенства должны получиться одинаковые суммы, а для этого надо общую сумму разделить пополам. Однако 45 разделить пополам нацело невозможно.

■ – Фирма даёт гарантию своим термосам на 24 часа. Как же вы с другом за 15 минут убедились в обмане? – спросил судья Лизу

– Очень просто, – пояснила Лиза. – Мы налили в термос горячий кофе, а потом положили туда ещё и мороженое. Через 15 минут заглянули в термос – ни того, ни другого, а только какая-то непонятная едва тёпленькая серая жидкость.

Судья посмотрел прилагавшийся к термосу рекламный проспект и убедился, что там не сказано, что в термосе нельзя хранить одновременно холодное и горячее. Поэтому он присудил победу нашим друзьям.

СЛОЖИТЕ ПРЯМОУГОЛЬНИК



ДОНАЛЬД КНУТ

$$\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{x^2}{2}}$$

ПОПАСТЬ В ТОЧКУ

Как видим, Бусенька каждый раз делит промежуток, содержащий день рождения, на две половины. И независимо от ответа собеседника выбирает нужную половину для следующего вопроса.

Например, для первого вопроса она поделила весь год на зиму-лето и весну-осень. Ушася случайно выбрал нужную половину, и Бусенька просто подтвердила его выбор. Чтобы задать следующий вопрос, она эту половину тоже поделила на две части, и так далее. (Впрочем, один раз Бусенька поделила временной промежуток на три части – так было удобно по календарю.) Если собеседник выбирает часть «неправильно», Бусенька с помощью хитрости навязывает друзьям оставшуюся часть, и у них создаётся ощущение правильного выбора. Действуя так, Бусенька всегда может за 9 вопросов позволить друзьям «угадать» любую дату.

Упражнение для самопроверки. Пусть Бусенька задумала целое число от 1 до 1000. Как узнать это число, задав ей всего 10 вопросов на «да» и «нет».

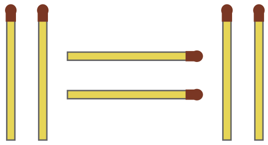
КУНЬЛУНЬ, КРЫЛОВ И АЛЕХИН

История про Алехина. Поля g9 не бывает, Капабланка не знал русского языка. И кроме того, матч вёлся до 6 побед, поэтому ничья не могла дать Алехину чемпионского титула.

КАК МОЖНО МЕНЬШЕ

Задача 1

Ответ вроде бы очевиден – переносим одну спичку из левой части в правую и получаем равенство:

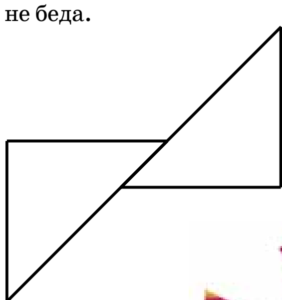


Казалось бы, меньше невозможно. Однако... всё-таки возможно.

Правильный ответ: ни одной! Если рассматривать крайние спички в левой части равенства как обозначение абсолютной величины, то данное равенство принимает вид: $|1|=1$, которое уже верно, так чего там ещё перекладывать?

Задача 2

Данная задача – ловушка для тех, кто подсознательно считает, что «равносторонний» – это то же самое, что и «правильный». Между тем это, очевидно, далеко не одно и то же. И правильный ответ таков: *два*. Ясно, что меньше невозможно. А как обойтись двумя – покажем. Возьмем два одинаковых прямоугольных треугольника со стороной катета, равной 1. Гипотенуза тогда равна $\sqrt{2}$. Теперь приложим треугольники друг к другу гипотенузами, но не по всей длине, а лишь по отрезку длиной $(\sqrt{2}-1)$. То, что получится, очевидно, и является равносторонним шестиугольником с длиной стороны 1. Правда, он невыпуклый, но это не беда.



Понятно, что аналогичным образом можно использовать вообще два одинаковых *равнобедренных* треугольника, у которых основание больше боковой стороны.