МЕНЬШЕ ЗНАЕШЬ – КРЕПЧЕ СПИШЬ

Игорь Акулич

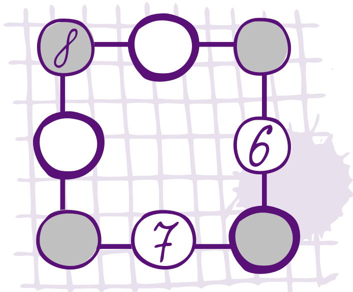
– Сударь, – сказал Планше, – надо вам знать… хотя, в сущности, вам, пожалуй, этого и знать не надо.

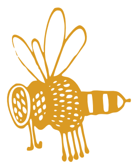
А. Дюма.
Двадцать лет спустя.
Часть I, глава VII.

Международный математический конкурс «Кенгуру» проводится не один десяток лет, вызывает большой интерес у школьников и пользуется заслуженной популярностью. Его главная особенность – отсутствие намеренно заковыристых, специфических задач, одолеть которые способны, как правило, лишь специально обученные «олимпиадники». Иначе говоря, «Кенгуру» – массовый конкурс, проводимый под лозунгом «Математика для всех», в чём его несомненное достоинство[1].

Одно из заданий для 3-4 классов за 2011 год послужило основой для такой задачи:

8 кружочков (4 белых и 4 серых) расположены в виде квадрата. В них вписаны числа от 1 до 8 (в каждый кружочек – по одному числу) так, что на каждой стороне квадрата сумма чисел равна 13. При этом расположение трёх чисел уже указано:





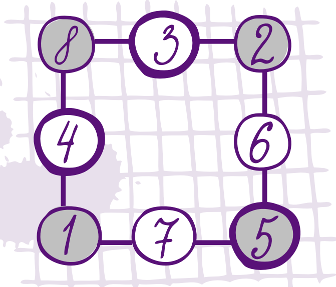
Чему равна сумма чисел в серых кружочках?

Для пробы я предложил эту задачу своему соседу – семикласснику Олегу. Справедливость требует отметить, что он её одолел и даже сумел подробно разъяснить своё решение, суть которого можно пересказать так:

– Сначала я пробовал действовать подбором, но потом понял, что это слишком долго и какие-то решения могу просто пропустить. Долго думал, как быть, пока не задался вопросом: а куда можно поставить пятёрку? Она не может быть в одной горизонтали с восьмёркой, потому что $5+8=13$, и если в третий кружочек той же горизонтали поставить любое оставшееся чис-

[1] Подробности о конкурсе можно посмотреть на сайте mathkang.ru.

ло, то сумма будет явно больше 13. По той же причине пятёрка не может лежать и в одной вертикали с восьмёркой. Что же остается? Только три кружочка, но в двух из них уже поставлены числа 6 и 7. Поэтому число 5 может занимать единственное место: в правом нижнем кружочке. Ну, а после этого числа в остальных кружочках определяются без труда, исходя из того, что сумма чисел по всем сторонам квадрата равна 13. Например, в левом нижнем кружочке должно быть число $13-(7+5)=1$, в правом верхнем $13-(6+5)=2$, и так далее. Вот какое получается итоговое расположение:



Ну а сумма чисел в серых кружочках равна

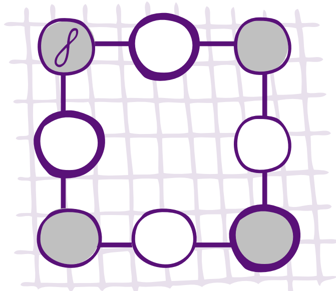
$$8+2+1+5=16.$$

– Умница! – похвалил я его. – Не осрамил честь семиклассника перед третьим и даже четвёртым классом!

– Но, – многозначительно добавил Олег, – я обнаружил в условии *лишние данные*!

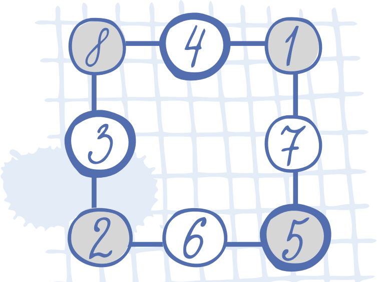
– Это какие? – удивился я.

– Шестёрка и семёрка! Оказывается, достаточно указать расположение только восьмёрки, то есть исходная картинка могла выглядеть так:



– Ну-ка, поясни.

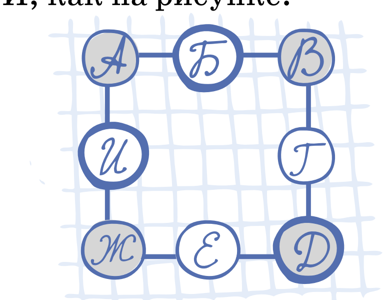
– Я подумал: если для пятёрки допустимы только три кружочка, то это тем более верно для шестёрки и семёрки! Значит, эти три числа должны лежать в тех же трёх «разрешённых» кружочках, но вот вопрос: обязательно ли в том же порядке? Сразу видно, что шестёрка и семёрка не могут находиться на одной горизонтали – ведь 6 + 7 = 13, и сумма их с третьим числом той же горизонтали превысит 13. Точно так же они не могут быть в одной вертикали. Значит, в правом нижнем углу – непременно пятёрка, а шестёрка и семёрка расположены либо как в условии исходной задачи, либо симметрично относительно диагонали. Потому итоговое расположение чисел – либо то, которое я нашёл, либо симметричное ему – вот такое:



Но нас-то интересует не расположение чисел, а только сумма тех из них, что находятся в серых кружочках. Эти цифры – те же самые, так что и сумма их останется неизменной – 16.

Что тут сказать? Молодец парень! Однако он был весьма удивлен, когда узнал, что и единственная восьмёрка тоже является *лишними данными*! Иначе говоря, можно было вообще не указывать *ни одного* числа в кружочках. Более того – решение при этом ещё и упрощается.

Итак, пусть не указано положение ни одного из чисел. Обозначим их значения (пока неизвестные) буквами от А до И, как на рисунке:



Тогда, согласно условию, выполняются четыре равенства:

$$А+Б+В=13,$$
$$В+Г+Д=13,$$
$$Д+Е+Ж=13,$$
$$Ж+И+А=13.$$

Давайте их сложим. В правой части будет, понятное дело, число $13 \cdot 4=52$. А в левой? Там окажется сумма значений всех букв, причём некоторые из них встретятся один раз, а другие дважды. Поэтому для удобства представим суммарное выражение в таком виде (убедитесь в его справедливости!):

$$(А+Б+В+Г+Д+Е+Ж+И)+(А+В+Д+Ж)=52.$$

Заметим, что в первых скобках находится сумма всех имеющихся чисел (правда, неясно, в каком порядке, но от перестановки слагаемых сумма не меняется). Поэтому она равна $1+2+\ldots+8=36$. Таким образом, получаем:

$$36+(А+В+Д+Ж)=52$$

и потому $А+В+Д+Ж=52-36=16$. Но $А+В+Д+Ж$ – это и есть сумма чисел в серых кружочках. Так что она равна 16 в любом случае.

Как видим, отсутствие данных избавило нас от необходимости выполнять какой бы то ни было перебор. Более того – не требуется даже выяснять, можно ли вообще расставить числа в кружочках в соответствии с требованиями условия. Так что в некоторых случаях, действительно, меньше знаешь – лучше решаешь. И, соответственно, крепче спишь, почивая на лаврах.

P.S. Хотя задача успешно решена, остался непроясненным вопрос: а существуют ли иные расположения в кружочках чисел от 1 до 8, дающие сумму 13 по каждой стороне квадрата, отличные от найденного Олегом (решения, переходящие друг в друга с помощью поворотов и отражений, считаем одинаковыми)? И если да, то сколько их?

Художник Татьяна Ахметгалиева