

Знакомясь с некоторыми математическими теоремами, поражаешься: как можно было такое придумать?! Сейчас мы увидим, как иногда, глядя на красивую теорему, удаётся выдвинуть новую гипотезу.

Теорема (Шарль Брианшон, 1810 год). *В описанном шестиугольнике три главные диагонали пересекаются в одной точке (рис. 1).*

Разберёмся в формулировке. Шестиугольник называется описанным вокруг окружности, если каждая его сторона касается этой окружности (каждая в своей точке касания). Главными диагоналями называются диагонали, соединяющие противоположные вершины.

Проведём эксперимент. Описанный шестиугольник получен из шести прямых, касающихся окружности. Начнём вращать две соседние прямые, оставляя их касательными к окружности и сближая их точки касания (синяя и голубая точки на рисунке 2). Аналогично поступим ещё с одной парой соседних прямых (сближаем красную и розовую точки касания на рисунке 2). Шестиугольник при этом остаётся описанным, так что всё время выполняется теорема Брианшона: красные отрезки пересекаются в одной точке.

Оп! Внезапно у нас получился четырёхугольник. В каком-то смысле это шестиугольник, только, как говорят математики, *вырожденный*. Наверняка и в нём красные отрезки будут пересекаться в одной точке. Можно выдвинуть красивую правдоподобную гипотезу:

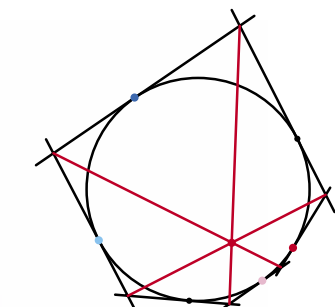


Рис. 1

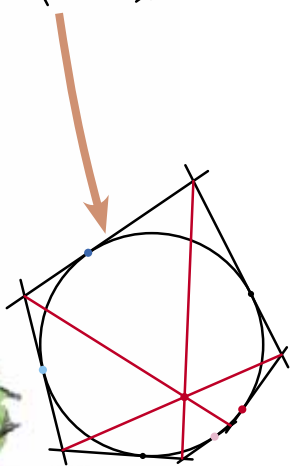
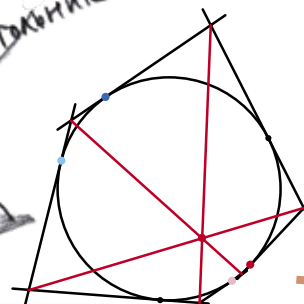
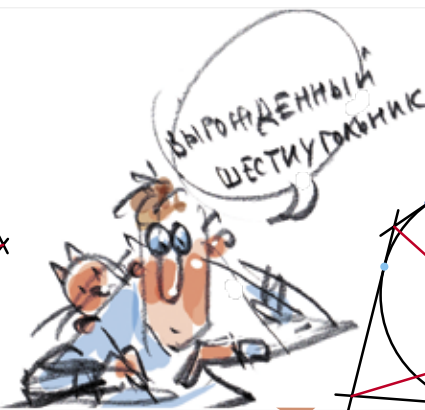
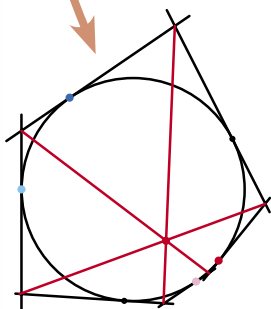


Рис. 2



СМОТРИ!

Гипотеза 1. В описанном четырёхугольнике отрезок, соединяющий две точки касания вписанной окружности, лежащие на противоположных сторонах, проходит через точку пересечения диагоналей (рис. 3).

А теперь сделаем ещё более красивую гипотезу из уже имеющейся. Соединим отрезками точки касания вписанной окружности с противоположными сторонами четырёхугольника. По предыдущей гипотезе, оба эти отрезка пройдут через точку пересечения диагоналей!

Гипотеза 2. В описанном четырёхугольнике точка пересечения отрезков, соединяющих противоположные точки касания вписанной окружности, совпадает с точкой пересечения диагоналей (рис. 4).

Оказывается, обе гипотезы верны. Основную идею их доказательства мы увидели: надо рассмотреть вырожденный случай теоремы Брианшона. Этот приём математики называют *предельным переходом*. Для наведения полной строгости нужно было бы показать, что:

во-первых, при переходе от шестиугольника к четырёхугольнику в последний момент отрезки не перестают пересекаться в одной точке;

во-вторых, любой четырёхугольник получается из некоторого шестиугольника с помощью предельного перехода.

Понравилось выдвигать гипотезы? Попробуйте сами рассмотреть другие вырождения шестиугольника – в пятиугольник, в треугольник, – и с помощью теоремы Брианшона посмотреть, что получается. В ответах на стр. 30 приведены результаты, известные нам. Может быть, вам удастся открыть что-то новое?

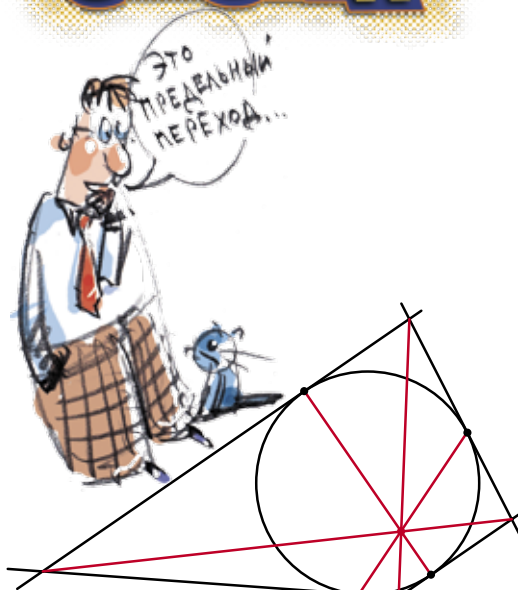


Рис. 4

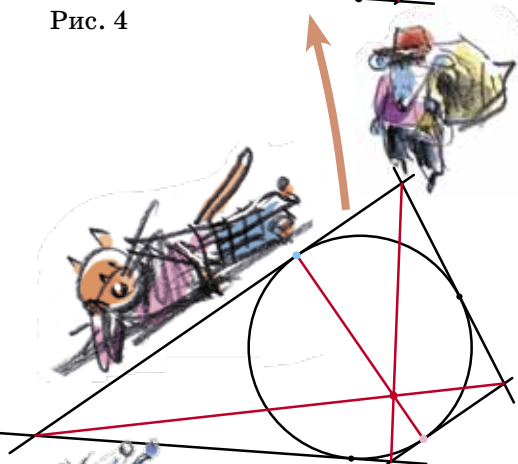


Рис. 3

