Дмитрий Кохась,
Константин Кохась

КАК БУСЕНЬКА УЧИЛАСЬ УМНОЖАТЬ НА ОДИННАДЦАТЬ

Бусенька шла по лесу и неожиданно почувствовала что-то необычное. Вернее сказать, не почувствовала, а унюхала. Запах был слегка кисловатый и немного страшный, с лёгкими цветочными оттенками. Бусенька подозрительно осмотрелась, ещё раз принюхалась и с громким визгом бросилась к ближайшей берёзе. За берёзой послышалось шуршание, потом урчание, и из-за ствола выглянула симпатичная, но очень зубастая голова какого-то чудища. Монстропитек!

– А, Горгулий, это ты. А я уж испугалась, – облегчённо вздохнула Бусенька.

– Да, это я, извините, – приветливо ответил Горгулий. – Не хотел вас пугать, но по-другому просто не умею. Мы, монстропитеки, ужасно страшные.

– Да уж, – согласилась Бусенька. – Но вы ещё при этом, как я знаю, очень умные.

– Ужасно умные, – подтвердил Горгулий, – а ещё мы ужасно вежливые.

– Расскажи, Горгулий, как вы, ужасно умные и вежливые монстропитеки, обычно умножаете числа на 11, – попросила Бусенька.

Горгулий поморщился. От этого пасть его слегка приоткрылась и стало видно, что во рту у него не два, а скорее три ряда ужасно острых зубов. Или даже больше.

– Не очень-то мы любим умножать на 11, – сказал Горгулий. – Мы вообще не очень любим умножать. Мы предпочитаем делить.

– Но ведь умножение – это очень полезная операция, – не смотря на зубы, возразила Бусенька.

– Полезная. Но деление всё равно лучше. Чтобы умножить число на 11, мы поступаем так. Сначала мы его делим на 9.

– Делите? На 9?

– Да, на 9. Причём деление мы выполняем с точностью до двух знаков после десятичной запятой. Обратите внимание, мы не округляем частное, а просто отбрасываем все последующие знаки.

– И при чём тут умножение на 11? – не поняла Бусенька. – При умножении на 11 число должно увеличиться, а вы делите – значит, оно уменьшается.

– Нет, вы меня сначала дослушайте, – сказал Горгулий. – Я же описал только самый первый шаг. Давайте я лучше буду объяснять на примере. Что вам умножить на 11?

– Умножь мне 25 на 11.

– Хорошо. Первое действие я вам уже объяснил: делим 25 на 9 с двумя знаками после запятой, получаем $25:9=2{,}77$.

Теперь второе действие: запоминаем целую часть. В нашем случае это 2. Дальше третье действие: берём частное и записываем его без десятичной запятой. Получается 277. И наконец, последнее, четвёртое действие – вычитаем из этого результата целую часть, которую мы запомнили на втором шаге. Получилось 275!

– Не может быть, – сказала Бусенька, вытаращив свои и без того немаленькие глазки. – Это какое-то шаманство!

– Это наиужаснейшее монстрошаманство! – гордо подтвердил Горгулий. – Но вы можете и сами попробовать.

– Хорошо. Умножим 90 на 11. Для этого сначала делим 90 на 9 – получается 10. Дальше ...

– Нет-нет, – вмешался Горгулий, – нужно оставить два знака после запятой. У вас разделилось нацело, значит, после запятой нули. Получается 10,00.

– Ага, 10,00. Целая часть – это 10. Теперь пишем предыдущий результат без запятой – 1000 – и вычитаем целую часть, которую запомнили, то есть 10, получается 990. Вау!!! А на другие числа вы тоже так странно умножаете?

– Во-первых, не странно. Во-вторых, умножаем и на другие числа. Это любой монстропитёнок умеет.

– Умножь мне 1000 на 137!

– Запросто. Делим 1000 на 73 с четырьмя знаками после запятой…

– На 73? – недоверчиво залепетала Бусенька. – С четырьмя знаками??

– С четырьмя, с четырьмя. $1000:73=13{,}6986301\ldots$ Оставляем четыре цифры после запятой, получается

13,6986. Целую часть запоминаем – это 13.Пишем частное без запятой – получается 136 986. Прибавляем к этому результату целую часть, увеличенную на 1, т.е. 14. Итого 137 000. – И Горгулий улыбнулся во все свои три ряда зубов, при этом ужасно радостно подмигнув Бусеньке.

Бусенька временно лишилась дара речи. Воздух ушёл из лёгких и сил оставалось только на частое моргание. Но наконец она всё-таки пересилила себя и спросила:

– И на 17 вы тоже *так* умножаете?

На этот раз монстропитек почему-то смутился. Он посмотрел сначала направо, потом налево, потом опять куда-то направо и произнес:

– Ну, ээээ… в общем-то тоже *так*.

– И сколько же будет, если 2 умножить на 17?! – с победными интонациями спросила Бусенька.

– Поделим 2 на 588 235 294 117 647 с шестнадцатью знаками после запятой… – стал уныло объяснять Горгулий…

ВЕЖЛИВЫЕ ГОСТИ

Хотя Горгулий и утверждает, что не любит умножать…

– Да, я так утверждаю! Ужасно не люблю умножать!

...Но незаметно для читателя он всё-таки выполнил одно умножение. В своём первом вычислении он умножил число на 100 в тот момент, когда отбросил десятичную запятую у промежуточного результата.

– Нет-нет, это не считается! Какое же это умножение. Это вычёркивание запятой!

Разберём подробнее, что делает Горгулий. Пусть ему нужно умножить число n на 11. Вместо этого он вычисляет число $\frac{n}{9}$ с двумя знаками после запятой. Давайте пока не будем отбрасывать остальные знаки, но вычислим это частное полностью и при этом будем иметь в виду, что в дальнейшем в дело пойдут только два знака. Целую часть результата, то есть число $\left[\frac{n}{9}\right]$, Горгулий предлагает запомнить.

– Правильно! Именно так я предлагаю! Невелик труд запомнить $\left[\frac{n}{9}\right]$.

Дальше Горгулий отбрасывает десятичную запятую, а мы получим тот же результат, если вместо этого *передвинем* запятую на две позиции вправо, т.е. умножим число на 100 и возьмём у полученного результата целую часть, чтобы отбросить, наконец, лишние цифры. Что там за хруст? Кажется, кто-то забыл, что вежливые гости никогда не грызут ножку стола! Таким образом, мы умножили $\frac{n}{9}$ на 100 и после этого вычислили целую часть. Значит, у нас (и у Горгулия) получилось число $\left[\frac{100n}{9}\right]$. Наконец, последним действием Горгулий вычитает из этого результата число $\left[\frac{n}{9}\right]$, которое мы запомнили ранее. Итак, окончательный результат его действий: $\left[\frac{100n}{9}\right]-\left[\frac{n}{9}\right]$.

– Да-да, всё именно так и есть, – сказал Горгулий, высунувшись из-под стола. – Вы прекрасно уловили суть.

Спасибо, монстрик. Преобразуем полученное выражение:

$$\left[\frac{100n}{9}\right]-\left[\frac{n}{9}\right]=\left[\frac{99n+n}{9}\right]-\left[\frac{n}{9}\right]=\left[11n+\frac{n}{9}\right]-\left[\frac{n}{9}\right].$$

Число $11n$ – целое. Поэтому при вычислении целой части суммы $11n+\frac{n}{9}$ мы можем просто вычислить целую часть числа $\frac{n}{9}$ и прибавить к ней $11n$: $\left[11n+\frac{n}{9}\right]=11\,n+\left[\frac{n}{9}\right]$. Продолжим тогда наши преобразования:

$$\left[11n+\frac{n}{9}\right]-\left[\frac{n}{9}\right]=11\,n+\left[\frac{n}{9}\right]-\left[\frac{n}{9}\right]=11\,n.$$

Как видим, алгоритм умножения, с помощью которого считает Горгулий, действительно вычисляет произведение числа n на 11.

– Мы, монстропитеки, ужасно умные и трудолюбивые! Мы ужасно любим считать! А ещё мы ужасно любим мороженое! Ты не забыл?

Помню, помню. Поскольку Горгулий признаёт только один вид умножения – умножение на степень числа 10, в первом вычислении ему помогло то обстоятельство, что 10^2-1 делится на 11. Более того, частное от деления 10^2-1 на 11 равно 9, и это число активно использовалось в вычислении. Скатерть,

между прочим, вежливые гости тоже не жуют!.. Во втором вычислении Горгулий опирался на то, что 10^4+1 делится на 137 и частное равно 73. Правильность второго умножения обосновывается равенством

$$\left[\frac{10000n}{73}\right]+\left(\left[\frac{n}{73}\right]+1\right)=\left[137n-\frac{n}{73}\right]+\left(\left[\frac{n}{73}\right]+1\right)=$$

$$=137n-\left[\frac{n}{73}\right]-1+\left[\frac{n}{73}\right]+1=137n.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\left[137n-\frac{n}{73}\right]=137n-\left[\frac{n}{73}\right]-1,$$

предлагаем читателю самому убедиться, что это так.

Только в этом равенстве существенно, что число $\frac{n}{73}$ – нецелое.

– Если бы оно было целым, я не стал бы прибавлять к целой части единицу.

В общем случае, когда Горгулию надо умножить какое-то число на число M, Горгулий подбирает степень десятки 10^n, для которой 10^n-1 или 10^n+1 делится на M.

– Мы чаще всё же пользуемся первым способом, когда 10^n-1 делится на M. Но мы не подбираем! Нас в школе учат, как такое n находить.

Здорово! Кажется, у нас в школе такому не учат.

Оказывается, если число M не делится ни на 2, ни на 5, такое n обязательно существует. Например, если число M – простое, то всегда можно взять $n=M-1$, но тогда даже для небольших чисел M получится алгоритм с очень громоздким делением. Правда, для многих чисел, как это было с числом $M=11$, число n может оказаться существенно меньше. Хитрая Бусенька каким-то способом «раскусила» эту трудность. Она предложила Горгулию умножить 2 на 17. А для числа 17 наименьшее n, при котором 10^n-1 делится на 17, – это $n=16$. При этом

$$\frac{10^{16}-1}{17}=588\,235\,294\,117\,647.$$

Вот почему Горгулий в таком несложном с виду примере стал делить 2 на это огромное число, да ещё с 16 знаками после запятой*.

А теперь – мороженое!

Художник Полина Царёва

* Горгулий мог бы воспользоваться вторым способом и делить всего лишь на 7-значное число, поскольку $10^8+1=17\cdot 5882353$. Но монстропитеки не любят второй способ.