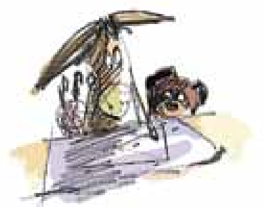
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СКАЗКИ

Александр Спивак,
Татьяна Сысоева

РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ



Окончание. Начало в номерах 9 и 10

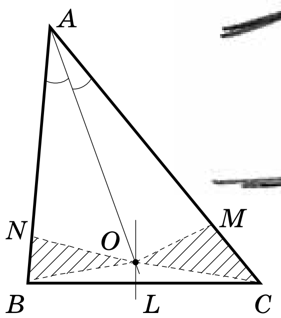


Рис. 6

НЕДОВЕРЧИВЫЙ ИА

– Не верю я в призраки, – заявил друзьям при встрече Иа-Иа.

– Да и с признаками нехорошо получается – всё на свете из-за них оказывается равным. Вот я, например, в одной книжке нашёл такой чертёж.

Ослик небрежно провёл биссектрису угла A треугольника ABC и серединный перпендикуляр к стороне BC (рис. 6). Из точки O их пересечения опустил перпендикуляры ON и OM на стороны треугольника и стал рассуждать:

– Прямоугольные треугольники BOL и COL равны.

– Почему? – поинтересовался Пух.

– Потому что $OL = OL$, – ответил Иа, – и $BL = CL$, потому что я проводил серединный перпендикуляр.

– Треугольники BOL и COL равны по двум катетам,– уточнила Сова. – Это частный случай признака «по двум сторонам и углу между ними». Ослик продолжил:

– Значит, $BO = CO$. Треугольники NOA и MOA тоже равны.

– А это почему? – спросил Пух.

– По гипотенузе и острому углу, – ответила и на этот раз Сова, – мы скоро будем изучать этот признак.

– Благодарю, – поспешил продолжить ослик,– за признаки, без которых осёл никогда бы не получил равенства $AN = AM$, $ON = OM$. Но даже я теперь вижу, что треугольники BON и COM равны.

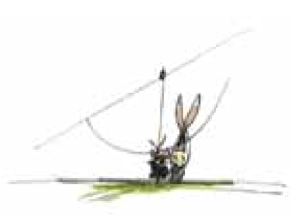
– По гипотенузе и катету, – добавила Сова.

– И что же это значит? – спросил Пух и сам себе ответил: – Это значит, что $BN = CM$.

– $AB = AN + NB = AM + MC = AC$, так что $AB = AC$! – победоносно заявил Иа. – Треугольник ABC равнобедренный! Но я начинал с любого треугольника. Значит, любой треугольник – равнобедренный!

– Во всяком равнобедренном треугольнике, – невпопад подхватила Сова, – углы при основании равны. Верна и обратная теорема: если два угла треугольника равны, то он равнобедренный.

– Что ни говори, а уже пора обедать, – сказал Пух. – Пойдёмте к Кристоферу, спросим, бывают ли неравнобедренные треугольники. То есть я понимаю, что бывают, но по осликовой науке их не бывает.



– В геометрии, – поучительно сказала Сова, – надо верить не грубым чертежам, а точным доказательствам.

ГДЕ ЛЕЖИТ ТОЧКА *O*?

Когда они пришли к Кристоферу и рассказали ему, почему все треугольники равнобедренные, он нарисовал несколько точных чертежей и сказал:

– Точка O на всех моих чертежах расположена вне треугольника (рис. 7). Смотрите, $AB = AN - NB$, $AC = AM + MC$, и противоречия нет.

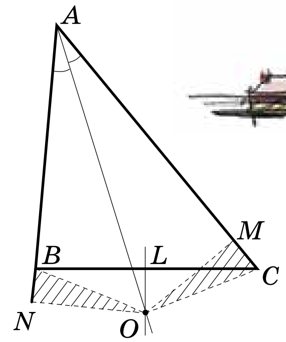


Рис. 7

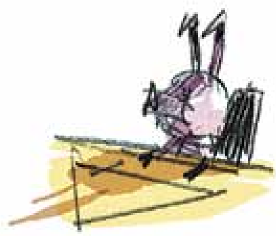
– Почему твои чертежи правильные, а мой неправильный? – не сдавался Иа.

– Вообще-то обосновывать свой чертёж должен был ты, – ответил ослику Пух. – Что ни говори, а неравнобедренные треугольники существуют.

– Почему я? – не согласился Иа. – Он критикует моё доказательство очень важной теоремы, вот пусть он и обосновывает. Если хотя бы для одного неравнобедренного треугольника точка O окажется внутри, то уже получится противоречие во всей математике!

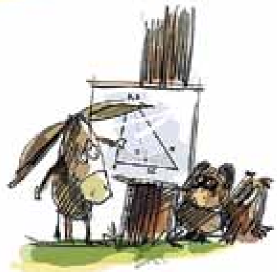
– Именно потому, что противоречия нет, точка O вне, а не внутри, – терпеливо объяснил Кристофер.

– Вот ты и ошибся, – продолжал спорить Иа, – даже если верить в неравнобедренные треугольники, точка O лежит вне не в любом треугольнике, а только в неравнобедренном!



– Ты понял, что сказал? – спросил Пух. – В равнобедренном треугольнике серединный перпендикуляр совпадает с биссектрисой и никакой такой точки пересечения у них нет!

– Это ты не понимаешь, что говоришь! – парировал Иа. – Если две прямые совпадают, то никак нельзя говорить, что они не пересекаются. Напротив, они пересекаются по прямой!

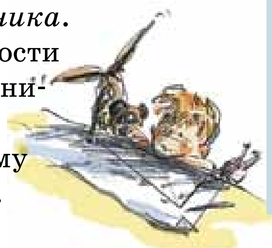


– Друзья, вы спорите попусту. И по-моему, сами это понимаете, – вмешался Кристофер.

– Пока вы дискутировали, – веско произнесла Сова, – я читала умную книгу. Там написано: *Точка пересечения биссектрисы угла A и серединного перпендикуляра к стороне BC неравнобедренного треугольника ABC лежит на описанной окружности этого треугольника.*

– А вдруг кусочек описанной окружности попадёт внутрь треугольника? – никак не унимался Иа.

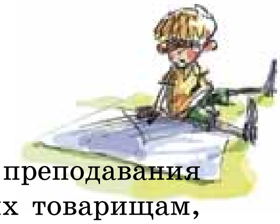
– Чем больше ты споришь, – ответил ему Пух, – тем дольше мы не начинаем обедать.



Упражнение

9. В треугольнике ABC из вершины C проведена медиана CD. Доказать, что высоты треугольников DBC и DAC, проведённые из вершин B и A, равны между собой.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СКАЗКИ



ПРИЗНАКИ И ПОСТРОЕНИЯ

После обеда Сова вдруг сказала:

– Чем больше я продумываю методику преподавания геометрии ослику, медведю, поросёнку и их товарищам, тем лучше понимаю, что признаки равенства треугольников связаны с построениями циркулем и линейкой.

– ...со строениями цирка линейкой? – удивился Пух,– С какими строениями? Объясните мне!

– Не со строениями, а с построениями циркулем и линейкой, – ответил Кристофер. – Смотри (рис. 8), если дан угол треугольника α, противоположная сторона a и ещё одна сторона b, то можно легко такой треугольник построить.

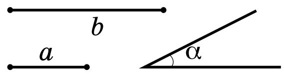


Рис. 8

Кристофер построил угол α, отложил (циркулем) отрезок AC длины b и нарисовал окружность радиуса a с центром C – получилось подходящих треугольника ACB_1 и ACB_2 (рис. 9).

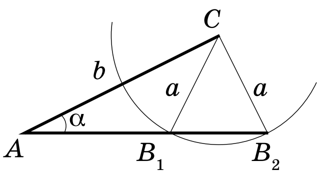


Рис. 9

– И треугольник, думаете, построен? – недоверчиво спросил подошедший ослик Иа-Иа. – Вдруг радиус a слишком маленький (рис. 10)? Тогда окружность не дотянется!

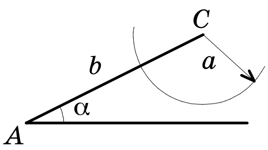


Рис. 10

– Да, в таком случае треугольник не существует, – подтвердил Кристофер. – Если же окружность касается стороны угла, то треугольник единственен (рис. 11).

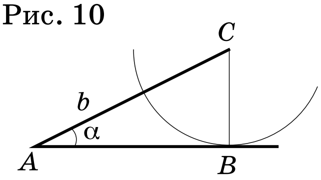


Рис. 11

– А что делать, если радиус слишком велик? – не унимался ослик (рис. 12). Кристофер ответил:

– В таком случае треугольник тоже единственен.

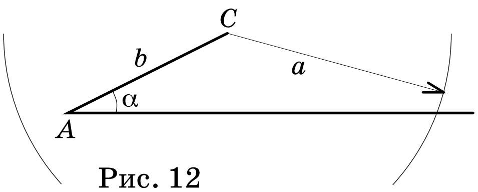


Рис. 12

– Иногда, – сказал Пух, – таких треугольников два, как на рисунке 9. Помните, пару дней назад Кристофер нарисовал пример (рис.13) – только там эти два треугольника были приставлены друг к другу.

– Именно потому, – согласился Кристофер, – что на этом рисунке треугольник строится двумя способами, нет признака равенства по углу, прилежащей стороне и противолежащей стороне.

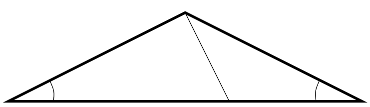


Рис. 13

Упражнения

10. От квадрата отрезан прямоугольный треугольник, сумма катетов которого равна стороне квадрата.Докажите, что сумма трёх углов, под которыми видна из трёхоставшихся вершин его гипотенуза,равна 90°.

Подсказка. «Соберите» эти три угла в одной вершине квадрата. Тот же приём применим и в следующей задаче.

11. Прямая отсекает от правильного шестиугольника $ABCDEF$ треугольник AKL так, что $AK+AL=AB$. Найдите сумму углов $\widehat{KAL}+\widehat{KBL}+$ $+\widehat{KCL}+\widehat{KDL}+\widehat{KEL}+\widehat{KFL}$, под которыми отрезок KL виден из вершин шестиугольника.

12. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника вне его построены квадраты $ACDE$ и $BCKF$. Из точек E и F на продолжение гипотенузы опущены перпендикуляры EM и FN. Докажите, что $EM+FN=AB$.

Художник: Сергей Чуб